MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Primeira Prova — 17/04/2017

Tipo de prova: ○ ○ ● ● ○ ○ ● ○

TESTES

1. (1,2 pt) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, suponhamos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Então:

a. f é decrescente.
b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x^2) = +\infty$.
c. $\forall m \geq 0$, temos $f(x) \leq 0$ se $x \geq m$.
d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
e. Nenhuma das respostas acima é correta.

2. (1,2 pt) Sejam f e g funções reais a valores reais. Considere as seguintes afirmações:
I. Se f é contínua em $x_0 \in \operatorname{dom} f$, então é derivável em x_0.
II. Suponha f inversível com inversa g, f derivável em $x_0 \in \operatorname{dom} f$, g contínua em $f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$. Então g é derivável em $f(x_0)$.
III. Se f e g forem ambas descontínuas em $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, então $f + g$ é descontínua em x_0.
São verdadeiras:

a. apenas a afirmação I.
b. apenas a afirmação II.
c. apenas a afirmação III.
d. todas as afirmações.
e. apenas as afirmações II e III.

3. (1,2 pt) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 5, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

Para que f seja derivável em 1, a e b devem ser, respectivamente:

a. 5 e 3.
b. 2 e 3.
c. 4 e qualquer b real.
d. 4 e 3.
e. para nenhum valor de a e b.

4. (1,2 pt) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, inversível, com inversa derivável e tal que $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$. A equação da reta tangente ao gráfico da inversa de f no ponto $(3, 2)$ é:

a. $y = 4x + \frac{1}{3}$.
b. $y = 4x + \frac{4}{3}$.
c. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.
d. $y = \frac{1}{4}x + 2$.
e. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Gabarito da P1 — Prova: ○ ○ ● ● ○ ○ ● ○

Testes

e - b - d - c

Questões Dissertativas

Questão 1 (Valor: $1,2$ ponto)**.** Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3(\sqrt{x^3+1+x^2}-1)}{3x^2 \operatorname{sen} x^3}$. Não serão aceitas soluções que usem a regra de l'Hôpital (para quem já a conhece).

Solução. $\dfrac{2x^3(\sqrt{x^3+1+x^2}-1)}{3x^2 \operatorname{sen} x^3} = \dfrac{2}{3}\cdot \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^3+1+x^2}-1}{x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}{\sqrt{x^3+1+x^2}+1} = \dfrac{2}{3}\cdot \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}} \cdot \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}$. Pelo limite trigonométrico fundamental e pelo teorema sobre limites de funções compostas, conclui-se que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} = 1$; daí, pelas regras operacionais para limites conclui-se que o limite pedido existe e vale $\frac{1}{3}$.

Questão 2 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Uma partícula se movimenta ao longo de uma reta real segundo a função horária $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \dfrac{f(t^4)}{2f(t^4)^2+1}$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e unidades no sistema MKS. Supondo $f(1) = f'(1) = 1$, calcule a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

Solução. Usando-se as regras operacionais para a derivada e a regra da cadeia, bem como a diferenciabilidade de f, conclui-se que g é derivável e, para todo $t \in \mathbb{R}$: $g'(t) = \dfrac{f'(t^4)\cdot 4t^3 \cdot (2f(t^4)^2+1) - f(t^4)\cdot [4f(t^4)\cdot f'(t^4)\cdot 4t^3]}{(2f(t^4)^2+1)^2}$. Substituindo-se $t = 1$, $f(1) = f'(1) = 1$, obtém-se $g'(1) = \frac{4\cdot 3 - 4\cdot 4}{3^2} = -\frac{4}{9}$.

Questão 3 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Encontre a reta tangente à curva $x^2y(x+3y) = x^2+3y^2$ no ponto $(1,1)$. Admita que a referida curva define implicitamente $y = y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1) = 1$.

