# ERRATA – INTRODUÇÃO À GEOMETRIA LORENTZIANA: CURVAS E SUPERFÍCIES

Ivo Terek Couto* Alexandre Lymberopoulos†

Infelizmente é impossível publicar qualquer coisa livre de erros de digitação ou pequenos enganos (que dirá algo com mais de 500 páginas). Neste arquivo vamos registrar (geralmente em vermelho) as correções necessárias para a presente e, possivelmente futuras, edições do livro *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*, volume 21 da Coleção Textos Universitários da SBM. Também gostaríamos de agradecer a Diego Kian e aos alunos do curso de Geometria Diferencial ministrado no IME-USP no segundo semestre de 2021 pelas várias contribuições dadas para esta lista de correções.

## ERRATA PARA A 1ª EDIÇÃO

### Capítulo 1

- **Página 2:** a expressão correta é

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_\nu = x_1y_1 + \cdots + x_{n-\nu}y_{n-\nu} - x_{n-\nu+1}y_{n-\nu+1} - \cdots - x_ny_n.$$

- **Página 7, Definição 1.2.2, item (ii):** "*Dizemos que* $\mathscr{B}$ *é uma base* pseudo-ortogonal *se seus vetores são dois a dois pseudo-ortogonais*". O prefixo "pseudo" será abandonado no futuro, mas ainda deveríamos tê-lo mantido ali.

- **Página 8, no último item da Observação:** A afirmação é verdadeira, mas sua demonstração é feita no Corolário 1.2.33.

- **Página 23, Observação:** "*... dois vetores ortogonais de tipo luz, e linearmente independentes*".

- **Página 29, Exercício 1.2.10:** Os menores principais corretos são 5, 6 e 0. Isto não altera em nada o resto do exercício.

- **Página 35, Proposição 1.3.7:** "*...*$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C_T(\boldsymbol{p})$*...*". Apesar disto, o presente enunciado ainda está correto.

- **Página 37, Observação:** A observação após a Proposição 1.3.8 deveria estar após a Proposição 1.3.13 na página 41 – esta é a proposição anterior a que a observação se refere.

- **Página 41, Definição 1.3.14:** A relação de precedência correta a ser usada no enunciado é $\ll$. Assim, $F$ é um automorfismo causal se

$$\boldsymbol{x} \ll \boldsymbol{y} \iff F(\boldsymbol{x}) \ll F(\boldsymbol{y}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x} \ll \boldsymbol{y} \iff F^{-1}(\boldsymbol{x}) \ll F^{-1}(\boldsymbol{y}).$$

*terekcouto.1@osu.edu
†lymber@ime.usp.br
Atualizada em 21 de dezembro de 2021.

- **Página 41, Observação:** *"... pode-se mostrar que, nesta definição, a preservação de $\ll$ é equivalente a da relação $<$ definida por dizer que $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$ se e somente se $\boldsymbol{q} \in C_L^+(\boldsymbol{p})$., vide Exercício 1.3.10."*.

- **Página 48, Exercício 1.3.10:** O enunciado deve ser totalmente reescrito.

  *Recorde que em $\mathbb{L}^n$ dizemos que $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$ se $\boldsymbol{q} \in C_L^+(\boldsymbol{p})$. As relações $\ll$ e $<$ podem ser expressas uma em termos da outra. Para este problema, dados $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^n$, você pode assumir as seguintes equivalências:*

  - $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} \not\ll \boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{y} \ll \boldsymbol{z}$ *implicam que* $\boldsymbol{x} \ll \boldsymbol{z}$, *qualquer que seja* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{L}^n$.
  - $\boldsymbol{x} \ll \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} \not< \boldsymbol{y}$ *e existe* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{L}^n$ *tal que* $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{z} < \boldsymbol{y}$.

  *Mostre que uma bijeção $F\colon \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^n$ é um automorfismo causal se e somente se $F$ e $F^{-1}$ preservam $<$.*

- **Página 84, Exercício 1.5.2, item (d):** É necessário assumir que $\det M \in \mathbb{S}^1$.

- **Página 92:** *"... se $\boldsymbol{v}$ é de tipo tempo, $\mathscr{B}$ é positiva se $n$ é par, e negativa se $n$ é ímpar."*.

