

Hipersuperfícies regradas e de Weingarten no Espaço Hiperbólico

Alexandre Lymberopoulos

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti

São Paulo, março de 2009

Hipersuperfícies Regradas e de Weingarten no Espaço Hiperbólico

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação/tese devidamente corrigida
e defendida por Alexandre Lymberopoulos
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti - IME-USP.
- Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves - IME-USP.
- Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra - UFScar.
- Prof. Dr. Luiz Amancio Machado de Souza Junior - UNI-Rio.
- Prof. Luquesio Petrola de Melo Jorge - UFC.

Agradecimentos

Muitos são aqueles que deveriam estar nesta lista de agradecimentos, mas eu não poderia deixar de citar os que aqui aparecem.

- À Banca Examinadora, pelas enriquecedoras sugestões, comentários e propostas de trabalhos futuros;
- Ao Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti, pela paciência, dedicação e motivação constantes.
- Aos meus pais, pela cobrança, estímulo e amor.
- Às minhas meninas, Renata e Leticia, e também ao bebê que está chegando, por toda a alegria, amor e companhia ao longo destes tempos.
- Aos grandes companheiros do IME e da ESEG. Não me atrevo a começar uma lista de nomes e cometer alguma injustiça. Vocês sabem quem são e o papel crucial que desempenham na minha vida.
- Aos professores Plínio Simões, Luiz Augusto, Bárbara, Cláudia Cueva e Daniel Tausk pelo apoio ao longo de toda essa jornada.

Resumo

Por volta de 1865 (vide [3] e [9]), Beltrami e Dini classificaram as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$ mostrando que tais superfícies são superfícies regradas helicoidais, ou seja, invariantes por um movimento helicoidal de $\mathbb{R}^3$. Mais tarde, em 1989, Dajczer e Tenenblat classificaram as hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^n$. Em [7] os autores provam que essas hipersuperfícies são “flat”, um produto $Q^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$, onde $Q^3 \subset \mathbb{R}^4$ é um cone sobre um produto de círculos ou sobre uma superfície mínima de $\mathbb{S}^3$ ou ainda um produto $Q^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, onde $Q^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície helicoidal regrada ou um hiperbolóide de revolução. Já em 1999 (vide [8]) Dillen e Kühnel obtiveram uma classificação para as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{L}^3$.

Recentemente, em [14] e [1], os autores classificaram as hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ concluindo que estas são de curvatura seccional constante 1 ou então um fibrado unitário sobre um produto de círculos ou sobre uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3$. Ainda neste trabalho a autora faz grandes avanços para a classificação das superfícies regradas e de Weingarten no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$.

Nesta tese de doutoramento completamos a classificação destas hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Palavras-chave: espaço hiperbólico, espaço de Lorentz, hipersuperfícies, regradas, Weingarten.

Abstract

Around 1865 (see [3] e [9]), Beltrami and Dini classified the ruled and Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$ showing that they are ruled helicoidal surfaces, that is, invariant under an helicoidal motion in $\mathbb{R}^3$. Later, in 1989, Dajczer and Tenenblat obtained a classification for ruled and Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^n$. In [7] they show that those hypersurfaces are product $Q^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$, where $Q^3 \subset \mathbb{R}^4$ is a cone over a product of circles or over a minimal surface in $\mathbb{S}^3$, or a product $Q^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, where $Q^2 \subset \mathbb{R}^3$ is an ruled helicoidal surface or an hyperboloid of revolution. In 1999, Dillen and Kühnel (see [8]) established a classification for ruled and Weingarten surfaces in $\mathbb{L}^3$.

Recently, in [14] and [1], the authors provide a classification of the ruled and Weingarten hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$ showing that they are the ones with constant sectional curvature 1 or a unitary normal bundle over a product of two circles or over a minimal surface in $\mathbb{S}^3$. In the same work the author achieve some relevant results on the classification of ruled and Weingarten hypersurfaces in hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1}$.

In this work we give a classification of those hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}$.

