INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
MAT-0111 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (INSTITUTO DE FÍSICA)
PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS - PROFESSOR: ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

1. LIMITES DE FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

1. Calcule, quando existirem, os limites abaixo:

a. $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ **c.** $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to1/2}\frac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$ **e.** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^4+1}-1}{x^4}$ **f.** $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 20x}{\sin 301x}$ **h.** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 2x)}{x}$ **i.** $\displaystyle\lim_{x\to0}\tan(3x)\,\mathrm{cossec}(6x)$

j. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ **k.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ **l.** $\displaystyle\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$ **n.** $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x^3-x^2}$ **o.** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^3(x)\sin\left(\frac1x\right)}{x^2}$

p. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$ **q.** $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}$ **r.** $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{\sin(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$

s. $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ **t.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ **u.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$

v. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$ **w.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ **x.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4-1}$

y. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$ **z.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+9}+x+3$ **α.** $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2x)\sin(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

β. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x\cos\sqrt{x}}{x^4\sin\left(\frac1x\right)+1}$ **γ.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sin x+\sqrt{x}\cos x\right)}{x\sqrt{x}-\sin\left(x\sqrt{x}\right)}$ **δ.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$

ϵ. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ **ζ.** $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{x^2-1}$ **η.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x+2x^2\sin\left(\frac1x\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

2. A resolução abaixo está incorreta. Indique onde ocorrem os erros e então calcule o limite corretamente.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac1x\right)}-x\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac1x}_{\to0}}-1\right)}_{\to0}\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\cdot0=0\end{aligned}$$

3. Sejam $c, L\in\mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2x^3+cx+c}{x^2-1}=L$. Determine c e L.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

a. Supondo que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}$.

b. Supondo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

c. Supondo que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

5. Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

a. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao funções tais que f é limitada e positiva e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x\to +\infty} f(x)g(x) = +\infty$.

b. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao funções tais que f é limitada e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim_{x\to +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$.

c. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao funções tais que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim_{x\to +\infty} f(x) - g(x) = +\infty$.

6. Dê exemplos de funções f e g tais que

a. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

b. $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) - g(x) = 1$;

c. $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 0$ e $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

d. $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) \neq 0$.

7. Mostre que se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e g é limitada então $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 2|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x}$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $1 + x^2 + \frac{x^6}{6} \leq f(x) \leq \sec x^2 + \frac{x^6}{3}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x) \cos\left(\frac{1}{x^2+x}\right)$.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\sin x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\sin(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) + \cos x$.

11. Sejam C o círculo de raio 1 e centro em $(1, 0)$ e C_r o círculo de raio r, $0 < r < 2$, e centro em $(0, 0)$. Sejam ainda P_r o ponto $(0, r)$ e Q_r o ponto de interseção dos círculos C e C_r situado no primeiro quadrante.

Se L_r é a interseção da reta P_rQ_r com o eixo Ox, o que acontecerá com L_r, quando C_r encolher arbitrariamente?

2. Continuidade de Funções

Exercícios

1. Determine, se existir, o valor de $L \in \mathbb{R}$ para que cada uma das funções abaixo sejam contínuas.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+2) - \sin(x+2)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ **b.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ L, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

2. Determine os pontos de continuidade de cada uma das funções abaixo.

a. $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2-4)+5, \text{ se } x>2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, \text{ se } x<2 \\ 5, x=2. \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3}, \text{ se } x \neq 3 \\ 1, \text{ se } x=3. \end{cases}$

c. $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2} \sin(\pi x)$

d. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \text{ é irracional e } 0<x<1, \\ \frac{1}{q}, \text{ se } x = \frac{p}{q}, \text{com } \mathrm{mdc}(p,q)=1. \end{cases}$

Obs.: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

3. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é continua e bijetora, então sua inversa também é contínua. O que acontece se I não é um intervalo?

4. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua em um único ponto.

5. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua somente em dois pontos.

---

3. Derivadas

Exercícios

1. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, $a \in I$ e $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \geq a, \\ g(x), \text{ se } x<a. \end{cases}$

Mostre que h é derivável em a se e somente se $f(a)=g(a)$ e $f'(a)=g'(a)$. Construa contra-exemplos removendo uma das condições de cada vez.

2. Verifique se cada uma das funções abaixo é contínua e se é derivável no ponto x_0 indicado.

a. $f(x) = \begin{cases} (x^2+x)\cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x=0 \end{cases}$, $x_0 =$ 0;

b. $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x=0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x=0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

d. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ se } x=0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

3. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável num único ponto.

4. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3+x)^2 - \tan 9}{x}$.

5. Calcule $f'(0)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(0)=g'(0)=0.$$

6. Explicite as derivadas de **a.** $f(x)=\tan x$; **b.** $f(x)=\cot x$; **c.** $f(x)=\sec x$; **d.** $f(x)=\operatorname{cosec} x$

7. Derive:

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{4x-x^4}{(x^3+2)^{2015}}$

c. $f(x) = x\sin\left(\sqrt[3]{x^5-x^2}\right)$

d. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4+\tan^2(x)+1)^2}$

e. $f(x) = \sec(\tan x)$

f. $f(x) = x(\sin x)(\cos x)$

g. $f(x) = \dfrac{(x+a)^5}{x^5-b^5}$

h. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x-\operatorname{sen} x)}$

i. $f(x) = \cot(3x^2+5)$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$.

9. Sabendo-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in]0, +\infty[$, calcule $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ em termos de $f'(a)$.

10. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule $f'(0)$ em caso afirmativo.

11. Decida em que pontos as funções a seguire são deriváveis.
a. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$; **b.** $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$.

12. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente derivável em $X_0 = 0$). A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x_0 = 0$? Exiba $h'(0)$ em caso afirmativo.

13. Responda, justificando:
a. Se $f + g$ é derivável em x_0, é verdade que necessariamente que f e g também são deriváveis em x_0?
b. Se $f \cdot g$ é derivável em x_0, quais condições sobre f garantem diferenciabilidade de g em x_0?

14. Prove que:
a. Se f é derivável em x_0 então $|f(x)|$ é derivável em x_0, desde que $f(x_0) \neq 0$. Dê contra-exemplo no caso em que $f(x_0) = 0$.
b. Se f, g são duas funções deriváveis em x_0 então as funções $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ são deriváveis em x_0, desde que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dê contra-exemplo no caso em que $f(x_0) = g(x_0)$.

15. Encontre uma função $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ quando
a. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
b. $f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_k}{x^k}$.
c. Ache mais uma g para cada um dos itens acima.
d. Existe alguma função da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x^1} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots + \frac{b_k}{x^k}$$

tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$? Justifique.

16. Dizemos que x_0 é uma *raiz dupla* de uma função polinomial f se $f(x) = (x - x_0)^2 g(x)$, para alguma outra função polinomial g.
a. Mostre que x_0 é raiz dupla de f se e somente se x_0 é raiz tanto de f quanto de f'.
b. Quando $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem raiz dupla? Interprete geometricamente.

17. Seja f uma função derivável em x_0 e considere a função $d(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Calcule $d(a)$ e $d'(a)$.

18. Suponha que $f(x) = xg(x)$, onde g é uma função contínua em $x_0 = 0$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule $f'(0)$ em termos de g.

19. Suponha que f é uma função derivável em $x_0 = 0$ e que $f(0) = 0$. Mostre que $f(x) = xg(x)$ para alguma função g que é contínua em $x_0 = 0$.

Dica. O que acontece se você tentar escrever $g(x) = \frac{f(x)}{x}$?

20. Prove que é impossível escrever $x = f(x)g(x)$ com f, g deriváveis tais que $f(0) = g(0) = 0$.

Dica. Que tal derivar?

21. Interprete geometricamente os resultados obtidos no exercício 17.

22. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

23. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, $(a \neq 0)$ tem como interseção um ponto que esta numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

24. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo que f é derivável, determine a reta tangente ao grafico de f no ponto $(1, 1)$.

25. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável, onde I é um intervalo aberto contendo $x = -1$. Suponha que $f^3(x) - f^2(x) + xf(x) = 2$, para todo $x \in I$. Encontre $f(-1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\big(-1, f(-1)\big)$.

4. Taxas Relacionadas

Exercícios

1. Um objeto circular varia de tamanho de maneira desconhecida, mas sabe-se que quando seu raio é $6m$, a taxa de variação deste é $4m/s$. Determine a taxa de variação da área do objeto no instante em que seu raio é $6m$.

2. Suponha agora que o objeto circular do exercício 1 é, na verdade, uma seção de um objeto esférico. Determine a taxa de variação do volume do objeto e de sua área, quando no instante em que o raio é $6m$.

Dica. Você pode expressar o volume em termos do raio da esfera, ou então a partir da área

3. A área entre dois círculos concêntricos variáveis é constante igual a $9\pi m^2$. A taxa de variação da área do círculo maior é de $10\pi m^2/s$. Qual a taxa de variação do raio em relação ao tempo do círculo menor quando ele tem área 16π?

