

**Parte A: Equações Diferenciais de 1a. Ordem**

- 1) Os gráficos de duas soluções de  $y' = x + y^2$  podem se cruzar num ponto  $(x_0, y_0)$ ?
- 2) Dê as soluções das equações diferenciais de 1a. ordem abaixo, com seus domínios (máximos):
  - a)  $y' = y^2$                       b)  $xy' = y$                       c)  $yy' = x$
  - d)  $y' = (1 - y)(2 - y)$     e)  $(x + 3y) - x \frac{dy}{dx} = 0$     f)  $y' = 2y + e^x$
- 3) Determine a solução de cada um dos problemas de Cauchy:
  - a)  $y' = x + y, y(0) = 1$     b)  $(\cos t)x' - (\sin t)x = 1, x(2\pi) = \pi$     c)  $y' = x(1 + y), y(0) = -1$
- 4) Dê duas soluções para cada uma das equações com a condição inicial dada:
  - a)  $y' = 5y^{4/5}, y(0) = 0$     b)  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}(3x^2 + 1), y(0) = 0.$
- 5) Resolva as equações:
  - a)  $y' = e^{x-2y}$                       b)  $x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 1 + x^2$
  - c)  $y' \sin x + y \cos x = 1$                       d)  $y' = x^3 - 2xy$
  - e)  $(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}) + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}) \frac{dy}{dx} = 0$     f)  $(1 - xy) + (xy - x^2) \frac{dy}{dx} = 0$
  - g)  $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$                       h)  $(1 + t^2)y' + ty + (1 + t^2)^{5/2} = 0$
  - i)  $\frac{dr}{d\theta} = \sec^2 \theta \sec^3 r$                       j)  $3t^2x' = 2x(x - 3)$
  - k)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos^2(\frac{y}{x})$                       l)  $(1 - xy)y' = y^2$
  - m)  $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}, x > 0$
- 6) Resolva as equações:
  - a)  $(x + y)dx + xdy = 0$                       b)  $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
  - c)  $\cos x dy = (1 - y - \sin x)dx$                       d)  $y(x^2 + y^2)dx + x(3x^2 - 5y^2)dy = 0$
  - e)  $e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = y \sin(xy)dx + x \sin(xy)dy$

Determine as soluções dos exercícios a), b) e d) que passam pelo ponto (1,1).

- 7) Mostre que a substituição  $z = ax + by + c$  transforma a equação  $y' = f(ax + by + c)$  numa equação de variáveis separáveis. Aplique esse método para resolver as equações
  - a)  $y' = (x + y)^2$     b)  $y' = \sin^2(x - y + 1)$     c)  $(x + 2y - 1)dx + 3(x + 2y)dy = 0.$

- 8) Uma *Equação de Bernoulli* é uma equação não linear de 1a. ordem da forma

$$(B) \quad y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

onde  $n$  é uma constante real. Se  $n = 1$ , (B) é uma equação linear. Se  $n \neq 1$ , mostre que a mudança  $z = y^{-n+1}$  transforma (B) na equação linear

$$z' + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x).$$

Use esse método para resolver as seguintes equações:

- a)  $y(6x^2y^2 - x + 1) + 2xy' = 0$                       b)  $y' = y + e^{-3x}y^4$
- c)  $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$  (que também é homogênea!)    d)  $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$
- 9) a) Determine todas as funções  $f$  que tornam exata a equação diferencial  $y^2 \sin x dx + yf(x)dy = 0$ .
- b) A equação  $g(x)dy + (y + x)dx = 0$  tem  $h(x) = x$  como fator integrante. Determine todas as possíveis funções  $g$ .
- c) A equação  $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$  tem um fator integrante da forma  $f(x, y) = e^{ax} \cos y$ . Determine  $a$  e resolva a equação.
- d) Ache um fator integrante da forma  $h(x, y) = x^n y^m$  para a equação  $y(y^2 + 1)dx + x(y^2 - 1) \ln x dy = 0$  e resolva-a.
- e) Ache um fator integrante da forma  $\mu = \mu(x + y^2)$  para a equação  $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$ .
- f) Ache um fator integrante da forma  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$  para a equação  $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$ .
- 10) Determine uma função  $y = f(x)$  definida num intervalo  $I$  cujo gráfico passe pelo ponto  $(0, 5/4)$  e tal que, para todo  $t > 0, t \in I$ , o comprimento do gráfico de  $y = f(x), 0 \leq x \leq t$ , seja igual à área do conjunto  $0 \leq y \leq f(x), 0 \leq x \leq t$ .