Keywords: hyperbolic space, Lorentz space, hypersurfaces, ruled, Weingarten.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Introdução	1
Capítulo 1. Preliminares	5
§1. O espaço de Lorentz	5
§2. Subvariedades do espaço de Lorentz	6
§3. Imersões em $\mathbb{H}^n$	7
§4. Imersões em $\mathbb{S}_1^n$	9
§5. O primeiro espaço normal e redução de codimensão	10
§6. Parametrização de Gauss para hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{n+1}$	11
§7. Subvariedades regradas	12
§8. Hipersuperfícies de Weingarten	14
Capítulo 2. Superfícies regradas em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}_1^3$	17
§1. Superfícies regradas em $\mathbb{S}^3$	18
§2. Superfícies regradas de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$	23
Capítulo 3. Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$	27
§1. Imersões g com N_1^g de tipo espaço	33
§2. Imersões g com N_1^g de tipo tempo	38
§3. Imersões g com N_1^g de tipo luz	40
§4. Classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$	44
Referências Bibliográficas	47

Introdução

Uma forma espacial real de dimensão n é uma variedade riemanniana de curvatura constante, indicada por $\tilde{M}^n(c)$. Podemos assumir que, localmente, $\tilde{M}(c)$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, se $c = 0$, a esfera $\mathbb{S}^n(c)$, se $c > 0$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(c)$ se $c < 0$. Sem perda de generalidade admitiremos $c = 0, 1$ ou -1 ao longo deste trabalho.

Dizemos que uma subvariedade M^{m+1} de uma variedade $\tilde{M}^n, n \geq 3$, é regrada se M admite uma folheação por subvariedades de dimensão m totalmente geodésicas de $\tilde{M}$. Uma hipersuperfície $M^n, n \geq 2$ em um espaço forma é de Weingarten se existe uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não nula tal que $F(H, S) = 0$, onde H e S são respectivamente as curvaturas média e escalar de M . Quando $n = 2$ consideramos as curvaturas média, H , e gaussiana, K , da superfície na definição de hipersuperfícies de Weingarten.

O problema abordado neste trabalho tem suas origens em 1865 quando Dini e Beltrami, independentemente, obtiveram uma classificação para as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$.

Nesse ambiente uma superfície é regrada se admite uma parametrização do tipo $X(s, t) = c(s) + tv(s)$, onde $c(s)$ é uma curva regular e conexa e $v(s)$ é um campo de vetores, ao longo da curva $c(s)$, que nunca se anula. Uma superfície regrada é desenvolvível se sua curvatura gaussiana é idêntica à do ambiente, ou seja, $K \equiv 0$. Isto equivale a dizer que o plano tangente à superfície não varia ao longo das curvas $X(s_0, t)$, ou seja, ao longo das retas que regram a superfície. Se s e t são parâmetros para uma superfície S , de classe C^3 , então S é de Weingarten se e somente se $K_s H_t = K_t H_s$ em todos os pontos. O resultado obtido por Dini e Beltrami sobre tais superfícies pode ser enunciado sob a seguinte forma (vide [8]):

Teorema 0.1 (Dini-Beltrami). *Toda superfície regrada e de Weingarten não-desenvolvível em $\mathbb{R}^3$ é um pedaço de uma superfície helicoidal, ou seja, a órbita de uma reta sob a ação de um grupo a um parâmetro de movimentos helicoidais. Em particular, se a curvatura gaussiana não se anula num ponto, então ela nunca se anula. A única superfície mínima regrada é o helicóide.*

Posteriormente, em 1989, Dajczer e Tenenblat, obtiveram uma classificação para hipersuperfícies regradas e de Weingarten de $\mathbb{R}^n$. Em [7] os autores demonstram o seguinte resultado:

Teorema 0.2 (Dajczer-Tenenblat). *Seja $M^n, n \geq 3$ uma hipersuperfície conexa, regrada e de Weingarten em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então*

- (i) M^n é “flat”, ou
- (ii) $M^n \cong Q^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$, onde $Q \subset \mathbb{R}^4$ é um cone sobre um produto de círculos em $\mathbb{S}^3$ ou sobre uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3$, ou
- (iii) $M^n \cong Q^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, onde $Q \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regrada helicoidal ou um hiperbolóide de revolução.