## Capítulo 2

- **Página 123, Exercício 2.1.11, dica para o item (a):** A desigualdade $\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|_E < x_n'(t)$ é estrita.

- **Página 125, Exercício 2.1.17:** Os items (a) e (b) devem ser removidos. No item (d), o domínio correto é $\boldsymbol{\eta}\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$.

- **Página 134, Proposição 2.2.8:** *"... uma curva regular que não é de tipo luz."*.

- **Página 139:** *"componente conexa de $\mathbb{R}^2_\nu$ com os ramos removidos para a qual..."*.

- **Página 146, Exercício 2.2.1, item (b):** A curva é de tipo tempo, portanto as notações adequadas com o parâmetro de tempo próprio são $\boldsymbol{T}_\alpha(\mathrm{t})$ e $\kappa_\alpha(\mathrm{t}) = -\varphi'(\mathrm{t})$.

- **Página 147, Exercício 2.2.4:** O enunciado parece mais limpo assumindo $n \geq 1$ e assim as equações generalizadas corretas são

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}(s) \\ b_{n+1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n'(s) \\ b_n'(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\nu+1}\kappa_\alpha(s) \\ \kappa_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(s) \\ b_n(s) \end{pmatrix}.$$

- **Página 169, Exercício 2.3.7:** O enunciado parece mais limpo assumindo $n \geq 1$ e assim as equações generalizadas corretas são

$$\begin{pmatrix} a_{n+1}(s) \\ b_{n+1}(s) \\ c_{n+1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n'(s) \\ b_n'(s) \\ c_n'(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_\alpha\eta_\alpha\kappa_\alpha(s) & 0 \\ \kappa_\alpha(s) & 0 & (-1)^{\nu+1}\epsilon_\alpha\tau_\alpha(s) \\ 0 & \tau_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(s) \\ b_n(s) \end{pmatrix}.$$

- **Página 179, demonstração do Teorema 2.3.15:** Na terceira linha em display, o correto é $-\epsilon_\alpha\eta_\alpha\kappa_\alpha(s)\boldsymbol{T}_\alpha(s)$.

- **Página 181, demonstração do Teorema 2.3.17:** A segunda expressão em destaque na verdade é $-\epsilon_\alpha\eta_\alpha\kappa_\alpha(s)c + \tau_\alpha(s)\langle \boldsymbol{B}_\alpha(s), \boldsymbol{v}\rangle = 0$ (faltou avaliar a curvatura em $s$).

- **Página 182, final da demonstração:** note que a expressão em destaque

$$v = T_\alpha(s) + \frac{(-1)^\nu}{c}\epsilon_\alpha B_\alpha(s)$$

corresponde a tomar $v_1 = 1$ (provavelmente devíamos ter mencionado isto explicitamente).

- **Página 195:** Faltou avaliar o coeficiente $\lambda$ em $\phi$:

$$T_\alpha(\phi) \times_E N_\alpha(\phi) = \mathrm{Id}_{2,1}\big(T_\alpha(\phi) \times_L N_\alpha(\phi)\big) = \lambda(\phi)\mathrm{Id}_{2,1}T_\alpha(\phi) \implies \cdots$$

- **Página 208, Exercício 2.3.28:** O item (a) deve ser removido.

## Capítulo 3

- **Página 235, Teorema 3.1.28:** *"... então existe $U$ aberto de $M_1$ contendo $p_0$ tal que..."*.

- **Página 239:** A relação correta é

$$\frac{x_u(u,v) \times x_v(u,v)}{\|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|} = \pm\frac{\widetilde{x}_{\widetilde{u}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) \times \widetilde{x}_{\widetilde{v}}(\widetilde{u},\widetilde{v})}{\|\widetilde{x}_{\widetilde{u}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) \times \widetilde{x}_{\widetilde{v}}(\widetilde{u},\widetilde{v})\|}$$

- **Página 284, Exercício 3.2.25:** O aberto $U$ deve ser conexo.

- **Página 285, Exercício 3.2.27:** Corrija o domínio e contradomínio do operador flip para "$\mathfrak{f}\colon \mathbb{L}^2_{(-,+)} \to \mathbb{L}^2_{(+,-)}$" ou "$\mathfrak{f}\colon \mathbb{L}^2_{(+,-)} \to \mathbb{L}^2_{(-,+)}$" (ambas as correções são equivalentes visto que $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{f} = \mathrm{Id}$).