11) Determine uma função  $y = f(x)$  cujo gráfico passe pelo ponto (1,1) e tal que, para todo  $p$  em seu domínio, a área do triângulo com vértices  $(p, 0)$ ,  $(p, f(p))$  e  $M$  seja 1, onde  $M$  é o ponto de intersecção da reta tangente ao gráfico em  $(p, f(p))$  com o eixo  $x$ .

12) Ache as trajetórias ortogonais às famílias de curvas:

a)  $x^2 + y^2 = c$    b)  $2x^2 + 3y^2 = c$    c)  $y = cx^2$    d)  $y = ce^x$ .

### RESPOSTAS - Parte A

2) a)  $y \equiv 0, x \in \mathbb{R}; y = \frac{1}{a-x}, x < a$  ou  $x > a$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ .   b)  $y = ax, x \in \mathbb{R}$ , onde  $a \in \mathbb{R}$ .

c)  $y = \sqrt{x^2 + k}$  e  $y = -\sqrt{x^2 + k}, x^2 > -k$  se  $k < 0, x \in \mathbb{R}$  se  $k > 0$  e  $x < 0$  ou  $x > 0$  se  $k = 0$ .

d)  $y \equiv 1, x \in \mathbb{R}, y \equiv 2, x \in \mathbb{R}; y = \frac{ke^x - 2}{ke^x - 1}, x \in \mathbb{R}$  se  $k \leq 0$  e  $x < -\ln k$  ou  $x > -\ln k$  se  $k > 0$ .

e)  $y = ax^3 - \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$ .   f)  $y = ae^{2x} - e^x, x \in \mathbb{R}$ .

3) a)  $y = 2e^x - x - 1,$    b)  $x = \frac{t-\pi}{\cos t},$    c)  $y \equiv -1$ .

4) a)  $y \equiv 0$  e  $y = x^5$    b)  $y \equiv 0$  e  $y = (x^3 + x)^3$ .

5)

a)  $y = \frac{1}{2} \ln(2e^x + C), C \in \mathbb{R}$

b)  $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2 - 3 - Cx}{x}}, C \in \mathbb{R}$

c)  $y = \frac{x+C}{\sin x}, C \in \mathbb{R}$

d)  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}, C \in \mathbb{R}$

e)  $x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C, C \in \mathbb{R}$

f)  $y^2 - 2xy + \ln x^2 = C, C \in \mathbb{R}$

g)  $\begin{cases} y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 \text{ para } x > 0 \\ y - \sqrt{x^2 + y^2} = -C \text{ para } x < 0 \end{cases}$

h)  $y = \frac{C - 15t - 10t^3 - 3t^5}{15\sqrt{1+t^2}}, C \in \mathbb{R}$

i)  $3 \sin r - \sin^3 r = 3 \operatorname{tg} \theta + C, C \in \mathbb{R}$

j)  $x \equiv 0, x \equiv 3$  e  $x = \frac{3}{1 - Ce^{-2/t}}, C \in \mathbb{R}$

k)  $\operatorname{tg}(\frac{y}{x}) = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$

l)  $xy - \ln |y| = C, C \in \mathbb{R}$

m)  $\frac{y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} + \ln \left| \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^3} \right| = C, C \in \mathbb{R}$

6) a)  $x^2 + 2xy = C, C \in \mathbb{R}$    b)  $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2x^2y = C, C \in \mathbb{R}$    c)  $y = \frac{x+C}{\sec x + \operatorname{tg} x}, C \in \mathbb{R}$

d)  $y^3(x^2 - y^2) = Cx, C \in \mathbb{R}$    e)  $e^x \sin y + \cos(xy) = C, C \in \mathbb{R}$

7) a)  $y = \operatorname{tg}(x+C) - x, C \in \mathbb{R}$    b)  $\operatorname{tg}(x-y+1) = x+C, C \in \mathbb{R}$    c)  $y - \ln |x+2y+2| + \frac{x}{3} = C, C \in \mathbb{R}$ .

