

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2o. Semestre de 2010 - 2a. Lista de exercícios: Séries de Potências e Séries de Fourier

1. Usando derivação e integração termo a termo, calcular as somas das séries.

- | | |
|--|---|
| a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ | b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ |
| c) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ | d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ |
| e) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ | f) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$ |
| g) $x + 2x^3 + 3x^5 + \dots + nx^{2n-1} + \dots$ | h) $\frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \dots$ |
| i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$ | j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \dots$ |
| k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \dots$ | l) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots$ |

2. Mediante o uso das somas das séries obtidas no exercício 1, calcule:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)}.$

3. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

a) $\frac{1}{(1+x)^2}$ b) $\frac{1}{(1+x)^3}$

c) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$

4. Verifique que

a) $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$ b) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$

5. Determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

a) $\frac{1}{(1+x)^2}$ b) $\frac{1}{(1+x)^3}$ c) $\frac{2x}{1+x^4}$ d) $\ln(1+x)$ e) $\ln \left(\frac{1}{1+3x^2} \right)$ f) $\frac{x}{1+x-2x^2}.$

6. Verifique que

a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$ b) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
 c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$ d) $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$
 e) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$

7. Utilizando as séries desenvolvidas no exercício anterior, obtenha um valor aproximado de

- (a) e , com erro inferior a 10^{-5} (b) $\sin 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}
 (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5} (d) $\operatorname{arctg}(1/2)$ e $\operatorname{arctg}(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}
 (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}

(Para (e), use $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) + \operatorname{arctg}(\frac{1}{3})$, que segue imediatamente de $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y)}{1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}.$

8. Utilizando série de Taylor calcule $\frac{d^{320} \operatorname{arctg}}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321} \operatorname{arctg}}{dx^{321}}(0).$

9. Pode-se também tratar de séries de números complexos de modo análogo ao caso real. E então, para todo $z \in \mathbb{C}$, define-se $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Mostre que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência
- a) $x^2 e^x$ b) $\cos \sqrt{x}$ c) $\sin(x^2)$ d) $\cos^2 x$
11. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência, e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-6} :

a) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ c) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ d) $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$

12. Estimar com erro $\varepsilon < 10^{-3}$. Justifique.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/2}}$

13. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$

Séries de Fourier

14. Ache a série de Fourier das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

a) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \leq 0 \\ b, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

c) $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi$ d) $f(x) = e^{ax}, -\pi < x \leq \pi, a \neq 0$

e) $f(x) = \sin(ax), -\pi < x \leq \pi, a \notin \mathbb{Z}$ f) $f(x) = ax + b, -\pi < x \leq \pi$

g) $f(x) = |\cos x|, -\pi < x \leq \pi$

15. Ache a série de Fourier de senos e de cossenos das funções abaixo, determine sua soma e faça os gráficos:

a) $f(x) = ax, 0 \leq x \leq \pi$ b) $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = ax + b, 0 \leq x \leq \pi$ d) $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$

e) $f(x) = |\cos x|, 0 \leq x \leq \pi$

16. Mostre que

a) $1 = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots), 0 < x < \pi;$

b) $\pi - x = 2(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots), 0 < x < \pi;$

c) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots), -\pi < x < \pi$

d) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - (\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots), 0 < x < \pi$

e) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots), 0 < x < \pi$

17. Verifique as seguintes igualdades, usando o exercício anterior

a) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$ b) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

c) $\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ d) $\frac{3\pi^3}{128} \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots$

e) $\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\sqrt{2} + \frac{1}{9}\sqrt{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\sqrt{2} - \frac{1}{13}\sqrt{2} - \dots$

18. Calcule a soma das séries

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

19. Determine c_1, c_2, c_3 de modo que as integrais abaixo assumam o menor valor possível:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} [x - c_1 \sin x - c_2 \sin 2x - c_3 \sin 3x]^2 dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - c_1]^2 dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} [|\cos x| - c_1 - c_2 \sin x - c_3 \cos x]^2 dx$

20. Ache a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 1 e que satisfaz $f(x) = x^2$ se $0 \leq x < 1$. Qual a soma de série quando $x = 999/2$? E quando $x = 999$?
21. a) Ache a série de Fourier da função ímpar $f(x)$, periódica de período 4, e que satisfaz $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(2-x) = f(x)$ se $0 \leq x < 1$.
- b) Encontre b_1, b_2, b_3, \dots tais que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = x$ se $0 < x < 1$ $f(2-x) = f(x); 0 < x < 1$
- c) Encontre c_1, c_2, c_3, \dots tais que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) = 1-x$ se $0 < x < 1$ $f(2-x) = f(x); 0 < x < 1$
- d) Quanto vale a soma de série do item c) quando $x = 200$? E quando $x = 201$?
22. Ache constantes a e b tais que a série de senos de $f(x) = x^3 + ax$ em $[0, \pi]$ seja da forma

$$b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

23. Usando a fórmula de Parseval prove que

$$(a) \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (b) \frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

24. Calcule

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

25. (Questão de prova)

(a) Dê fórmulas para as constantes $a_n, n \geq 0, b_n, n \geq 1$, tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = x^2 \cdot e^x, \quad -\pi < x < \pi$$

(b) Determine a soma da série para $x = \frac{11\pi}{2}$ e para $x = 11\pi$.