Solução. Para todo $x \in \operatorname{dom} y$, o ponto $(x, y(x))$ pertence à referida curva, i.e. $x^2 \cdot y(x) \cdot [x+3y(x)] = x^2 + 3y(x)^2$. Equivalentemente, a função $F : \operatorname{dom} y \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^2 \cdot y(x) \cdot [x+3y(x)] - [x^2+3y(x)^2]$ se anula identicamente, portanto sua derivada se anula identicamente. Por outro lado, pelo fato de ser y derivável, pela regra da cadeia e pelas regras operacionais para a derivada, obtém-se, para todo $x \in \operatorname{dom} y$: $F'(x) = 2x\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)] + x^2\cdot y'(x)\cdot[x+3y(x)] + x^2\cdot y(x)\cdot[1+3y'(x)] - 2x - 6y(x)\cdot y'(x)$, o que deve se anular identicamente. Em particular, para $x = 1$ e $y(1) = 1$, obtém-se $8 + 4\cdot y'(1) + [1+3y'(1)] - 2 - 6y'(1) = 0$, o que é equivalente a $y'(1) + 7 = 0$, logo $y'(1) = -7$. A reta pedida é, pois, a reta tangente ao gráfico de y no ponto $(1, y(1))$, i.e. aquela que passa por $(1,1)$ e que tem coeficiente angular -7, i.e. a reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 = -7(x-1)\}$.

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Gabarito da P1 — Prova: ● ● ● ● ○ ○ ● ○

Testes

e - c - b - d

Questões Dissertativas

Questão 1 (Valor: $1,2$ ponto)**.** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^3(\sqrt{x+4+x^2}-2)}{2x\,\mathrm{sen}\,x^3}$. Não serão aceitas soluções que usem a regra de l'Hôpital (para quem já a conhece).

Solução. $\displaystyle\frac{3x^3(\sqrt{x+4+x^2}-2)}{2x\,\mathrm{sen}\,x^3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{sen}\,x^3}{x^3}}\cdot\frac{\sqrt{x+4+x^2}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4+x^2}+2}{\sqrt{x+4+x^2}+2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{sen}\,x^3}{x^3}}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x+4+x^2}+2}$. Pelo limite trigonométrico fundamental e pelo teorema sobre limites de funções compostas, conclui-se que $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x^3}{x^3} = 1$; daí, pelas regras operacionais para limites conclui-se que o limite pedido existe e vale $\frac{3}{8}$.

Questão 2 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Uma partícula se movimenta ao longo de uma reta real segundo a função horária $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(t) = \dfrac{f(t^3)}{2f(t^3)^2+1}$, com $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável e unidades no sistema MKS. Supondo $f(1) = f'(1) = 1$, calcule a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

Solução. Usando-se as regras operacionais para a derivada e a regra da cadeia, bem como a diferenciabilidade de f, conclui-se que g é derivável e, para todo $t\in\mathbb{R}$: $g'(t) = \dfrac{f'(t^3)\cdot 3t^2\cdot(2f(t^3)^2+1) - f(t^3)\cdot[4f(t^3)\cdot f'(t^3)\cdot 3t^2]}{(2f(t^3)^2+1)^2}$. Substituindo-se $t = 1$, $f(1) = f'(1) = 1$, obtém-se $g'(1) = \frac{3\cdot 3-4\cdot 3}{3^2} = -\frac{1}{3}$.

Questão 3 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Encontre a reta tangente à curva $x^2y(2x+y) = x+2y^4$ no ponto $(1,1)$. Admita que a referida curva define implicitamente $y = y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1) = 1$.