- **Página 290, segunda Observação:** A expressão correta no lado esquerdo, sem abusar notação, é $\langle \mathrm{II}_{x(u,v)}\big(x_i(u,v), x_j(u,v)\big), N(x(u,v))\rangle$.

- **Página 307, demonstração da Proposição 3.4.3:** Uma demonstração mais limpa consiste simplesmente em usar a não-degenerabilidade da Primeira Forma Fundamental com o cálculo $\langle -\mathrm{d}N_p(v), w\rangle = \widetilde{\mathrm{II}}_p(v,w) = \lambda(p)\langle v,w\rangle = \langle \lambda(p)v, w\rangle$.

- **Página 307, Observação:** Esta observação está incorreta. No item (ii) do Teorema 3.4.4, o que decide entre $\mathbb{H}^2(c,r)$ ou $\mathbb{H}^2_-(c,r)$ é a direção do vetor de tipo tempo $p - c$ para algum (e portanto todos, por conexidade e continuidade) $p \in M$. A direção do campo normal de Gauss nada tem a ver com isso (visto que $-N$ é outro campo normal de tipo tempo, com orientação temporal oposta).

- **Página 311, Exemplo 3.4.8:** Para $\mathbb{S}^2_1$ na verdade temos $K = 1$ e $H = -1$, usando o campo normal dado pelos vetores posição.

- **Página 325:** *"Suponha agora que a superfície $M \subseteq \mathbb{R}^3_\nu$ é o gráfico de uma função $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$."*. Não há necessidade de mencionar nenhuma parametrização de Monge aqui.

- **Página 342, Exemplo 3.5.10, item (1):** A parametrização correta é $x(u,v) = (r\cos u, r\,\mathrm{sen}\,u, v)$.

- **Página 349, Exercício 3.5.1, item (b):** *"... onde $m \geq 3$..."*.

- **Página 350, Exercício 3.5.8:** *"...e, quando $(-1)^\nu K(p) \geq 0$,..."* (faltou avaliar a curvatura em $p$).

- **Página 352, Exercício 3.5.13:** A relação correta é $K(\alpha(s)) = (-1)^{\nu+1}\tau_\alpha(s)^2$, sem $\epsilon_M$.

- **Página 354, item (2) do Exemplo 3.6.3:** Quando $\boldsymbol{\alpha}$ tem velocidade unitária, a expressão correta para a derivada covariante é

$$\frac{D\boldsymbol{\alpha}'}{ds}(s) = \boldsymbol{\alpha}''(s) + \epsilon_M \epsilon_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\alpha}(s),$$

com o parâmetro de arco $s$ em todos os termos.

- **Página 355, Exemplo 3.6.7:** A expressão correta para $\boldsymbol{\alpha}''(t)$ é

$$\boldsymbol{\alpha}''(t) = (-ru''(t) \operatorname{sen} u(t), ru''(t)\cos u(t), v''(t)) - ru'(t)^2(\cos u(t), \operatorname{sen} u(t), 0)$$

e portanto

$$\frac{D\boldsymbol{\alpha}'}{dt}(t) = (-ru''(t) \operatorname{sen} u(t), ru''(t)\cos u(t), v''(t)).$$

Isto não altera em nada as conclusões que se seguem.

- **Página 358, demonstração da Proposição 3.6.9:** A primeira linha do último cálculo feito é

$$h''(s) + f(h(s))h'(s)^2 = -\frac{g''(t)}{g'(t)^2} + \frac{f(t)}{g'(t)^2}.$$

- **Página 365, Exercício 3.6.7:** "*... se e somente se o plano osculador de $\boldsymbol{\alpha}$ em $s$ é exatamente o plano tangente $T_{\boldsymbol{\alpha}(s)}M$.*". Não há condições sobre $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$.

- **Página 369, Proposição 3.6.16:** No enunciado, a expressão correta para os Símbolos de Christoffel é:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{2} g^{kr} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right).$$

- **Página 370, Proposição 3.6.16:** "*... donde:*

$$2\langle \boldsymbol{x}_{ij}, \boldsymbol{x}_r \rangle = \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r}$$

*e, finalmente:*

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{2} g^{kr} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right),$$

*como queríamos.*".

