Comentários e mais dicas – Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies

Ivo Terek Couto* Alexandre Lymberopoulos†

O livro *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*, volume 21 da Coleção Textos Universitários da SBM, apresenta mais de 300 exercícios, vários deles com dicas. Neste arquivo faremos alguns comentários e daremos mais dicas para alguns exercícios selecionados.

- **Exercício 1.2.7, página 28:** dado $f \in U^*$, considere uma extensão $\hat{f} \in (\mathbb{R}^n_\nu)^*$ de f. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ é não-degenerado, existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_\nu$ tal que $\langle \boldsymbol{x}, \cdot \rangle_\nu = \hat{f}$. Restringindo a U, segue que $\Phi(\boldsymbol{x}) = f$, e assim Φ é sobrejetora. Ainda, vale que $\ker \Phi = U^\perp$. Aplique o teorema do núcleo e imagem.

- **Exercício 1.2.10, página 29:** Os menores principais corretos são 5, 6 e 0. Esta correção não altera em nada o exercício: o problema no argumento é que os vetores dados são linearmente dependentes.

- **Exercício 1.3.11, página 48:** Avalie os dois lados em $\boldsymbol{0}$ para tirar que $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$. Tome quadrados escalares dos dois lados para concluir que $c_1^2 = c_2^2$, e daí a condição $c_1, c_2 > 0$ nos dá que $c_1 = c_2$. Logo $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

- **Exercício 1.5.6, item (a) página 86:** Chame $v_i = \tanh \varphi_i$ para $i = 1, 2$, e faça

  $$B_{\text{vel}}(\boldsymbol{v}, v_1) B_{\text{vel}}(\boldsymbol{v}, v_2) = B_\angle(\boldsymbol{v}, \varphi_1) B_\angle(\boldsymbol{v}, \varphi_2) = B_\angle(\boldsymbol{v}, \varphi_1 + \varphi_2) = B_{\text{vel}}\left(\boldsymbol{v}, \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\right),$$

  onde usamos o resultado do Exercício 1.5.4 (p. 85) e a fórmula

  $$\tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh(\varphi_1) + \tanh(\varphi_2)}{1 + \tanh(\varphi_1)\tanh(\varphi_2)},$$

  válida para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

- **Exercício 2.1.3, página 120:** Vale que

  $$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}(0) + t\boldsymbol{\alpha}'(0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}(0),$$

  e assim o traço de $\boldsymbol{\alpha}$ está contido no subespaço afim $\boldsymbol{\alpha}(0) + \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}'(0), \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{(k)}(0)\}$. A dimensão deste subespaço pode ser menor que k caso estas derivadas sejam linearmente dependentes (por exemplo, se $\boldsymbol{\alpha}$ é uma reta).

*terekcouto.1@osu.edu
†lymber@ime.usp.br

- **Exercício 2.1.20, página 125:** Derive a relação $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1(\phi_1(t)) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2(\phi_2(t))$ duas vezes para obter

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1''(\phi_1(t))\phi_1'(t)^2 + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1(\phi_1(t))\phi_1''(t) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2''(\phi_2(t))\phi_2'(t)^2 + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2(\phi_2(t))\phi_2''(t),$$

e tome os quadrados escalares dos dois lados para concluir que $\phi_1'(t)^4 = \phi_2'(t)^4$.

- **Exercício 2.2.14, páginas 152 e 153:** Para o item (a), escreva

$$\boldsymbol{\alpha}(\varphi) = (\rho(\varphi)\cosh\varphi, \rho(\varphi)\,\mathrm{senh}\,\varphi)$$

e calcule diretamente

$$\boldsymbol{\alpha}'(\varphi) = (\rho'(\varphi)\cosh\varphi + \rho(\varphi)\,\mathrm{senh}\,\varphi, \rho'(\varphi)\,\mathrm{senh}\,\varphi + \rho(\varphi)\cosh\varphi) = R_\varphi^h(\rho'(\varphi), \rho(\varphi)).$$

Analogamente, segue que $\boldsymbol{\alpha}''(\varphi) = R_\varphi^h(\rho''(\varphi) + \rho(\varphi), 2\rho'(\varphi))$. Deste modo vemos que $\|\boldsymbol{\alpha}'(\varphi)\|_L = \|(\rho'(\varphi), \rho(\varphi))\|_L$, e segue a fórmula para $L[\boldsymbol{\alpha}]$ dada no item (b). A fórmula da curvatura dada no item (c) segue disto, juntamente com

$$\det(\boldsymbol{\alpha}'(\varphi), \boldsymbol{\alpha}''(\varphi)) = \begin{vmatrix} \rho'(\varphi) & \rho''(\varphi) + \rho(\varphi) \\ \rho(\varphi) & 2\rho'(\varphi) \end{vmatrix} = 2\rho'(\varphi)^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi) - \rho(\varphi)^2,$$

usando novamente que R_φ^h é uma transformação de Lorentz. Para o item (d), aplique estas fórmulas.

- **Exercício 3.1.26, página 249:** Em geral, $f \circ f$ não precisa preservar a orientação, pois $\mathrm{d}(f \circ f)_{\boldsymbol{p}} = \mathrm{d}f_{f(\boldsymbol{p})} \circ \mathrm{d}f_{\boldsymbol{p}}$, e assim $\det(\mathrm{d}(f \circ f)_{\boldsymbol{p}})$ não necessariamente é igual a $\det(\mathrm{d}f_{\boldsymbol{p}})^2$ (os pontos base da diferencial mudam).