Solução. Para todo $x\in\mathrm{dom}\,y$, o ponto $(x,y(x))$ pertence à referida curva, i.e. $x^2\cdot y(x)\cdot[2x+y(x)] = x+2y(x)^4$. Equivalentemente, a função $F:\mathrm{dom}\,y\to\mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^2\cdot y(x)\cdot[2x+y(x)] - [x+2y(x)^4]$ se anula identicamente, portanto sua derivada se anula identicamente. Por outro lado, pelo fato de ser y derivável, pela regra da cadeia e pelas regras operacionais para a derivada, obtém-se, para todo $x\in\mathrm{dom}\,y$: $F'(x) = 2x\cdot y(x)\cdot[2x+y(x)] + x^2\cdot y'(x)\cdot[2x+y(x)] + x^2\cdot y(x)\cdot[2+y'(x)] - 1 - 8y(x)\cdot y'(x)$, o que deve se anular identicamente. Em particular, para $x = 1$ e $y(1) = 1$, obtém-se $6+3\cdot y'(1)+[2+y'(1)]-1-8y'(1) = 0$, o que é equivalente a $-4y'(1)+7 = 0$, logo $y'(1) = 7/4$. A reta pedida é, pois, a reta tangente ao gráfico de y no ponto $(1,y(1))$, i.e. aquela que passa por $(1,1)$ e que tem coeficiente angular $7/4$, i.e. a reta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-1 = \frac{7}{4}(x-1)\}$.

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Gabarito da P1 — Prova: ○ ● ● ● ○ ○ ● ○

Testes

c - e - c - c

Questões Dissertativas

Questão 1 (Valor: $1,2$ ponto)**.** Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^3(\sqrt{x^3+1}+x^2-1)}{3x^2\operatorname{sen}x^3}$. Não serão aceitas soluções que usem a regra de l'Hôpital (para quem já a conhece).

Solução. $\displaystyle\frac{2x^3(\sqrt{x^3+1+x^2}-1)}{3x^2\operatorname{sen}x^3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}x^3}{x^3}}\cdot\frac{\sqrt{x^3+1+x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}x^3}{x^3}}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^3+1+x^2}+1}$. Pelo limite trigonométrico fundamental e pelo teorema sobre limites de funções compostas, conclui-se que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x^3}{x^3}=1$; daí, pelas regras operacionais para limites conclui-se que o limite pedido existe e vale $\frac{1}{3}$.

Questão 2 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Uma partícula se movimenta ao longo de uma reta real segundo a função horária $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(t)=\dfrac{f(t^4)}{2f(t^4)^2+1}$, com $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável e unidades no sistema MKS. Supondo $f(1)=f'(1)=1$, calcule a velocidade da partícula no instante $t=1$.

Solução. Usando-se as regras operacionais para a derivada e a regra da cadeia, bem como a diferenciabilidade de f, conclui-se que g é derivável e, para todo $t\in\mathbb{R}$: $g'(t)=\dfrac{f'(t^4)\cdot 4t^3\cdot(2f(t^4)^2+1)-f(t^4)\cdot[4f(t^4)\cdot f'(t^4)\cdot 4t^3]}{(2f(t^4)^2+1)^2}$. Substituindo-se $t=1$, $f(1)=f'(1)=1$, obtém-se $g'(1)=\frac{4\cdot 3-4\cdot 4}{3^2}=-\frac{4}{9}$.

Questão 3 (Valor: $2,0$ pontos)**.** Encontre a reta tangente à curva $x^2y(x+3y)=x^2+3y^2$ no ponto $(1,1)$. Admita que a referida curva define implicitamente $y=y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1)=1$.

Solução. Para todo $x\in\operatorname{dom}y$, o ponto $(x,y(x))$ pertence à referida curva, i.e. $x^2\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)]=x^2+3y(x)^2$. Equivalentemente, a função $F:\operatorname{dom}y\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=x^2\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)]-[x^2+3y(x)^2]$ se anula identicamente, portanto sua derivada se anula identicamente. Por outro lado, pelo fato de ser y derivável, pela regra da cadeia e pelas regras operacionais para a derivada, obtém-se, para todo $x\in\operatorname{dom}y$: $F'(x)=2x\cdot y(x)\cdot[x+3y(x)]+x^2\cdot y'(x)\cdot[x+3y(x)]+x^2\cdot y(x)\cdot[1+3y'(x)]-2x-6y(x)\cdot y'(x)$, o que deve se anular identicamente. Em particular, para $x=1$ e $y(1)=1$, obtém-se $8+4\cdot y'(1)+[1+3y'(1)]-2-6y'(1)=0$, o que é equivalente a $y'(1)+7=0$, logo $y'(1)=-7$. A reta pedida é, pois, a reta tangente ao gráfico de y no ponto $(1,y(1))$, i.e. aquela que passa por $(1,1)$ e que tem coeficiente angular -7, i.e. a reta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-1=-7(x-1)\}$.