8) a)  $y \equiv 0$  e  $y^2 = \frac{1}{6x + Cxe^{-x}}, C \in \mathbb{R}$    b)  $y \equiv 0$  e  $y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C-3x}}, C \in \mathbb{R}$    c)  $y \equiv 0$  e  $y^2 = \frac{x^3}{C-x}, C \in \mathbb{R}$

d)  $y \equiv 0$  e  $y = \frac{27x^6}{(C - \ln x^2)^3}, C \in \mathbb{R}$ .

9) a)  $f(x) = C - 2 \cos x, C \in \mathbb{R}$    b)  $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$    c)  $a = -1; x + e^{-x} \sin y = C, C \in \mathbb{R}$

d)  $n = -1; m = -2; (y^2 + 1) \ln x = Cy, C \in \mathbb{R}$  e  $y \equiv 0$    e)  $\mu(x+y^2) = x+y^2$    f)  $\mu = (x^2 + y^2)^{-3/2}$ .

10)  $y = \frac{e^{-x} + 4e^x}{4}$ .   11)  $y = \frac{2}{x+1}$  ou  $y = \frac{2}{3-x}$ .

### Parte B: Equações Diferenciais de Ordem Superior

(1) REDUÇÃO DE ORDEM: Alguns tipos especiais de equações de segunda ordem podem, após uma mudança de variável, ser reduzidas a uma de primeira ordem e assim resolvidas pelos métodos conhecidos.

CASO 1. *Variável Dependente Ausente*: Se na equação  $y$  não estiver presente, fazemos a mudança  $z = y'$  e assim obtemos uma equação de 1a. ordem.

Exemplo: Considere a equação  $xy'' - y' = 3x^2$ . Se  $z = y'$ , então temos a equação  $xz' - z = 3x^2$ .

(a) Resolva por esse método as equações:

(1)  $xy'' - y' = 3x^2$    (2)  $xy'' = y' + (y')^3$    (3)  $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$    (4)  $x^2y'' + xy' = 1$ .

CASO 2. *Variável Independente Ausente*: Se a variável  $x$  não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente  $u$ , fazendo  $u = y' = \frac{dy}{dx}$ , e temos então que  $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$  e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de 1a. ordem.

Exemplo: Para a equação  $y'' + y = 0$  obtemos  $u \frac{du}{dy} + y = 0$  e  $u = \frac{dy}{dx}$ .

(b) Resolva por esse método as seguintes equações:

$$(1) y'' + 4y = 0 \quad (2) y'' - 9y = 0 \quad (3) yy'' + (y')^2 = 0 \quad (4) yy'' = y^2 y' + (y')^2.$$

(c) Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:

(1)  $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0$ ;  $y'(1) = 0$ ;  $y(1) = 1$ . O que acontece com a solução com condições iniciais  $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ?

$$(2) yy'' = y^2 y' + (y')^2; y(0) = -\frac{1}{2}; y'(0) = 1.$$

(2) Em cada um dos itens abaixo, verifique que a função  $y_1$  dada é uma solução da equação dada e encontre, a partir de  $y_1$ , outra solução  $y_2$  da mesma equação, de forma que o conjunto  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  seja linearmente independente. Mostre que o conjunto obtido é linearmente independente:

$$\begin{aligned} (1) x^2 y'' + xy' - 4y &= 0, & y_1 &= x^2; \\ (2) (1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y &= 0, & y_1 &= x; \\ (3) y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y &= 0, & y_1 &= x; \\ (4) x^2 y'' + 2xy' - 2y &= 0, & y_1 &= x; \\ (5) xy'' + 3y' &= 0, & y_1 &= 1; \\ (6) x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y &= 0, & y_1 &= x^{-\frac{1}{2}}; \\ (7) xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y &= 0, & y_1 &= e^x. \end{aligned}$$

(3) Determine a solução geral das equações:

$$(1) y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0 \quad (2) y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0.$$

