MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2o. Semestre de 2011 - 2a. Lista de exercícios: Séries de Potências e Séries de Fourier

1. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries.

   a) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n} + ...$ b) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\,\dfrac{x^n}{n} + ...$

   c) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ... + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$ d) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\,\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$

   e) $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...$ f) $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ...$

   g) $x + 2x^3 + 3x^5 + ... + nx^{2n-1} + ...$ h) $\dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^4}{3.4} - \dfrac{x^5}{4.5} + ...$

   i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + ...$ j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + ...$

   k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + ...$ l) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^8}{8} + \dfrac{x^{12}}{12} + ...$

2. Mediante o uso das somas das séries obtidas no exercício 1, calcule:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}$.

3. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

   a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ b) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$

   c) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$.

4. Verifique que

   a) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$ b) arctg $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$.

5. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

   a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ b) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$ c) $\dfrac{2x}{1+x^4}$ d) $\ln(1+x)$ e) $\ln\left(\dfrac{1}{1+3x^2}\right)$ f) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

6. Verifique que

   a) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ b) sen $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

   c) $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ d) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$

   e) arctg $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \le 1$.

7. Utilizando as séries desenvolvidas no exercício anterior, obtenha um valor aproximado de

   (a) e, com erro inferior a 10^{-5} (b) sen 1, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}

   (c) ln 2 e ln 3, com erro inferior a 10^{-5} (d) arctg(1/2) e arctg(1/3), com erro inferior a 10^{-5}

   (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}

   (Para (e), use $\frac{\pi}{4} = \text{arctg}(\frac{1}{2}) + \text{arctg}(\frac{1}{3})$, que segue imediatamente de $\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg}(x)+\text{tg}(y)}{1-\text{tg}(x)\,\text{tg}(y)}$).

8. Utilizando série de Taylor calcule $\dfrac{d^{320}\,\text{arctg}}{dx^{320}}(0)$ e $\dfrac{d^{321}\,\text{arctg}}{dx^{321}}(0)$.

9. Pode-se também tratar de séries de números complexos de modo análogo ao caso real. E então, para todo $z \in \mathbb{C}$, define-se $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Mostre que $e^{ix} = \cos x + i$ sen x, para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência

a) x^2e^x b) $\cos\sqrt{x}$ c) $\operatorname{sen}(x^2)$ d) $\cos^2 x$

11. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência, e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-6}:

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ b) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

12. Estimar com êrro $\varepsilon < 10^{-3}$. Justifique.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}}$

13. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$

Séries de Fourier

14. Ache a série de Fourier das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

a) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \le 0 \\ b, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \le 0 \\ bx, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

c) $f(x) = |x|,\ -\pi < x \le \pi$ d) $f(x) = e^{ax},\ -\pi < x \le \pi,\ a \neq 0$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(ax),\ -\pi < x \le \pi,\ a \notin \mathbb{Z}$ f) $f(x) = ax + b,\ -\pi < x \le \pi$

g) $f(x) = |\cos\ x|,\ -\pi < x \le \pi$

15. Ache a série de Fourier de senos e de cossenos das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

a) $f(x) = ax,\ 0 \le x \le \pi$ b) $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le \pi$

c) $f(x) = ax + b,\ 0 \le x \le \pi$ d) $f(x) = \operatorname{sen}\ x,\ 0 \le x \le \pi$

e) $f(x) = |\cos\ x|,\ 0 \le x \le \pi$

16. Mostre que

a) $1 = \frac{4}{\pi}(\operatorname{sen}\ x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\ 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\ 5x + ...),\ 0 < x < \pi$;

b) $\pi - x = 2(\operatorname{sen}\ x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\ 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\ 3x + ...),\ 0 < x < \pi;$

c) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos\ x + \frac{\cos\ 2x}{2^2} - \frac{\cos\ 3x}{3^2} + ...),\ -\pi < x < \pi$

d) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - (\cos\ 2x + \frac{\cos\ 4x}{2^2} + \frac{\cos\ 6x}{3^2} + ...),\ 0 < x < \pi$

e) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}(\operatorname{sen}\ x + \frac{\operatorname{sen}\ 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}\ 5x}{5^3} + ...),\ 0 < x < \pi$