- **Exercício 3.2.6, item (a), página 265:** Escreva

$$(\mathrm{grad}\, f) \circ \boldsymbol{x} = A\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} + B\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$$

para certas funções A e B a serem descobertas. Tomando produtos com os campos coordenados, vemos que $f_u = AE + BF$ e $f_v = AF + BG$. Daí

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}.$$

Efetue.

- **Exercício 3.3.8, página 305:** se $\boldsymbol{N}$ é um campo normal de Gauss para M, então $\boldsymbol{N}_\lambda \colon \lambda M \to \mathbb{R}^3_\nu$ dado por $\boldsymbol{N}_\lambda(\lambda\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{p})$ é um campo normal de Gauss para λM. Derivando em relação à $\boldsymbol{p}$ os dois lados desta definição, segue que

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{N}_\lambda)_{\lambda\boldsymbol{p}}(\lambda\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{v})}{\lambda}$$

para todo $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}M$.

- **Exercício 3.6.3, página 364:** Derive a relação $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(h(s))$ duas vezes para obter
$$\boldsymbol{\beta}''(s) = \boldsymbol{\alpha}''(h(s))h'(s)^2 + \boldsymbol{\alpha}'(h(s))h''(s),$$
e tome as projeções tangentes dos dois lados para concluir que $\mathbf{0} = h''(s)\boldsymbol{\alpha}'(h(s))$. A regularidade de $\boldsymbol{\alpha}$ implica que $h''(s) = 0$.

- **Exercício 3.6.17, página 393:** Abusando um pouco da notação, temos que
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}' &= \sum_{i=1}^{2}\left(\dot{a}^i\boldsymbol{x}_i + a^i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\dot{a}^i\boldsymbol{x}_i + a^i\sum_{j=1}^{2}\dot{u}^j\boldsymbol{x}_{ij}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{2}\dot{a}^k\boldsymbol{x}_k + \sum_{i,j,k=1}^{2}a^i\dot{u}^j\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{x}_k + \sum_{i,j=1}^{2}a^i\dot{u}^jh_{ij}\boldsymbol{N}\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{2}\left(\dot{a}^k + \Gamma_{ij}^k a^i\dot{u}^j\right)\boldsymbol{x}_k}_{=\frac{D\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{2}h_{ij}a^i\dot{u}^j\boldsymbol{N}}_{\text{normal}}.
\end{aligned}$$

- **Exercício 4.1.8, página 440:** Relativamente à parametrização $\boldsymbol{x}$, a métrica de $\mathbb{H}^2$ é simplesmente $\mathrm{d}u^2 + \operatorname{senh}^2 u\,\mathrm{d}v^2$. Sendo
$$x = e^v \tanh u \quad \text{e} \quad y = e^v \operatorname{sech} u,$$
calculamos
$$\mathrm{d}x = e^v\operatorname{sech}^2 u\,\mathrm{d}u + e^v\tanh u\,\mathrm{d}v \quad \text{e} \quad \mathrm{d}y = -e^v\tanh u\operatorname{sech} u\,\mathrm{d}u + e^v\operatorname{sech} u\,\mathrm{d}v.$$
Substitua e mostre que
$$\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2} = \mathrm{d}u^2 + \operatorname{senh}^2 u\,\mathrm{d}v^2.$$

- **Exercício 4.1.9, item (c), página 440:** A isometria é dada na página 231.

- **Exercício 4.1.21, página 450:** Calcule as derivadas parciais
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_u(u,v) = (\operatorname{senh} u\cos v, \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \cosh u\cos v, \cosh u\operatorname{sen} v) \quad \text{e}\\
&\boldsymbol{x}_v(u,v) = (-\cosh u\operatorname{sen} v, \cosh u\cos v, -\operatorname{senh} u\operatorname{sen} v, \operatorname{senh} u\cos v).
\end{aligned}$$
A aplicação $\boldsymbol{x}$ é injetora e estes vetores são sempre linearmente independentes (justifique). Os seus produtos (em $\mathbb{R}^4_2$) nos dizem que a métrica induzida na imagem de $\boldsymbol{x}$ é dada por $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$. Isto nos diz que $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{L}^2 \to \boldsymbol{x}(\mathbb{L}^2)$ é uma isometria, e assim a curvatura Gaussiana de $\boldsymbol{x}(\mathbb{L}^2)$ é nula.

- **Exercício 4.4.5, página 517:** Ponha $K_n = f^{-1}([-n, n])$, para todo $n \geq 0$. Como f é própria,, cada K_n é um subconjunto compacto de M. Obviamente valem as inclusões $K_n \subseteq \mathrm{int}(K_{n+1})$ para todo $n \geq 0$ e também $M = \bigcup_{n \geq 0} K_n$. Agora fixe $p \in M$ e considere uma sequência qualquer $(q_n)_{n \neq 0}$ com a propriedade de que $q_n \notin K_n$, para todo $n \geq 0$ (i.e., $|f(q_n)| > n$). Usando que f é Lipschitz, temos

  $$d(p, q_n) > \frac{1}{C}|f(p) - f(q_n)| > \frac{n - |f(p)|}{C}.$$

  Fazendo $n \to +\infty$, vemos que $d(p, q_n) \to +\infty$. Concluímos que M é geodesicamente completa, pelo Teorema de Hopf-Rinow.

- **Exercício 4.4.14, página 520:** $\mathbb{L}^2 \setminus \{\text{ponto}\}$.