Mais recentemente, em 1999, Dillen e Kühnel apresentam a seguinte classificação para superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{L}^3$:

Teorema 0.3 (Dillen-Kühnel). *Seja $X(s, t) = c(s) + tv(s)$ a parametrização de uma superfície regrada de $\mathbb{L}^3$, onde $c(s)$ e $v(s)$ são, respectivamente, uma curva e um campo de vetores ao longo desta curva. Então,*

- (i) toda superfície regrada, não-desenvolvível e de Weingarten tal que o campo v nunca se anula é m pedaço de uma superfície regrada helicoidal.
- (ii) Em particular, toda superfície regrada, não-desenvolvível e mínima é um pedaço da superfície de Cayley ou um dos três tipos de helicóides Lorentzianos.
- (iii) Toda superfície regrada por campos nulos é uma superfície de Weingarten satisfazendo $H^2 = K$.

Para mais detalhes vide (vide [8]).

Finalmente, em 2008, Asperti e Valério apresentam em [1] uma classificação para hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ cujo enunciado reproduzimos abaixo.

Teorema 0.4 (Valério-Asperti). *Seja $M^n, n \geq 3$ uma hipersuperfície conexa, regrada e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

- (i) M ter curvatura seccional constante igual a 1, ou
- (ii) M é um aberto do fibrado normal unitário de uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3$ ou de um produto de dois círculos em $\mathbb{S}^3$.

No capítulo 1 deste trabalho apresentamos alguns conceitos básicos que são necessários para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 desenvolvemos a teoria das superfícies regradas na esfera $\mathbb{S}^3$ e no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$. Apresentamos aqui uma classificação das superfícies regradas mínimas de $\mathbb{S}^3$, a qual já é estabelecida em [10]. Refazemos a demonstração do resultado por notar a omissão, no artigo original, de um termo na equação diferencial parcial que caracteriza

tais superfícies. Não podemos deixar de agradecer aqui ao professor Luquésio Petrola de Melo Jorge pelas valiosas sugestões para refazer a demonstração citada. Ainda nesse sentido estabelecemos uma classificação semelhante as superfícies regradas em $\mathbb{S}_1^3$.

No capítulo 3 obtemos alguns resultados, muitos deles já apresentados em [14], que levam a uma classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$.

Ainda na direção de classificar superfícies e hipersuperfícies regradas e de Weingarten, observamos que o problema está em aberto para os seguintes ambientes:

- (1) Esfera $\mathbb{S}^3$,
- (2) Espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^3$ e
- (3) Espaço Anti De Sitter.

Além desses problemas poderíamos considerar também subvariedades regradas e de Weingarten de codimensão arbitrária. Nesse caso, entretanto, é necessário procurar uma definição satisfatória para o que é ser uma subvariedade de Weingarten.

Preliminares

Neste capítulo introdutório apresentamos o espaço de Lorentz-Minkowski, algumas de suas propriedades e as subvariedades dele que são de interesse para o que se segue.

1. O espaço de Lorentz

O espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão n é o espaço vetorial real

$$\mathbb{L}^n = \{(x_0, \dots, x_{n-1}) : x_i \in \mathbb{R}\},$$

munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar do $\mathbb{R}^n$ e do produto interno

$$(1.1) \quad g(x, y) = \langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i,$$

onde $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ e $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$.

Este produto interno não é positivo definido e tem assinatura 1, ou seja, um subespaço de $\mathbb{L}^n$ para o qual a restrição da métrica é negativa definida tem dimensão 1. Observe que $|v|$ pode ser positivo, negativo ou nulo.