17. Verifique as seguintes igualdades, usando o exercício anterior

a) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^n\frac{1}{2n+1} + ...$ b) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$

c) $\frac{\pi^3}{32} = \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ d) $\frac{3\pi^3}{128}\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - ...$

e) $\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{1}{9}\sqrt{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\sqrt{2} - \frac{1}{13}\sqrt{2} - ...$

18. Calcule a soma das séries

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

19. Determine c_1, c_2, c_3 de modo que as integrais abaixo assumam o menor valor possível:

a) $\int_{-\pi}^{\pi}[x - c_1\operatorname{sen}\ x - c_2\operatorname{sen}\ 2x - c_3\operatorname{sen}\ 3x]^2dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi}[x^2 - c_1]^2dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi}[|\cos\ x| - c_1 - c_2\operatorname{sen}\ x - c_3\cos\ x]^2dx$

20. Ache a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 1 e que satisfaz $f(x) = x^2$ se $0 \le x < 1$. Qual a soma de série quando $x = 999/2$? E quando $x = 999$?

21. a) Ache a série de Fourier da função ímpar $f(x)$, periódica de período 4, e que satisfaz $f(x) = x$ se $0 \le x \le 1$ e $f(2-x) = f(x)$ se $0 \le x < 1$.

    b) Encontre $b_1, b_2, b_3, ...$ tais que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = x$ se $0 < x < 1$ $\;f(2-x) = f(x); 0 < x < 1$

    c) Encontre $c_1, c_2, c_3, ...$ tais que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = 1 - x$ se $0 < x < 1$ $\;f(2-x) = f(x); 0 < x < 1$

    d) Quanto vale a soma de série do item c) quando $x = 200$? E quando $x = 201$?

22. Ache constantes a e b tais que a série de senos de $f(x) = x^3 + ax$ em $[0, \pi]$ seja da forma

$$b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

23. Usando a fórmula de Parseval prove que

    (a) $\displaystyle\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (b) $\displaystyle\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

24. Calcule

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

25. (Questão de prova)

    (a) Dê fórmulas para as constantes a_n, $n \ge 0$, b_n, $n \ge 1$, tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = x^2.e^x, \ -\pi < x < \pi$$

    (b) Determine a soma da série para $x = \dfrac{11\pi}{2}$ e para $x = 11\pi$.

26. (Questão de prova) Encontre constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que minimizem a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx\right)\right]^2 dx.$$

Respostas

1. a) $-\ln(1-x)$ b) $\ln(1+x)$ c) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ d) $\operatorname{arctg} x$ e) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ f) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$

   g) $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ h) $(1+x)\ln(1+x)-x$ i) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ j) $\dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$ k) $\dfrac{4-3x}{(1-x)^2}$ l) $\frac{-1}{4}\ln(1-x^4)$.

2. $\ln 2$; $\frac{3}{128}$; $\frac{6}{5}\ln\frac{6}{5} - \frac{1}{5}$.

3. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $-1 < x < 1$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n$, $-1 < x < 1$.

5. .

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n,\ -1<x<1$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}\ x^n, -1<x<1$

(c) $2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}\right), -1<x<1$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, -1<x\le 1$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}\ x^{2n},\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n 2^n}{3}\right)x^n,\ \frac{-1}{2}<x<\frac{1}{2}$

8. 0 e (320)!.

10. .

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!},\ x\ge 0$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$ (d) $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$

11. .

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ x\in\mathbb{R}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2},\ -1<x\le 1$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$

12. a) $k\ge 23$ b) $k\ge 20$

13. (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6!}$, se $\alpha=6$; 0 , se $\alpha<6$; ∞ , se $\alpha>6$

(e) $-\frac{1}{7!}$, se $\alpha=7$; 0 , se $\alpha<7$; ∞ , se $\alpha>7$

14. .