(5) Determine todas as soluções das equações:

$$\begin{aligned} (1) y'' + 2y' + y &= 0 & (2) y'' - 4y' + 4y &= 0 & (3) y''' - y'' + y' - y &= 0 \\ (4) 2y'' - 4y' + 8y &= 0 & (5) y'' - 9y' + 20y &= 0 & (6) 2y'' + 2y' + 3y &= 0 \\ (7) y''' - 3y'' + 3y' - y &= 0 & (8) \frac{d^4 y}{dx^4} + y &= 0 & (9) \frac{d^5 y}{dx^5} + 2\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

(6) Uma equação linear da forma  $x^2 y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais, é chamada *equação de Euler* de segunda ordem. Mostre que a mudança de variável  $x = e^z$  se  $x > 0$  (e  $x = -e^z$  se  $x < 0$ ) transforma a equação de Euler em uma equação linear de coeficientes constantes. Aplique esta técnica para determinar a solução geral das equações:

$$\begin{aligned} (1) x^2 y'' + xy' + y &= 0 & (2) x^2 y'' - 3xy' + 4y &= 0 & (3) x^2 y'' + 3xy' + 10y &= 0 \\ (4) 2x^2 y'' + 10xy' + 3y &= 0 & (5) x^2 y'' + 2xy' - 12y &= 0 \end{aligned}$$

(7) Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções de  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$  e de  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$  respectivamente, mostre que  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  é solução de  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$  (Princípio de Superposição). Use este fato para resolver:

$$\begin{aligned} (1) y'' + 3y' + 2y &= e^x + e^{2x} & (2) y'' + y' - 6y &= \operatorname{sen} x + xe^{2x} & (3) y'' + 2y' &= 1 + x^2 + e^{-2x} \\ (4) y'' + y' - 2y &= 6e^{-x} + 4 & (5) y'' + y &= \cos x + 8x^2 \end{aligned}$$

(8) Resolva.

$$\text{a) } xy'' - y' = 3x^2 \quad \text{b) } x^2 y'' + xy' - y = x^2 \quad \text{c) } y''' + y' = \sec x.$$

(9) Determine a solução geral das seguintes equações:

$$\begin{aligned} (1) y'' + 2y' + y &= e^{-x} \ln x & (2) y'' - 2y' - 3y &= 64xe^{-x} \\ (3) y'' + 2y' + 5y &= e^{-x} \sec 2x & (4) y'' - 2y' &= 12x - 10 \\ (5) y'' + y &= 2 \cos x & (6) (x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y &= (x^2 - 1)^2 \\ (7) (x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y - (2 + x)y &= x(x + 1)^2 & (8) y'' + 4y &= 3 \sin x \\ (9) y'' + 10y' + 25y &= 14e^{-5x} & (10) y'' - 4y &= x^2 e^{2x} \\ (11) y'' + y' - 2y &= 8 \sin x & (12) y'' - 3y' &= x + \cos x \\ (13) \frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} &= x^3 & (14) y''' - y &= x^3 - 1 \\ (15) y'' - 2y &= 2e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

(10) Ache a solução geral da equação diferencial dada, em série de potências centradas em 0.

$$(1) y'' - xy' - y = 0 \quad (2) y'' - x^2 y = 0 \quad (3) y'' + 2xy' + 4y = 0$$

(11) (i) Uma equação diferencial da forma  $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ , onde  $p$  é um número real fixado, é chamada *equação de Bessel* de ordem  $p$ .

(a) Se  $p = 0$ , mostre que  $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$  e  $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$  são soluções LI da equação de Bessel.

(b) Se  $p = 1$  mostre que  $y = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2! 3!} - \frac{x^6}{2^6 2! 3! 4!} + \dots\right)$  é solução.

(ii) A equação diferencial  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , é chamada *equação de Legendre*. Mostre que

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\dots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

e

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

são soluções independentes da equação de Legendre, no intervalo  $|x| < 1$ .

