

**MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV**

**2o. Semestre de 2009 - 2a. Lista de exercícios: Séries de Potências e Séries de Fourier**

1. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries.

- |  |   |
|--|---|
| a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$         | b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$         |
| c) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ | d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ |
| e) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$                                  | f) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$   |
| g) $x + 2x^3 + 3x^5 + \dots + nx^{2n-1} + \dots$                               | h) $\frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \dots$        |
| i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$   | j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \dots$   |
| k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \dots$  | l) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots$                            |

2. Mediante o uso das somas das séries obtidas no exercício 1, calcule:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}.$

3. Determine as expansões em séries de potências em torno de  $x_0 = 0$  das seguintes funções e os valores de  $x$  para os quais essas expansões são válidas:

a)  $\frac{1}{(1+x)^2}$       b)  $\frac{1}{(1+x)^3}$

c) Mostre que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$

4. Verifique que

a)  $\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$       b)  $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$

5. Determine as expansões em séries de potências em torno de  $x_0 = 0$  das seguintes funções e os valores de  $x$  para os quais essas expansões são válidas:

a)  $\frac{1}{(1+x)^2}$     b)  $\frac{1}{(1+x)^3}$     c)  $\frac{2x}{1+x^4}$     d)  $\ln(1+x)$     e)  $\ln \left( \frac{1}{1+3x^2} \right)$     f)  $\frac{x}{1+x-2x^2}.$

6. Verifique que

a)  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$       b)  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$   
 c)  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$       d)  $\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$   
 e)  $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$

7. Utilizando as séries desenvolvidas no exercício anterior, obtenha um valor aproximado de

- (a)  $e$ , com erro inferior a  $10^{-5}$       (b)  $\sin 1$ , com erro inferior a  $10^{-5}$  e a  $10^{-7}$   
 (c)  $\ln 2$  e  $\ln 3$ , com erro inferior a  $10^{-5}$       (d)  $\operatorname{arctg}(1/2)$  e  $\operatorname{arctg}(1/3)$ , com erro inferior a  $10^{-5}$   
 (e)  $\pi/4$ , com erro inferior a  $10^{-5}$

(Para (e), use  $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$ , que segue imediatamente de  $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}.$

8. Utilizando série de Taylor calcule  $\frac{d^{320} \operatorname{arctg}}{dx^{320}}(0)$  e  $\frac{d^{321} \operatorname{arctg}}{dx^{321}}(0).$

9. Pode-se também tratar de séries de números complexos de modo análogo ao caso real. E então, para todo  $z \in \mathbb{C}$ , define-se  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Mostre que  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

10. Desenvolva em série de potências de  $x$  as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência
- a)  $x^2 e^x$                       b)  $\cos \sqrt{x}$                       c)  $\sin(x^2)$                       d)  $\cos^2 x$
11. Desenvolva em série de potências de  $x$  as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência, e calcule  $f(1)$  com erro inferior a  $10^{-6}$ :
- a)  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$     b)  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$     c)  $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$     d)  $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$
12. Estimar com erro  $\varepsilon < 10^{-3}$ . Justifique.
- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$                       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}}$
13. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites
- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$                       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha}$                       (e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$

### Séries de Fourier

14. Ache a série de Fourier das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:
- a)  $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \leq 0 \\ b, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$                       b)  $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$
- c)  $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi$                       d)  $f(x) = e^{ax}, -\pi < x \leq \pi, a \neq 0$
- e)  $f(x) = \sin(ax), -\pi < x \leq \pi, a \notin \mathbb{Z}$                       f)  $f(x) = ax + b, -\pi < x \leq \pi$
- g)  $f(x) = |\cos x|, -\pi < x \leq \pi$
15. Ache a série de Fourier de senos e de cossenos das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:
- a)  $f(x) = ax, 0 \leq x \leq \pi$                       b)  $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \pi$
- c)  $f(x) = ax + b, 0 \leq x \leq \pi$                       d)  $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$
- e)  $f(x) = |\cos x|, 0 \leq x \leq \pi$
16. Mostre que
- a)  $1 = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots), 0 < x < \pi$  ;
- b)  $\pi - x = 2(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots), 0 < x < \pi$ ;
- c)  $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots), -\pi < x < \pi$
- d)  $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - (\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots), 0 < x < \pi$
- e)  $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots), 0 < x < \pi$
17. Verifique as seguintes igualdades, usando o exercício anterior
- a)  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$     b)  $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$
- c)  $\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$                       d)  $\frac{3\pi^3}{128} \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots$
- e)  $\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{1}{9}\sqrt{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\sqrt{2} - \frac{1}{13}\sqrt{2} - \dots$
18. Calcule a soma das séries
- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$                       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
19. Determine  $c_1, c_2, c_3$  de modo que as integrais abaixo assumam o menor valor possível:
- a)  $\int_{-\pi}^{\pi} [x - c_1 \sin x - c_2 \sin 2x - c_3 \sin 3x]^2 dx$     b)  $\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - c_1]^2 dx$
- c)  $\int_{-\pi}^{\pi} [|\cos x| - c_1 - c_2 \sin x - c_3 \cos x]^2 dx$

