MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2o. Semestre de 2010 - Lista Complementar de Exercícios

1. Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-4)^{2n}$ l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$

2. É conhecido que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma série de potências, $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = L$ então o raio de convergência R da série é dado por $R = 1/L$. Ache o raio de convergência para as séries seguintes e comente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{2n!}{(n!)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{2n!}{(n!)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{2n!}{(n!)^2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} \frac{n!}{n^n}$.

3. Determine o intervalo de convergência de:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, com $b > a > 0$.

4. Examine a convergência das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

5. Usando o teste da integral, verifique a convergência das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^2}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3}$.

6. Para quais valores de $\alpha > 0$ a série é convergente?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n^\alpha}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^3\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4+\frac{1}{n^{2\alpha}}}-2\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n^\alpha}-1)$.

7. Seja a_n definida por $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{2^j} \\ a_{2j+1} = \frac{(-1)}{j} \end{cases}$.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é alternada? A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

8. Seja a_n dada por $\begin{cases} a_{2j} = \frac{1}{j^3} \\ a_{2j+1} = -\frac{1}{j^2} \end{cases}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é alternada? A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge? A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verifica o Critério de Leibnitz?

9. Seja b_k definida por $\begin{cases} b_{2j} = \frac{1}{j} \\ \\ b_{2j+1} = \frac{-1}{j^3} \end{cases}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge?

10. Para quais valores de $k \in \mathbb{N}$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ é convergente?

11. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n 8^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n(-3)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$.

12. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e seja R seu raio de convergência. Mostre que

(a) Se existe $\beta > 0$ tal que $|a_n| \leq \beta$, para todo $n \geq 0$, então $R \geq 1$.
(b) Se existe $\alpha > 0$ tal que $|a_n| \geq \alpha$, para todo $n \geq 0$, então $R \leq 1$.
(c) Se existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \leq |a_n| \leq \beta$, para todo $n \geq 0$, então $R = 1$.
(d) Se $|a_n| \leq \frac{1}{3^n}$, para todo $n \geq 0$, então $R \geq 3$.

13. Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} x^n$.

Lista Complementar - Respostas

1. a) $]-4, 4[$; b) $\{0\}$; c) $[-1, 1]$; d) $\{0\}$; e) $]2, 8]$; f) $[-2, 0]$; g) $\mathbb{R}$; h) $]0, 2e[$;
i) $]-3-e, -e+e[$; j) $[2, 4]$; k) $]2, 6[$; l) $[-1, 1]$; m) $]-1, 1[$; n) $[-4/3, 4/3[$.

2. a) $R = 1/4$; b) $R = 1/2$; c) $R = 1$; d) $R = e$; e) $R = \sqrt[3]{e}$; f) $R = 1$.

3. a) $]-1, 1[$; b) $]-5/3, 5/3[$; c) $]-3/2, 3/2[$; d) $[-1, 1[$; e) $]-b-1, b-1[$.

4. a) diverge; b) diverge; c) converge; d) converge; e) converge; f) converge; g) converge.

5. a) converge; b) diverge; c) converge; d) converge; e) converge.

6. a) $\alpha > 1/2$; b) $\alpha > 1/3$; c) $\alpha > 1/2$; d) $\alpha > 1$.

7. Não. Não.

8. Não. Sim. Não.

9. Não.

10. $k \geq 2$.

11. a) converge; b) diverge; c) converge; d) diverge.

12. Compare com a série geométrica conveniente.

13. a) $R = 1$ e $I =]-1, 1[$; b) $R = 2$ e $I =]-2, 2[$.