Um vetor v em $\mathbb{L}^n$ pode ter três *tipos causais*:

- (i) v é de *tipo espaço* se $\langle v, v \rangle > 0$ ou se $v = 0$;
- (ii) v é de *tipo tempo* se $\langle v, v \rangle < 0$;
- (iii) v é de *tipo luz* se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.

De modo análogo definimos o tipo causal de um subespaço vetorial V de $\mathbb{L}^n$:

- (i) V é de *tipo espaço* se $g|_V$ é positiva definida;
- (ii) V é de *tipo tempo* se existe $v \in V$ de tipo tempo;
- (iii) V é de *tipo luz* se $g|_V$ é degenerada, ou seja, existe $v \neq 0$ tal que $g(v, v) = 0$.

O conjunto dos vetores de tipo luz em $\mathbb{L}^n$ é chamado *cone de luz*.

Apresentamos a seguir algumas propriedades do caráter causal de subespaços de $\mathbb{L}^n$, cujas demonstrações encontram-se em [12, p. 140].

Proposição 1.1. *Seja W um subespaço vetorial de $\mathbb{L}^n$ e*

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{L}^n : \langle v, w \rangle = 0, \text{ para } w \in W\}.$$

Então $\dim W + \dim W^\perp = n$ e $(W^\perp)^\perp = W$.

Proposição 1.2. *Um subespaço W de $\mathbb{L}^n$ é tipo espaço se e somente se $W^\perp$ é tipo tempo.*

Observação 1.1. Se W é um subespaço de tipo espaço ou tempo temos que $\mathbb{L}^n = W \oplus W^\perp$, porém o mesmo não é válido quando W é tipo luz. A proposição 1.1 continua válida quando W é tipo luz. Se W é tipo luz então $W^\perp$ também é tipo luz.

No espaço $\mathbb{L}^n$ existe uma única conexão de Levi-Civita, ou seja, uma conexão métrica de torção nula, isto é, se $\chi(\mathbb{L}^n)$ denota o conjunto dos campos de vetores de $\mathbb{L}^n$ temos que existe uma única aplicação $\bar{\nabla} : \chi(\mathbb{L}^n) \times \chi(\mathbb{L}^n) \rightarrow \chi(\mathbb{L}^n)$ tal que

- (i) Para todos X, Y e Z em $\chi(\mathbb{L}^n)$ e f e g em $C^\infty(\mathbb{L}^n, \mathbb{R})$ temos

$$\bar{\nabla}_{fX+gY}Z = f\bar{\nabla}_XZ + g\bar{\nabla}_YZ.$$

- (ii) Para todos X, Y e Z em $\chi(\mathbb{L}^n)$ e a e b reais temos

$$\bar{\nabla}_X(aY + bZ) = a\bar{\nabla}_XY + b\bar{\nabla}_XZ.$$

- (iii) Para todos X, Y em $\chi(\mathbb{L}^n)$ e f em $C^\infty(\mathbb{L}^n, \mathbb{R})$ temos

$$\bar{\nabla}_X fY = X[f]Y + f\bar{\nabla}_XY,$$

onde $X[f]$ denota $df(X)$.

- (iv) Para todos X, Y em $\chi(\mathbb{L}^n)$ temos

$$\bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX = [X, Y].$$

- (v) Para todos X, Y e Z em $\chi(\mathbb{L}^n)$ temos

$$X[\langle Y, Z \rangle] = \langle \bar{\nabla}_XY, Z \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_XY \rangle.$$

2. Subvariedades do espaço de Lorentz

Definição 1.1. Uma subvariedade $M \subset \mathbb{L}^n$ é de *tipo espaço* se o espaço tangente a M em cada ponto $p \in M$, T_pM é um espaço vetorial de tipo espaço. Tais subvariedades também são chamadas de *riemannianas*. Analogamente se T_pM é um espaço vetorial de tipo tempo em todo $p \in M$ dizemos que M é uma subvariedade de *tipo tempo* de $\mathbb{L}^n$ e se T_pM é um espaço vetorial de tipo luz para todo $p \in M$ dizemos que M é uma subvariedade de *tipo luz* de $\mathbb{L}^n$.