26. (Questão de prova) Encontre constantes a_0, a_1, \dots, a_n que minimizem a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right]^2 dx.$$

Respostas

1. a) $-\ln(1-x)$ b) $\ln(1+x)$ c) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ d) $\arctg x$ e) $\frac{1}{(1-x)^2}$ f) $\frac{x}{(1-x)^2}$
- g) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$ h) $(1+x) \ln(1+x) - x$ i) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ j) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$ k) $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$ l) $\frac{-1}{4} \ln(1-x^4)$.
2. $\ln 2; \frac{3}{128}; \frac{6}{5} \ln \frac{6}{5} - \frac{1}{5}$.
3. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad -1 < x < 1$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n, \quad -1 < x < 1$.

5. .

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n, -1 < x < 1$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n, -1 < x < 1$
(c) $2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} \right), -1 < x < 1$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{2n}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n 2^n}{3} \right) x^n, \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$

8. 0 e (320)!.

10. .

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}, x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}, x \geq 0$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$ (d) $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$

11. .

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, x \in \mathbb{R}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, -1 < x \leq 1$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$

12. a) $k \geq 23$ b) $k \geq 20$

13. (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6!}$, se $\alpha = 6$; 0, se $\alpha < 6$; ∞ , se $\alpha > 6$
(e) $-\frac{1}{7!}$, se $\alpha = 7$; 0, se $\alpha < 7$; ∞ , se $\alpha > 7$

14. .

- (a) $\frac{a+b}{2} + \frac{2}{\pi}(b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$.
soma: a , se $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$; b , se $2k\pi < x < (2k+1)\pi$; $\frac{a+b}{2}$, se $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
(b) $\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2}{\pi}(a-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} - (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}$.
soma: ax , se $(2k-1)\pi < x \leq 2k\pi$; bx , se $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$; $\frac{b-a}{2}\pi$, se $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(c) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$
soma: $|x|$, se $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.
(d) $\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} (a \cos(nx) - n \sin(nx))$.
soma: e^{ax} , se $-\pi < x < \pi$; $\cosh(a\pi)$ se $x = \pm\pi$, e a sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$
(e) $\frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2-a^2} \sin(nx)$
soma: $\sin(ax)$, para $-\pi < x < \pi$; 0 para $x = \pm\pi$ e a sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.
(f) $b + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$.
soma: $ax + b$, para $-\pi < x < \pi$; b , para $x = \pm\pi$, e sua extensão periódica, para $x \in \mathbb{R}$.
(g) $\frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \right)$
soma: $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

15. .

- (a) $2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$
soma: ax , para $-\pi < x < \pi$; 0 para $x = \pm\pi$, e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.
 $\frac{a}{2}\pi - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$,
soma: $a|x|$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.
(b) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$.
soma: x^2 para $0 \leq x < \pi$; $-x^2$, para $-\pi \leq x \leq 0$; 0 para $x = \pm\pi$ e sua extensão
periódica para $x \in \mathbb{R}$
 $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$.
soma: x^2 , para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (b - (a\pi + b)(-1)^n) \sin(nx).$

soma : $ax - b$, para $-\pi < x \leq 0$; $ax + b$, para $0 < x < \pi$, 0, para $x = \pm\pi$, 0 e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a\pi}{2} + b - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

soma : $a|x| + b$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica de $a|x| + b$ para $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\sin x$,

soma : $\sin x$, para $x \in \mathbb{R}$;

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma : $|\sin x|$ para $x \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{e}{\pi} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1+(-1)^n}{\pi n(n-1)} \sin((2n-1)x),$

soma : $-|\cos x|$ para $x \leq 0$ e $|\cos x|$ para $x \geq 0$, $x \neq k\pi$ e 0 para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma : $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

17. .

(a) usar 12a) em $x_0 = \pi/2$

(b) usar 12c) em $x_0 = \pi$

(c) usar 12e) em $x_0 = \pi/2$

(d) usar 13e) em $x_0 = \pi/4$

(e) usar 13b) em $x_0 = \pi/4$

18. (a) $\frac{\pi^2}{8}$

b) $\frac{\pi^2}{12}$

19. .

(a) $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $x_3 = \frac{2}{3}$

(b) $c_1 = \frac{2\pi^2}{3}$

(c) $c_1 = \frac{4}{\pi}$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

20. $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) - \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right)$ $S(999) = 0$ e $S(999/2) = (1/2)$.

21. .

(a) $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$

(b) $b_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)}}{(2n-1)^2}$ para $n \geq 1$.

(c) $c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^n 8}{(2n-1)^2 \pi^2}$, para $n \geq 1$. (d) $S(200) = S(0) = 0$; $S(201) = S(1) = 0$

22. $\mathbb{Q} = -\pi^2$, $b = 12$

23. (a) Use $f(x) = x^3$

(b) Use exercício 22.

24. (a) $\frac{\pi^4}{96}$

(b) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.