20. Ache a série de Fourier da função  $f(x)$  periódica de período 1 e que satisfaz  $f(x) = x^2$  se  $0 \leq x < 1$ . Qual a soma de série quando  $x = 999/2$ ? E quando  $x = 999$ ?
21. a) Ache a série de Fourier da função ímpar  $f(x)$ , periódica de período 4, e que satisfaz  $f(x) = x$  se  $0 \leq x \leq 1$  e  $f(2-x) = f(x)$  se  $0 \leq x < 1$ .
- b) Encontre  $b_1, b_2, b_3, \dots$  tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = x$  se  $0 < x < 1$   $f(2-x) = f(x); 0 < x < 1$
- c) Encontre  $c_1, c_2, c_3, \dots$  tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = 1-x$  se  $0 < x < 1$   $f(2-x) = f(x); 0 < x < 1$
- d) Quanto vale a soma de série do item c) quando  $x = 200$ ? E quando  $x = 201$ ?
22. Ache constantes  $a$  e  $b$  tais que a série de senos de  $f(x) = x^3 + ax$  em  $[0, \pi]$  seja da forma

$$b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

23. Usando a fórmula de Parseval prove que

$$(a) \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (b) \frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

24. Calcule

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

25. (Questão de prova)

(a) Dê fórmulas para as constantes  $a_n, n \geq 0, b_n, n \geq 1$ , tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = x^2 \cdot e^x, \quad -\pi < x < \pi$$

(b) Determine a soma da série para  $x = \frac{11\pi}{2}$  e para  $x = 11\pi$ .

26. (Questão de prova) Encontre constantes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  que minimizem a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[ x - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right]^2 dx.$$

## Respostas

1. a)  $-\ln(1-x)$     b)  $\ln(1+x)$     c)  $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$     d)  $\arctg x$     e)  $\frac{1}{(1-x)^2}$     f)  $\frac{x}{(1-x)^2}$
- g)  $\frac{x}{(1-x^2)^2}$     h)  $(1+x) \ln(1+x) - x$     i)  $\frac{1+x}{(1-x)^3}$     j)  $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$     k)  $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$     l)  $\frac{-1}{4} \ln(1-x^4)$ .
2.  $\ln 2; \frac{3}{128}; \frac{6}{5} \ln \frac{6}{5} - \frac{1}{5}$ .
3. a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad -1 < x < 1$     b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n, \quad -1 < x < 1$ .

5. .

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n, -1 < x < 1$  (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n, -1 < x < 1$   
(c)  $2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} \right), -1 < x < 1$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1$   
(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{2n}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-(-1)^n 2^n}{3} \right) x^n, \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$

8. 0 e  $(320)!$ .

10. .

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}, x \in \mathbb{R}$  (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}, x \geq 0$   
(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$  (d)  $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$

11. .

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$  (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, x \in \mathbb{R}$   
(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, -1 < x \leq 1$  (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$

12. a)  $k \geq 23$  b)  $k \geq 20$

13. (a) 1 (b)  $\frac{1}{2}$  (c)  $\frac{1}{6}$  (d)  $-\frac{1}{6!}$ , se  $\alpha = 6$ ; 0, se  $\alpha < 6$ ;  $\infty$ , se  $\alpha > 6$   
(e)  $-\frac{1}{7!}$ , se  $\alpha = 7$ ; 0, se  $\alpha < 7$ ;  $\infty$ , se  $\alpha > 7$

14. .

