MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2o. Semestre de 2012 - 1a. Lista de exercícios: Sequências e Séries Numéricas

(I) Uma demonstração de que o limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \le a < b$, então

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n.$$

b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \le a < b$.

c) Use $a = 1 + 1/(n+1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte b) para demonstrar que $\{a_n\}$ é crescente.

d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Use as partes c) e d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(II) Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$

3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots$

4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

5) $c_k = \frac{\sqrt{k}+1}{k-1}$, $k \ge 2$

6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$

7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$

11) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

12) $a_n = \sin n$; $b_n = \sin(n\pi)$; $c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

13) $a_n = \frac{2n + \sin n}{5n+1}$

14) $a_n = \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

16) $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

17) $a_n = \frac{3^n}{2^n + 10^n}$

18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$

21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

22) $a_n = n - n^2 \sin\frac{1}{n}$

23) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

24) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ onde $0 < a < b$

25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$

26) $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

27) $a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$

28) $a_n = \sqrt[n]{n}$

29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

30) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}$, $a > 0$

31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$

33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$

37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$

38) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

(III) Verifique que existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ se:

1) $a_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$ 2) $a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}$.

(IV) 1) Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to A$ uma função contínua em A e $a \in A$. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência definida por: $a_0 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \ge 0$. Suponha que $\{a_n\}$ converge para a. Prove que $f(a) = a$.

2) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

3) Mostre que a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... converge para 2.

(V) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências:

1) $s_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3}$ 2) $s_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{e^r}$ 3) $s_n = \sum_{r=3}^{n} \frac{1}{\ln r}$

4) $a_n = \frac{2.4.6....(2n)}{1.3.5....(2n-1)}$ 5) $a_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$.

Calcule o limite nos casos 2) e 5).

(VI) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n\right)$ 2) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ t^{\frac{k}{2}}$ para $0 < t < 1$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n)$ para $|u| < 1$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ para $|x| < 1$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x$ para $|x| < \frac{\pi}{2}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}\right)$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sin k}$

10) $\sum_{s=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{s}\right)$ 11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos\ k}{k}$

(VII) É convergente ou divergente? Justifique.

1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{arctg}\ n}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda}$, $\lambda > 0$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\ \sqrt[5]{n^3+5}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ 10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ 11) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$, $p > 0$

13) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$, $p > 0$ 14) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$

17) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k}$ 18) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

(VIII) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ 4) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ 7) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^p}$, $p > 0$ 10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

(IX) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

1) $1,\overline{29}$ 2) $0,3\overline{117}$.

(X) Para cada n, seja a_n um dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

é convergente.

(XI) Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

(XII) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

(XIII) Verifique as relações 1) e 2) abaixo e use-as para calcular as somas 3) - 7):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) - f(1)$, se o limite existir.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \lim\limits_{n\to\infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1)$, se o limite existir.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ \dots\ (n+k)}$, $(k \geq 2)$

(XIV) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries convergem.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1 + x^n)$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$ 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$ 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$

RESPOSTAS

(II) Respostas

1) converge para 1	2) diverge	3) diverge
4) converge para 2	5) converge para 0	6) converge para $\frac{1}{4}$
7) converge para 0	8) converge para 1	9) converge para $\frac{3}{2}$
10) converge para $\frac{1}{2}$	11) converge para 0	12) a_n e c_n divergem ; $b_n \to 0$
13) converge para $\frac{2}{5}$	14) converge para 0	15) converge para 1
16) converge para 0	17) converge para 0	18) converge para e
19) converge para 0	20) converge para 0 se $\lvert a\rvert < 1$	21) converge para 0
22) converge para 0	23) diverge	24) converge para b
25) converge para 0	26) converge para $\frac{1}{2}$	27) converge para 0
28) converge para 1	29) converge para 0, $\alpha \in \mathbb{R}$	30) converge para 0
31) diverge	32) converge para 1	33) $1/e$
34) diverge	35) 1	36) 0
37) exp(22/15)	38) 1	

(IV) 1) 2 3) 2.

(V) 1) converge, 2) converge para $\frac{1}{e-1}$, 3) diverge, 4) diverge (Dica: calcular $\ln a_n$), 5) converge para 0 (Dica: calcular $\ln a_n$).

(VI) 1) diverge, 2) $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$, 3) $\frac{2+u}{1-u^2}$, 4) $\frac{1}{1+x^2}$, 5) $\frac{1}{1-\sin^2 x}$, 6) diverge, 7) diverge, 8) diverge, 9) diverge, 10) diverge, 11) diverge.

(VII) 1) diverge, 2) converge, 3) converge, 4) converge, 5) diverge, 6) diverge, 7) converge, 8) converge, 9) converge, 10) converge, 11) converge, 12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 14) diverge, 15) diverge, 16) diverge, 17) converge, 18) diverge, 19) diverge.

(VIII) 1) converge condicionalmente, 2) converge absolutamente, 3) converge condicionalmente, 4) converge condicionalmente, 5) converge condicionalmente, 6) converge absolutamente, 7) diverge, 8) diverge, 9) converge absolutamente se $p > 1$ e converge condicionalmente se $p \leq 1$, 10) converge absolutamente, 11) converge condicionamente.

(XII) $2s - a_1$.

(XIII) 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) $\sin(1)$ 6) converge para 1; 7) converge para $\frac{1}{k!(k-1)}$

(XIV) 1) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 2) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 3) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, 4) $\{x = 0\}$,
5) $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$, 6) $\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, 7) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.