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Gabarito da P1 — Prova: ● ○ ● ● ○ ○ ● ○

TESTES

d - e - b - a

QUESTÕES DISSERTATIVAS

Questão 1 (Valor: 1,2 ponto)**.** Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3(\sqrt{x+4+x^2}-2)}{2x \operatorname{sen} x^3}$. Não serão aceitas soluções que usem a regra de l'Hôpital (para quem já a conhece).

Solução. $\dfrac{3x^3(\sqrt{x+4+x^2}-2)}{2x \operatorname{sen} x^3} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+4+x^2}-2}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x+4+x^2}+2}{\sqrt{x+4+x^2}+2} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}} \cdot \dfrac{x+1}{\sqrt{x+4+x^2}+2}$. Pelo limite trigonométrico fundamental e pelo teorema sobre limites de funções compostas, conclui-se que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} = 1$; daí, pelas regras operacionais para limites conclui-se que o limite pedido existe e vale $\frac{3}{8}$.

Questão 2 (Valor: 2,0 pontos)**.** Uma partícula se movimenta ao longo de uma reta real segundo a função horária $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \dfrac{f(t^3)}{2f(t^3)^2+1}$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e unidades no sistema MKS. Supondo $f(1) = f'(1) = 1$, calcule a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

Solução. Usando-se as regras operacionais para a derivada e a regra da cadeia, bem como a diferenciabilidade de f, conclui-se que g é derivável e, para todo $t \in \mathbb{R}$: $g'(t) = \dfrac{f'(t^3)\cdot 3t^2 \cdot (2f(t^3)^2+1) - f(t^3)\cdot[4f(t^3)\cdot f'(t^3)\cdot 3t^2]}{(2f(t^3)^2+1)^2}$. Substituindo-se $t = 1$, $f(1) = f'(1) = 1$, obtém-se $g'(1) = \frac{3\cdot 3 - 4\cdot 3}{3^2} = -\frac{1}{3}$.

Questão 3 (Valor: 2,0 pontos)**.** Encontre a reta tangente à curva $x^2y(2x+y) = x + 2y^4$ no ponto $(1,1)$. Admita que a referida curva define implicitamente $y = y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1) = 1$.

Solução. Para todo $x \in \operatorname{dom} y$, o ponto $(x, y(x))$ pertence à referida curva, i.e. $x^2 \cdot y(x) \cdot [2x + y(x)] = x + 2y(x)^4$. Equivalentemente, a função $F : \operatorname{dom} y \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^2 \cdot y(x) \cdot [2x+y(x)] - [x + 2y(x)^4]$ se anula identicamente, portanto sua derivada se anula identicamente. Por outro lado, pelo fato de ser y derivável, pela regra da cadeia e pelas regras operacionais para a derivada, obtém-se, para todo $x \in \operatorname{dom} y$: $F'(x) = 2x \cdot y(x) \cdot [2x + y(x)] + x^2 \cdot y'(x) \cdot [2x + y(x)] + x^2 \cdot y(x) \cdot [2 + y'(x)] - 1 - 8y(x) \cdot y'(x)$, o que deve se anular identicamente. Em particular, para $x = 1$ e $y(1) = 1$, obtém-se $6 + 3 \cdot y'(1) + [2 + y'(1)] - 1 - 8y'(1) = 0$, o que é equivalente a $-4y'(1) + 7 = 0$, logo $y'(1) = 7/4$. A reta pedida é, pois, a reta tangente ao gráfico de y no ponto $(1, y(1))$, i.e. aquela que passa por $(1,1)$ e que tem coeficiente angular $7/4$, i.e. a reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 = \frac{7}{4}(x-1)\}$.