4. A partícula A se move ao longo do semi-eixo positivo Ox e a partícula B move-se ao longo do gráfico da função $f(x) = -\sqrt{3}x$, $x \leq 0$. Num certo instante, a partícula A está no ponto $(5, 0)$ e move-se a com velocidade 3 unidades por segundo e a distância de B até a origem é 3 unidades, movendo-se com velocidade 4 unidades por segundo. Qual a taxa de variação da distância entre A e B nesse instante?

5. Num certo instante t_0, a altura de um triangulo cresce à razão $1cm/min$ e sua área aumenta à razão de $2cm^2/min$. No instante t_0, sabendo que sua altura á $10cm$ e sua área é $100cm^2$, qual a taxa de variação em relação ao tempo da base do triângulo?

6. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1.2m$, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081m^3/min$. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

7. Uma lâmpada está acesa no solo a $15m$ de um edifício. Um homem de $1.8m$ de altura anda a partir da luz em direcão ao edifício a $1.2m/s$. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele esta a $12m$ do edifício e quando ele está a $9m$ do edifício.

8. Num motor à combustão, um bastão de $7cm$ tem uma de suas extremidades acoplada a uma manivela cujo raio é de $3cm$. Na outra extremidade do bastão está um pistão que se move quando a manivela gira. Sabendo que a manivela gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 200 rotacões por minuto, calcule a velocidade do pistão quando o ângulo de rotação do disco é $\pi/3$ (medido a partir da posição em que o pistão está mais afastado do disco).

9. Uma escada de $25m$ está encostada na parede de uma casa e sua base se afasta da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a $7m$ da parede e sua velocidade é de $2m/s$.

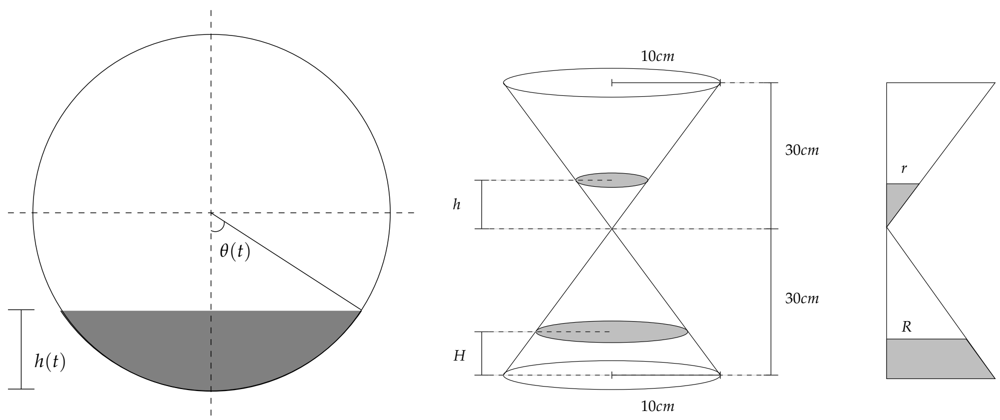
a. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move nesse instante?

b. Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a $7m$ da parede.

c. Calcule a taxa de variação do ângulo formado entre a parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a $7m$ da parede.

10. Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro "deitado" de diâmetro $2m$ e comprimento $3m$. A figura 1a representa uma seçãoo transversal do tanque no instante t. O ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio). No instante em que a altura h do líquido é de $0.5m$, a vazão é de $0.9m^3/min$. Determine a taxa de variação do ângulo θ nesse instante. Determine também a taxa de variação da altura h do neste mesmo instante.

11. Num filtro com formato de cone, como na figura 1b, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é $8cm$, a altura h do líquido da parte superior é $10cm$ e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de $2cm/min$. Calcule a taxa de variacão de H em relação ao tempo nesse instante.



(A) Tanque (B) Filtro

FIGURA 1. Figuras para as questões 10 e 11.

5. Derivadas de Funções Inversas

Exercícios

1. Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua inversa, f^{-1}, também seja derivável. Mostre que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

a. $f(x) = \arctan(x)$; **b.** $f(x) = \arcsin(x)$; **c.** $f(x) = \arccos(x)$.

3. Derive:

a. $f(x) = \cos\big(\arctan(x)\big)$; **b.** $f(x) = \frac{\tan(3x)}{\arctan(3x)}$; **c.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin(x)$; .