

2o. Semestre de 2011 - 1a. Lista de exercícios: Sequências e Séries Numéricas

(I) Uma demonstração de que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ existe. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n.$$

b) Deduza que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$.

c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte b) para demonstrar que $\{a_n\}$ é crescente.

d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Use as partes c) e d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(II) Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \dots$

4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

5) $c_k = \frac{\sqrt{k} + 1}{k - 1}, k \geq 2$

6) $a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2}$

7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

8) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

10) $a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

11) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

12) $a_n = \sin n; b_n = \sin(n\pi); c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

13) $a_n = \frac{2n + \sin n}{5n + 1}$

14) $a_n = \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

15) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

16) $a_n = \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$

17) $a_n = \frac{3^n}{2^n + 10^n}$

18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

20) $a_n = na^n, a \in \mathbb{R}$

21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

22) $a_n = n - n^2 \sin \frac{1}{n}$

23) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

24) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ onde $0 < a < b$

25) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

26) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$

28) $a_n = \sqrt[n]{n}$

29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \alpha \in \mathbb{R}$

30) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}, a > 0$

31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

32) $a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0$

33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$

38) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

(III) Verifique que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ se:

1) $a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$ 2) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)}.$

(IV) 1) Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow A$ uma função contínua em A e $a \in A$. Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência definida por: $a_0 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 0$. Suponha que $\{a_n\}$ converge para a . Prove que $f(a) = a$.

2) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

3) Mostre que a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ... converge para 2.

(V) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências:

$$\begin{array}{lll} 1) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^3} & 2) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{e^r} & 3) s_n = \sum_{r=3}^n \frac{1}{\ln r} \\ 4) a_n = \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)} & 5) a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} & \end{array}$$

Calcule o limite nos casos 2) e 5).

(VI) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n \right) & 2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{k}{2}} \text{ para } 0 < t < 1 & 3) \sum_{n=0}^{\infty} u^n (1 + u^n) \text{ para } |u| < 1 \\ 4) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \text{ para } |x| < 1 & 5) \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x \text{ para } |x| < \frac{\pi}{2} & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{n}{j} \right) \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} & 9) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sin k} \\ 10) \sum_{s=1}^{\infty} \cos \left(\frac{1}{s} \right) & 11) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos k}{k} & \end{array}$$

(VII) É convergente ou divergente? Justifique.

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}} & 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2} & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda}, \lambda > 0 \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} & 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} & 7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3} \sqrt[5]{n^3+5}} \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) & 10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} & 11) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} & 12) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}, p > 0 \\ 13) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^p} \right), p > 0 & 14) \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) & 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n} & 16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n} \\ 17) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k} & 18) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} & 19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n} & \end{array}$$

(VIII) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}} & 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 3} & 4) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \\ 5) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} & 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} & 7) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n} & 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^p}, p > 0 & 10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} & 11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} & \end{array}$$

(IX) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

$$1) 1, \overline{29} \quad 2) 0, \overline{3117}.$$

(X) Para cada n , seja a_n um dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

é convergente.

(XI) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

(XII) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

(XIII) Verifique as relações 1) e 2) abaixo e use-as para calcular as somas 3) - 7):

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - f(1)$, se o limite existir.
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1)$, se o limite existir.
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n}{n+2} \right)$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \left(\frac{1}{n} \right) - \sin \left(\frac{1}{n+1} \right) \right]$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \dots (n+k)}, (k \geq 2)$

(XIV) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries convergem.

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 + x^n)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)$ 3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$ 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$

RESPOSTAS

(II) Respostas

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| 1) converge para 1 | 2) diverge | 3) diverge |
| 4) converge para 2 | 5) converge para 0 | 6) converge para $\frac{1}{4}$ |
| 7) converge para 0 | 8) converge para 1 | 9) converge para $\frac{3}{2}$ |
| 10) converge para $\frac{1}{2}$ | 11) converge para 0 | 12) a_n e c_n divergem ; $b_n \rightarrow 0$ |
| 13) converge para $\frac{2}{5}$ | 14) converge para 0 | 15) converge para 1 |
| 16) converge para 0 | 17) converge para 0 | 18) converge para e |
| 19) converge para 0 | 20) converge para 0 se $ a < 1$ | 21) converge para 0 |
| 22) converge para 0 | 23) diverge | 24) converge para b |
| 25) converge para 0 | 26) converge para $\frac{1}{2}$ | 27) converge para 0 |
| 28) converge para 1 | 29) converge para 0, $\alpha \in \mathbb{R}$ | 30) converge para 0 |
| 31) diverge | 32) converge para 1 | 33) $1/e$ |
| 34) diverge | 35) 1 | 36) 0 |
| 37) $\exp(22/15)$ | 38) 1 | |

(IV) 1) 2 3) 2.

(V) 1) converge, 2) converge para $\frac{1}{e-1}$, 3) diverge, 4) diverge (Dica: calcular $\ln a_n$), 5) converge para 0 (Dica: calcular $\ln a_n$).

(VI) 1) diverge, 2) $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$, 3) $\frac{2+u}{1-u^2}$, 4) $\frac{1}{1+x^2}$, 5) $\frac{1}{1-\sin^2 x}$, 6) diverge, 7) diverge, 8) diverge, 9) diverge, 10) diverge, 11) diverge.

(VII) 1) diverge, 2) converge, 3) converge, 4) converge, 5) diverge, 6) diverge, 7) converge, 8) converge, 9) converge, 10) converge, 11) converge, 12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 14) diverge, 15) diverge, 16) diverge, 17) converge, 18) diverge, 19) diverge.

(VIII) 1) converge condicionalmente, 2) converge absolutamente, 3) converge condicionalmente, 4) converge condicionalmente, 5) converge condicionalmente, 6) converge absolutamente, 7) diverge, 8) diverge, 9) converge absolutamente se $p > 1$ e converge condicionalmente se $p \leq 1$, 10) converge absolutamente, 11) converge condicionalmente.

(XII) $2s - a_1$.

(XIII) 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) $\sin(1)$ 6) converge para 1; 7) converge para $\frac{1}{k!(k-1)}$

(XIV) 1) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 2) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 3) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, 4) $\{x = 0\}$,
5) $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$, 6) $\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 7) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.