- **Página 373, Corolário 3.6.19:** "*... então $\phi \circ \boldsymbol{\alpha} \colon I \to M_2$ é...*".

- **Página 381, demonstração da Proposição 3.6.26:** "*Consideramos então*

$$E(s) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\partial f}{\partial t}(t,s) \right\rangle \mathrm{d}t."$$

- **Página 393, Exercício 3.6.17:** Faltou o índice superior no somatório que define $\boldsymbol{V}(t)$. O correto é

$$\boldsymbol{V}(t) = \sum_{i=1}^{2} a^i(t) \boldsymbol{x}_i(u^1(t), u^2(t)).$$

- **Página 399, Exercício 3.6.26:** A conclusão dada no enunciado é verdadeira, mas a afirmação sobre $M$ não segue do cálculo sugerido, visto que neste caso gostaríamos de considerar variações de $\boldsymbol{\alpha}$ *em* $M$. A segunda variação do funcional energia deve ser calculada seguindo passos análogos aos da demonstração da Proposição 3.6.26 (p. 381).

- **Página 399, Exercício 3.6.28:** A definição correta é $\overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \phi(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.

- **Página 407, após a demonstração da Proposição 3.7.3:** "*... definidos formalmente pela expressão da Proposição 3.6.16:*
$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{2} g^{kr} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right) ."$$

- **Página 410, Proposição 3.7.5:** "*... duas superfícies parametrizadas regulares e não-degeneradas...*".

- **Página 414, Exercício 3.7.4, item (a):** Faltou dizer explicitamente que $\boldsymbol{x}_u(0,0) = (1,0,0)$ e $\boldsymbol{x}_v(0,0) = (0,1,0)$ são assumidos para o problema.

- **Página 415, Exercício 3.7.8, item (b):** A primeira equação de Codazzi-Mainardi deve ser
$$\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} = \frac{E_v}{2E}.$$

## Capítulo 4

- **Página 430, Definição 4.1.9:** "*...os Símbolos de Christoffel de* $\boldsymbol{x}$ *são definidos por*
$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^{2} \frac{1}{2} g^{kr} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right) ."$$

- **Página 444, Exercício 4.1.16, item (b):** Os Símbolos de Christoffel corretos são:
$$\Gamma_{tr}^t = \frac{\mathrm{M}}{r^2 - 2\mathrm{M}r}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{\mathrm{M}}{r^2}\left(1 - \frac{2\mathrm{M}}{r}\right) \quad \text{e} \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{\mathrm{M}}{r}\frac{1}{r - 2\mathrm{M}}.$$
Os restantes se anulam.

- **Página 487, demonstração do Lema 4.3.37:** $f^t = \langle w_{uv}^t, \boldsymbol{N} \rangle_L$.

- **Página 489:** A expressão correta para o Laplaceano é
$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

- **Página 501, demonstração do Teorema 4.3.50:** "*As condições sobre* $U$, $f$ *e* $g$*...*".

- **Página 501, Teorema 4.3.51:** A frase fica mais clara se escrita: "*Sejam* $U \subseteq \mathbb{C}'$ *um aberto que não intercepta o eixo real,* $w_0 \in U$*, e...*".