A seguir definimos duas hipersuperfícies do espaço de Lorentz que serão objetos de estudo deste trabalho.

Definição 1.2. O *espaço hiperbólico* é a hipersuperfície em $\mathbb{L}^{n+1}$ dada por

$$\mathbb{H}^n(c) = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, x \rangle = -c^2, x_0 > 0\}$$

Observe que o vetor posição de cada ponto de $\mathbb{H}^n(c)$ é um vetor de tipo tempo e portanto o espaço tangente a esta hipersuperfície é subespaço tipo espaço de $\mathbb{L}^n$, pois é o complemento ortogonal do vetor posição. Logo $\mathbb{H}^n(c)$ é uma hipersuperfície de tipo espaço. É também conhecido que $\mathbb{H}^n(c)$ é conexa, completa, simplesmente conexa e, nessas condições, a única variedade riemanniana de curvatura seccional constante negativa (igual a $-1/c^2$).

Definição 1.3. O *espaço de De Sitter* é a hipersuperfície em $\mathbb{L}^{n+1}$ dada por

$$\mathbb{S}_1^n(c) = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, x \rangle = c^2\}.$$

Agora o vetor posição de cada ponto do espaço de De Sitter é de tipo espaço e portanto o espaço tangente em cada ponto é um espaço de tipo tempo, donde o espaço de De Sitter é uma hipersuperfície de tipo tempo. Sabe-se também que $\mathbb{S}_1^n(c)$ é completa, conexa e, para $n > 2$, simplesmente conexa. Sua curvatura seccional é constante e igual a $1/c^2$.

Para os propósitos desse trabalho é suficiente considerar $c = 1$ em ambos os casos e portanto denotaremos $\mathbb{H}^n(1)$ por $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}_1^n(1)$ por $\mathbb{S}_1^n$.

3. Imersões em $\mathbb{H}^n$

Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M de dimensão $2 \leq m < n$ no espaço hiperbólico de dimensão n . Tal imersão localmente é um mergulho e portanto podemos, através de identificação de uma vizinhança U de $p \in M$ com sua imagem $f(U)$ em $\mathbb{H}^n$, considerar o espaço tangente a $p \in M$ como um subespaço de $f(p) \in \mathbb{H}^n$ escrevendo

$$T_p\mathbb{H}^n = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde o complemento ortogonal é tomado em relação a $T_p\mathbb{H}^n$.

Com esta decomposição obtemos os fibrados *tangente*, $TM = \cup_{p \in M} T_pM$, e *normal*, $TM^\perp = \cup_{p \in M} (T_pM)^\perp$ ao longo de $f(M)$. Em relação a essa decomposição de $T\mathbb{H}^n$ temos as projeções tangencial e normal definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} (\cdot)^\top & : T\mathbb{H}^n \rightarrow TM \\ (\cdot)^\perp & : T\mathbb{H}^n \rightarrow TM^\perp \end{aligned}$$

Se $\tilde{\nabla}$ e $\nabla = (\tilde{\nabla})^\top$ são as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{H}^n$ e M , respectivamente temos, para todos $X, Y \in TM$, a fórmula de Gauss

$$(1.2) \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

isto é, $\alpha(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$. A aplicação $\alpha : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ é chamada *segunda forma fundamental* da imersão f .

Para cada $\xi \in TM^\perp$ definimos a aplicação $A_\xi : TM \rightarrow TM$ por

$$(1.3) \quad A_\xi X = -(\tilde{\nabla}_X \xi)^\top$$

Se $Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$ então $\langle Y, \xi \rangle = 0$, donde, para todo $X \in TM$, temos

$$X[\langle Y, \xi \rangle] = 0.$$

Segue-se da fórmula de Gauss que

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Como α é uma aplicação simétrica, a expressão acima mostra que A_ξ é um operador linear simétrico para todo $\xi \in TM^\perp$, chamado *operador forma* ou *operador de Weingarten* e freqüentemente nos referimos a A_ξ como segunda forma fundamental na direção de ξ .