(a) $\frac{a+b}{2}+\frac{2}{\pi}(b-a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$

soma: a, se $(2k-1)\pi<x<2k\pi$; b, se $2k\pi<x<(2k+1)\pi$; $\frac{a+b}{2}$, se $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(b) $\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2}{\pi}(a-b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}-(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n}.$

soma: ax, se $(2k-1)\pi<x\le 2k\pi$; bx, se $2k\pi\le x<(2k+1)\pi$; $\frac{b-a}{2}\pi$, se $x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(c) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

soma: $|x|$, se $-\pi\le x\le\pi$ e sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$.

(d) $\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi}+\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\cos(nx)-n\sin(nx)).$

soma: e^{ax}, se $-\pi<x<\pi$; $\cosh(a\pi)$ se $x=\pm\pi$, e a sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$

(e) $\frac{2\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2-a^2}\sin(nx)$

soma: $\sin(ax)$, para $-\pi<x<\pi$; 0 para $x=\pm\pi$ e a sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$.

(f) $b+2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}.$

soma: $ax+b$, para $-\pi<x<\pi$; b, para $x=\pm\pi$, e sua extensão periódica, para $x\in\mathbb{R}$.

(g) $\frac{2}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\right)$

soma : $|\cos x|$, para $x\in\mathbb{R}$

15. .

(a) $2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$

soma : ax, para $-\pi<x<\pi$; 0 para $x=\pm\pi$, e sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$.

$\frac{a}{2}\pi-\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2},$

soma : $a|x|$, para $-\pi\le x\le\pi$ e sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$.

(b) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}.$

soma : x^2 para $0\le x<\pi$; $-x^2$, para $-\pi\le x\le 0$; 0 para $x=\pm\pi$ e sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$

$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$

soma : x^2, para $-\pi\le x\le\pi$ e sua extensão periódica para $x\in\mathbb{R}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(b-(a\pi+b)(-1)^n)\sin(nx)$.

soma : $ax-b$, para $-\pi < x \leq 0$; $ax+b$, para $0 < x < \pi$, 0, para $x = \pm\pi$, 0 e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$\frac{a\pi}{2} + b - \frac{4a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$.

soma : $a|x|+b$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica de $a|x|+b$ para $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\sin x$,

soma : $\sin x$, para $x \in \mathbb{R}$;

$\frac{2}{\pi}(1 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1})$,

soma : $|\sin x|$ para $x \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{e}{\pi}\sin\ x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1+(-1)^n}{\pi n(n-1)} \sin((2n-1)x)$,

soma : $-|\cos x|$ para $x \leq 0$ e $|\cos x|$ para $x \geq 0$, $x \neq k\pi$ e 0 para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{2}{\pi}(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$,

soma : $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

17. .

(a) usar 12a) em $x_0 = \pi/2$ (b) usar 12c) em $x_0 = \pi$

(c) usar 12e) em $x_0 = \pi/2$ (d) usar 13e) em $x_0 = \pi/4$

(e) usar 13b) em $x_0 = \pi/4$

18. (a) $\frac{\pi^2}{8}$ b) $\frac{\pi^2}{12}$

19. .

(a) $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $x_3 = \frac{2}{3}$ (b) $c_1 = \frac{2\pi^2}{3}$

(c) $c_1 = \frac{4}{\pi}$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

20. $\frac{1}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(\frac{n\pi x}{4}) - \frac{1}{\pi n}\sin(\frac{n\pi x}{2})\right)$ $S(999) = 0$ e $S(999/2) = (1/2)$.

21. .

(a) $\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(\frac{(2k+1)\pi x}{2})$. (b) $b_n = \frac{8}{\pi^2}\frac{(-1)^{(n-1)}}{(2n-1)^2}$ para $n \geq 1$.

(c) $c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^n 8}{(2n-1)^2\pi^2}$, para $n \geq 1$. (d) $S(200) = S(0) = 0$; $S(201) = S(1) = 0$

22. $\mathbb{Q} = -\pi^2$, $b = 12$

23. (a) Use $f(x) = x^3$ (b) Use exercício 22.

24. (a) $\dfrac{\pi^4}{96}$ (b) $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.