## *Misprints* gerais, gramática, formatação, etc.

- **Página 6:** Primeira linha, "*... semiplanos determinados...*".
- **Página 18, Exemplo 1.2.19, item (2):** "*... e portanto concluímos...*".
- **Página 43:** "*... donde aplica-se o feito...*".
- **Página 52, nota de rodapé 6:** "*... de funções constitui um grupo, denotado...*".
- **Página 63, demonstração da Proposição 1.4.22:** "*... os quatro representantes principais agem...*".
- **Página 65, Exercício 1.4.2, item (b):** "*... é precisamente $\varphi/2$, conforme indica...*".
- **Página 99, Exercício 1.6.8, dica para o item (b):** "*Proposição 1.6.5 (p. 91).*".
- **Página 103:**
  - "*...em espaços Euclideanos ou Lorentzianos...*";
  - "*... os ambientes Euclideano e Lorentziano simultaneamente, denotaremos...*".
- **Página 104:**
  - "*Inicialmente construímos...*";
  - "*Concluímos o capítulo...*";
  - "*... dos invariantes em cada situação.*";
  - "*... versão do Teorema Fundamental das Curvas (p. 204).*".
- **Página 105:** "*... cujo tipo causal é determinado pelo tipo...*".
- **Página 106, Exemplo 2.1.3, item (2):** Correção de fonte, $\mathbf{p}$ para $\boldsymbol{p}$.
- **Página 116, demonstração do Teorema 2.1.17:** "*... a função comprimento de arco...*".
- **Página 119, Proposição 2.1.21, Corolário 2.1.22:** "*... duas curvas parametrizadas congruentes.*".
- **Página 135, Exemplo 2.2.9:** "*Considere a parametrização da parábola...*".
- **Página 138:** "*... equidistam (Lorentzianamente) de um ponto...*".
- **Página 158:** "*Em contraste ao que vimos...*".
- **Página 159, nota de rodapé 4:** "*É razoavelmente comum...*".
- **Página 160, Definição 2.3.5:** Correção de fonte, $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ para $\tau_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$.
- **Página 174, Observação:** "*... plano de tipo espaço não-horizontal...*".
- **Página 184:** "*... anterior, concluímos que...*".
- **Página 218, Teorema 3.1.7:** "*Se $a \in \mathbb{R}$ é um valor...*".
- **Página 221, demonstração da Proposição 3.1.9:** Correção de fonte, $\mathbf{p}$ para $\boldsymbol{p}$.
- **Página 233:** "*... a Proposição 3.1.14 (p. 226) nos diz que...*".
- **Página 299, demonstração da Proposiçaõ 3.3.13:** "*... para a curvatura média é análogo:...*".

- **Página 306, Proposição 3.4.1:** *"... seja diagonalizável. Então..."*.
- **Página 311, Corolário 3.4.7:** Correção de fonte, $\mathbf{p}$ para $\boldsymbol{p}$.
- **Página 313, Teorema 3.4.9:** *"... uma superfície regular..."*.
- **Página 314, demonstração do Teorema 3.4.9:** *"Pelo Exercício 3.1.1 (p. 244), podemos..."*.
- **Página 321:** *"Para concluir interpretações da..."*
- **Página 331, Exercício 3.4.7:**
  - *"... não-degenerada e* $\boldsymbol{x}\colon U \to \boldsymbol{x}(U) \subseteq M$*..."*;
  - (item (b)) *"... como elípticos, ..."*;
- **Página 331, Exercício 3.4.8:** *"...e conclua que* $\mathbb{T}^2$*..."*
- **Página 332, Exercício 3.4.10:** Recordar que o Exemplo 3.4.22 começa na página 326.
- **Página 341, Proposição 3.5.9:** *"... dada em coordenadas por* $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{x}(u(t), v(t))$*, então..."*.
- **Página 343, Exemplo 3.5.10, item (2):** Correção de fonte, $\boldsymbol{\epsilon_\alpha}$ para $\epsilon_{\boldsymbol{\alpha}}$.
- **Página 357, demonstração da Proposição 3.6.9:** *"... usar tal condição para tentar definí-lo."*.
- **Página 394, Exercício 3.6.19:** *"... uma curva regular unindo..."*
- **Página 421:** "... espaço tangente *a uma variedade..."*.
- **Página 475, Exercício 4.3.3:** *"... divisores de zero em* $\mathbb{C}'$ *correspondem à..."*.
- **Página 478, demonstração do Teorema 4.3.34, item (i):** *"... os coeficientes da Primeira Forma Fundamental..."*.
- **Página 493, demonstração da Proposição 4.3.45:** Correção de fonte, $dx^j$ para $\mathrm{d}x^j$.
- **Página 498:** *"... em termos da representação de Weierstrass..."*.
- **Página 525:** *"... para o melhor entendimento do texto."*.
- **Página 529, Teorema A.11:** Mudar o resto $r(\boldsymbol{h})$ para $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})$, que assume valores vetoriais (isto também evita qualquer possível confusão com o índice $r$ no limite superior do somatório).