Tomando a componente normal de $\tilde{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla_X^\perp \xi$, temos uma conexão métrica no fibrado $TM^\perp$, chamada de *conexão normal* da imersão. Assim temos a fórmula de Weingarten

$$(1.4) \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

Dada uma conexão de Levi-Civita, ∇ , sobre uma variedade M , definimos o seu *tensor de curvatura*, $R : TM \times TM \times TM \rightarrow TM$, por

$$(1.5) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Apresentamos aqui as equações que toda imersão isométrica deve satisfazer, conforme [5, cap. 1].

Sejam $\tilde{R}$ e R , respectivamente, os tensores de curvatura de $\mathbb{H}^n$ e M . Utilizando as equações (1.2) e (1.4) e tomando componentes tangenciais de $\tilde{R}(X, Y)Z$ obtemos a equação de Gauss

$$(1.6) \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

Se X e Y são campos ortonormais em TM denotamos, respectivamente, por

$$K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle \quad \text{e} \quad \tilde{K}(X, Y) = \langle \tilde{R}(X, Y)Y, X \rangle = -1$$

as curvaturas seccionais de M e $\mathbb{H}^n$, relativas aos campos X e Y . Com isto a equação de Gauss tem a forma

$$(1.7) \quad K(X, Y) = -1 + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle.$$

Como $\tilde{K} \equiv -1$ temos

$$(1.8) \quad \tilde{R}(X, Y)Z = -\langle Y, Z \rangle X + \langle X, Z \rangle Y = (X \wedge Y)Z$$

e portanto a equação (1.6) se escreve

$$(1.9) \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

Tomando agora a componente normal de $\tilde{R}(X, Y)Z$ obtemos a equação de Codazzi

$$(1.10) \quad (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

onde $(\nabla_X^\perp \alpha)(X, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$.

Se consideramos a componente tangencial de $\tilde{R}(X, Y)\xi$ obtemos outra forma da equação de Codazzi

$$(1.11) \quad (\tilde{R}(X, Y)\xi)^\top = (\nabla_Y A)(X, \xi) - (\nabla_X A)(Y, \xi),$$

onde $(\nabla_Y A)(X, \xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X$.

Usando novamente (1.8) temos que as equações (1.10) e (1.11) acima se escrevem, respectivamente como

$$(1.12) \quad (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) \text{ e}$$

$$(1.13) \quad (\nabla_Y A)(X, \xi) = (\nabla_X A)(Y, \xi).$$

O tensor de curvatura no fibrado normal, $R^\perp : TM \times TM \times TM^\perp \rightarrow TM^\perp$ é definido, de maneira análoga, por

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

Usando novamente as equações (1.2) e (1.4), tomando a componente normal de $\tilde{R}(X, Y)\xi$, obtemos a equação de Ricci

$$(1.14) \quad (\tilde{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y).$$

Como o espaço ambiente tem curvatura seccional constante igual a -1, a equação (1.14) se escreve

$$(1.15) \quad R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y).$$

4. Imersões em $\mathbb{S}_1^n$

Escrevemos agora as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para imersões isométricas de variedades riemannianas no espaço de De Sitter, que são as subvariedades de interesse para este trabalho.

Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{S}_1^n$, com $2 \leq m < n$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M . Podemos proceder tal como na seção anterior, decompondo $T_p \mathbb{S}_1^n$ como

$$T_p \mathbb{S}_1^n = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

mas devemos lembrar agora que $(T_p M)^\perp$ é um espaço vetorial de tipo tempo para todo $p \in M$.

Analogamente ao caso hiperbólico obtemos os fibrados tangente e normal à imersão f , $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ e $TM^\perp = \cup_{p \in M} (T_p M)^\perp$ bem como as projeções tangencial e normal de $T\mathbb{S}_1^n$ sobre esses fibrados.