(12) Discutir o comportamento das soluções das equações seguintes, e sua interpretação física:

a) Equação homogênea de mola:

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = 0, \quad (\mu \geq 0).$$

b) Equação da mola com segundo membro periódico, sem atrito

$$x'' + \alpha^2 x = \beta \sin(\omega t)$$

c) Equação da mola com segundo membro periódico, com atrito

$$x'' + 2\mu x' + \alpha^2 x = \beta \sin(\omega t) \quad (\mu \geq 0).$$

## RESPOSTAS - Parte B

(1) Respostas (a)

$$(1) y(x) = x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2 \quad (2) y(x) = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2x^2} + C_2$$

$$(3) y(x) = -\frac{x^2}{2} - C_1x - C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2 \quad (4) y(x) = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln|x| + C_2$$

$$(b) \quad (1) y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \quad (2) y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

$$(3) y^2 = C_1x + C_2 \quad (4) y = C_2(C_1 + y)e^x$$

$$(2) \text{ Respostas: } (1) y_2 = C_1x^2 + C_2x^{-2} \quad (3) y_2 = C_1x + C_2e^x \quad (5) y_2 = C_1 + C_2x^{-2} \quad (7) y^2 = C_1e^x + C_2e^xx^2.$$

$$(3) \text{ Respostas: } (1) y(x) = C_1x + C_2x - \int x^{-2}e^{\int x} f(x)dx \quad (2) y(x) = C_1e^x + C_2e^x \int e^{-2x} \int f(x)dx dx.$$

(5) Respostas

$$(1) y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

$$(2) y(x) = C_2e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

$$(3) y(x) = C_1e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

$$(4) y(x) = e^x(C_1 \sin \sqrt{3}x + C_2 \cos \sqrt{3}x)$$

$$(5) y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}$$

$$(6) y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

$$(7) y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$$

$$(8) y(x) = C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$(9) y(x) = C_1 + (C_2 + C_4x) \cos x + (C_3 + C_5x) \sin x$$

(6) Respostas

$$(1) y(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + 1 \quad (2) y(x) = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$$

$$(3) y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(\ln x^3) + C_2 \sin(\ln x^3)] \quad (4) y(x) = C_1x^{-1+\frac{\sqrt{10}}{2}} + C_2x^{-1-\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$(5) y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-4}$$

(7) Respostas (1)  $y(x) = \frac{e^x}{6} + \frac{e^{2x}}{12} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

(2)  $y(x) = -\frac{1}{50} \cos x - \frac{7}{50} \sin x + (\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{1}{125} + C_1)e^{2x} + C_2 e^{-3x}$

(3)  $y(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{x^3}{6} + (C_2 - \frac{1}{2}x)e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} + C_1$

(4)  $y(x) = -3e^{-x} - 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

(5)  $y(x) = (\frac{1}{2}x + C_1) \sin x + C_2 \cos x + 8x^2 - 16.$

(8) Respostas

a)  $A + Bx^2 + x$       b)  $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$

c)  $y = A + B \sin x + C \cos x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + \sin x \ln |\cos x| - x \cos x.$

(9) Respostas (1)  $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \ln x - \frac{3}{4}x^2 e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

(2)  $y(x) = -e^{-x}(8x^2 + 4x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

(3)  $y(x) = \frac{1}{2}x e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{4}e^{-x} \cos 2x + C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$

(4)  $y(x) = -3x^2 + 2x + 1 + C_1 + C_2 e^{2x}$

(5)  $y(x) = x \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$

(6)  $y(x) = C_1 x + C_2(x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$

(7)  $y(x) = C_1 e^x + C_2 x^{-1} - x - \frac{x^2}{3}$

(8)  $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin x$

(9)  $y(x) = e^{-5x}(7x^2 + C_1 x + C_2)$

(10)  $y(x) = e^{2x}(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} - \frac{1}{128} + C_1) + C_2 e^{-2x}$

(11)  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3 \sin 2x + \cos 2x)$

(12)  $y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3 \sin x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$

(13)  $y(x) = C_1 + C_2 x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + (C_3 + C_4 x)e^x$

(14)  $y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^3 - 5$

(15)  $y(x) = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^x \sin x.$

(10) Respostas

(1)  $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(2)  $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n(n-1)(4n-4)(4n-5)\dots 4.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)\dots 5.4}$

(3)  $y = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$