

1. Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1} \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n 3^n} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1) \ln^2(n+1)} \\ \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n \\ \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} & \text{k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-4)^{2n} & \text{l)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n \\ \text{m)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2} & \text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 4^n} x^n & \end{array}$$

2. É conhecido que se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  é uma série de potências,  $a_n > 0$  para todo  $n \geq n_0$  e  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  então o raio de convergência  $R$  da série é dado por  $R = 1/L$ . Ache o raio de convergência para as séries seguintes e comente.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{2n!}{(n!)^2} \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{2n!}{(n!)^2} \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{2n!}{(n!)^2} \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n} \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n} \quad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} \frac{n!}{n^n}.$$

3. Determine o intervalo de convergência de:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+2}{5n+7} \right)^n x^n \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^n+3}{3^n+2} \right) x^n \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n + b^n}, \text{ com } b > a > 0.$$

4. Examine a convergência das seguintes séries:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} & \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} & \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} \\ \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n^2+3}}} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n^2+3}}} \right) \\ \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^{\sqrt[3]{n^2+3}}} \right) & & \end{array}$$

5. Usando o teste da integral, verifique a convergência das seguintes séries:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^2} \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3}.$$

6. Para quais valores de  $\alpha > 0$  a série é convergente?

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^3 \left( 1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{4 + \frac{1}{n^{2\alpha}}} - 2 \right) \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n^\alpha} - 1).$$

7. Seja  $a_n$  definida por  $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{2^j} \\ a_{2j+1} = \frac{(-1)^j}{j} \end{cases}$ .

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é alternada? A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge?

8. Seja  $a_n$  dada por  $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{j^3} \\ a_{2j+1} = -\frac{1}{j^2} \end{cases}$ . A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é alternada? A série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge? A série

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  verifica o Critério de Leibnitz?

9. Seja  $b_k$  definida por  $\begin{cases} b_{2j} = \frac{1}{j} \\ b_{2j+1} = \frac{-1}{j^3} \end{cases}$ . A série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge?
10. Para quais valores de  $k \in \mathbb{N}$  a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$  é convergente?
11. Suponha que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge quando  $x = -4$  e diverge quando  $x = 6$ . O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 8^n$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-3)^n$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$ .
12. Considere a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e seja  $R$  seu raio de convergência. Mostre que
- (a) Se existe  $\beta > 0$  tal que  $|a_n| \leq \beta$ , para todo  $n \geq 0$ , então  $R \geq 1$ .  
 (b) Se existe  $\alpha > 0$  tal que  $|a_n| \geq \alpha$ , para todo  $n \geq 0$ , então  $R \leq 1$ .  
 (c) Se existem  $\alpha, \beta > 0$  tais que  $\alpha \leq |a_n| \leq \beta$ , para todo  $n \geq 0$ , então  $R = 1$ .  
 (d) Se  $|a_n| \leq \frac{1}{3^n}$ , para todo  $n \geq 0$ , então  $R \geq 3$ .
13. Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência das seguintes séries:
- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$     (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} x^n$ .

### Lista Complementar - Respostas

1. a)  $] -4, 4[$ ;    b)  $\{0\}$ ;    c)  $[-1, 1]$ ;    d)  $\{0\}$ ;    e)  $]2, 8]$ ;    f)  $[-2, 0]$ ;    g)  $\mathbb{R}$ ;    h)  $]0, 2e[$ ;  
 i)  $] -3 - e, -e + e[$ ;    j)  $[2, 4]$ ;    k)  $]2, 6[$ ;    l)  $[-1, 1]$ ;    m)  $] -1, 1[$ ;    n)  $[-4/3, 4/3[$ .
2. a)  $R = 1/4$ ;    b)  $R = 1/2$ ;    c)  $R = 1$ ;    d)  $R = e$ ;    e)  $R = \sqrt[3]{e}$ ;    f)  $R = 1$ .
3. a)  $] -1, 1[$ ;    b)  $] -5/3, 5/3[$ ;    c)  $] -3/2, 3/2[$ ;    d)  $[-1, 1]$ ;    e)  $] -b - 1, b - 1[$ .
4. a) diverge;    b) diverge;    c) converge;    d) converge;    e) converge;    f) converge;    g) converge.
5. a) converge;    b) diverge;    c) converge;    d) converge;    e) converge.
6. a)  $\alpha > 1/2$ ;    b)  $\alpha > 1/3$ ;    c)  $\alpha > 1/2$ ;    d)  $\alpha > 1$ .
7. Não. Não.
8. Não. Sim. Não.
9. Não.
10.  $k \geq 2$ .
11. a) converge;    b) diverge;    c) converge;    d) diverge.
12. Compare com a série geométrica conveniente.
13. a)  $R = 1$  e  $I = ] -1, 1[$ ;    b)  $R = 2$  e  $I = ] -2, 2[$ .