- (a)  $\frac{a+b}{2} + \frac{2}{\pi}(b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$ .  
soma:  $a$ , se  $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ ;  $b$ , se  $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ ;  $\frac{a+b}{2}$ , se  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
(b)  $\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2}{\pi}(a-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} - (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$ .  
soma:  $ax$ , se  $(2k-1)\pi < x \leq 2k\pi$ ;  $bx$ , se  $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$ ;  $\frac{b-a}{2}\pi$ , se  $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(c)  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$   
soma:  $|x|$ , se  $-\pi \leq x \leq \pi$  e sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$ .  
(d)  $\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} (a \cos(nx) - n \sin(nx))$ .  
soma:  $e^{ax}$ , se  $-\pi < x < \pi$ ;  $\cosh(a\pi)$  se  $x = \pm\pi$ , e a sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$   
(e)  $\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2-a^2} \sin(nx)$   
soma:  $\sin(ax)$ , para  $-\pi < x < \pi$ ; 0 para  $x = \pm\pi$  e a sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$ .  
(f)  $b + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$ .  
soma:  $ax + b$ , para  $-\pi < x < \pi$ ;  $b$ , para  $x = \pm\pi$ , e sua extensão periódica, para  $x \in \mathbb{R}$ .  
(g)  $\frac{2}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \right)$   
soma:  $|\cos x|$ , para  $x \in \mathbb{R}$

15. .

- (a)  $2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$   
soma:  $ax$ , para  $-\pi < x < \pi$ ; 0 para  $x = \pm\pi$ , e sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$ .  
 $\frac{a}{2}\pi - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$ ,  
soma:  $a|x|$ , para  $-\pi \leq x \leq \pi$  e sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$ .  
(b)  $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$ .  
soma:  $x^2$  para  $0 \leq x < \pi$ ;  $-x^2$ , para  $-\pi \leq x \leq 0$ ; 0 para  $x = \pm\pi$  e sua extensão  
periódica para  $x \in \mathbb{R}$   
 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$ .  
soma:  $x^2$ , para  $-\pi \leq x \leq \pi$  e sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (b - (a\pi + b)(-1)^n) \sin(nx).$

soma :  $ax - b$ , para  $-\pi < x \leq 0$ ;  $ax + b$ , para  $0 < x < \pi$ , 0, para  $x = \pm\pi$ , 0 e sua extensão periódica para  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{a\pi}{2} + b - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

soma :  $a|x| + b$ , para  $-\pi \leq x \leq \pi$  e sua extensão periódica de  $a|x| + b$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

(d)  $\sin x$ ,

soma :  $\sin x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ;

$$\frac{2}{\pi} \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma :  $|\sin x|$  para  $x \in \mathbb{R}$

(e)  $\frac{e}{\pi} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1+(-1)^n}{\pi n(n-1)} \sin((2n-1)x),$

soma :  $-|\cos x|$  para  $x \leq 0$  e  $|\cos x|$  para  $x \geq 0$ ,  $x \neq k\pi$  e 0 para  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{2}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma :  $|\cos x|$ , para  $x \in \mathbb{R}$

17. .

(a) usar 12a) em  $x_0 = \pi/2$

(b) usar 12c) em  $x_0 = \pi$

(c) usar 12e) em  $x_0 = \pi/2$

(d) usar 13e) em  $x_0 = \pi/4$

(e) usar 13b) em  $x_0 = \pi/4$

18. (a)  $\frac{\pi^2}{8}$

b)  $\frac{\pi^2}{12}$

19. .

(a)  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -1$ ,  $x_3 = \frac{2}{3}$

(b)  $c_1 = \frac{2\pi^2}{3}$

(c)  $c_1 = \frac{4}{\pi}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$

20.  $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) - \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right)$   $S(999) = 0$  e  $S(999/2) = (1/2)$ .

21. .

(a)  $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$

(b)  $b_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)}}{(2n-1)^2}$  para  $n \geq 1$ .

(c)  $c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^n 8}{(2n-1)^2 \pi^2}$ , para  $n \geq 1$ . (d)  $S(200) = S(0) = 0$ ;  $S(201) = S(1) = 0$

22.  $\mathbb{Q} = -\pi^2$ ,  $b = 12$

23. (a) Use  $f(x) = x^3$

(b) Use exercício 22.

24. (a)  $\frac{\pi^4}{96}$

(b)  $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$ .