Se $\tilde{\nabla}$ e $\nabla = (\tilde{\nabla})^\top$ são, respectivamente, as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{S}_1^n$ e M a segunda forma fundamental de f fica bem definida através da equação (1.2). Usaremos ao longo do texto $\tilde{\nabla}$ para indicar tanto a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^n$ quanto a de $\mathbb{S}_1^n$, fazendo menção explícita da variedade ambiente quando necessário.

Lembrando que agora $\tilde{K} \equiv 1$, cálculos análogos aos da seção anterior permitem obter as seguintes equações de Gauss para imersões isométricas de variedades riemannianas em $\mathbb{S}_1^n$:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \text{ e} \\ (1.16) \quad K(X, Y) &= 1 + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

As equações de Codazzi são idênticas ao caso de imersões em $\mathbb{H}^n$

$$(1.17) \quad (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) \text{ e}$$

$$(1.18) \quad (\nabla_Y A)(X, \xi) = (\nabla_X A)(Y, \xi)$$

O mesmo vale para a equação de Ricci

$$(1.19) \quad R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y).$$

5. O primeiro espaço normal e redução de codimensão

Definição 1.4. Se $f : M^m \rightarrow \tilde{M}^n$ é uma imersão isométrica definimos o *primeiro espaço normal* de f em $p \in M$ por

$$N_1^f(p) = \{ \alpha(X, Y) : X, Y \in T_p M \}.$$

Claramente $N_1^f(p)$ é um subespaço vetorial de $T_p M^\perp$ e portanto $\dim N_1^f(p) \leq n - m$. O primeiro espaço normal também pode ser descrito como

$$N_1^f(p) = \{ \xi \in T_p M^\perp : A_\xi \equiv 0 \}^\perp.$$

Uma imersão f é chamada de *1-regular* se $\dim N_1^f(p)$ é constante para todo $p \in M$. Nesse caso mostra-se que N_1 e $N_1^\perp$ são subfibrados de $TM^\perp$.

Uma imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \tilde{M}^n$ admite *redução de codimensão* a q se existe uma subvariedade $\tilde{M}^{m+q}$, totalmente geodésica em $\tilde{M}^n$, satisfazendo $f(M) \subset \tilde{M}^{m+q}$. Consequentemente uma imersão f é *substancial* quando sua codimensão não pode ser reduzida.

O teorema a seguir tem uma demonstração em [5, cap. 4].

Teorema 1.3. *Sejam M^n uma variedade riemanniana conexa e $f : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Suponha que existe $L \subset TM^\perp$, subfibrado paralelo e de posto l , tal que $N_1^f(p) \subset L(p)$ para todo $p \in M$. Então a codimensão de f pode ser reduzida a l .*

Com demonstração semelhante (ver [14, cap. 1]), temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4. *Sejam M^n uma variedade riemanniana conexa e $f : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Suponha que existe $L \subset TM^\perp$, subfibrado paralelo e não degenerado de posto l , tal que $N_1^f(p) \subset L(p)$ para todo $p \in M$. Então a codimensão de f pode ser reduzida a l .*

Exatamente como no caso da esfera euclideana, temos um resultado de redução de codimensão para imersões no espaço de De Sitter. Uma demonstração deste fato, enunciado a seguir, também encontra-se em [14].

Corolário 1.5. *Sejam M^n uma variedade riemanniana conexa e $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+k}$ uma imersão isométrica 1-regular. Suponha que N_1^f tem posto k é paralelo e não degenerado. Então f tem codimensão substancial k .*

Observamos que $f(M) \subset \mathbb{S}^{n+k}$ (respectivamente $f(M) \subset \mathbb{S}_1^{n+k}$) se, para todo p em M , $N_1^f(p)$ é de tipo espaço (respectivamente de tipo tempo).

6. Parametrização de Gauss para hipersuperfícies de $\mathbb{H}^{n+1}$

Analogamente ao caso de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, definimos a aplicação normal de Gauss para hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{n+1}$. Mais precisamente, se $f : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ é uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M , conexa e orientada, podemos em cada ponto p definir uma aplicação $\eta : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ dada de modo tal que $\eta(p)$ é o transporte paralelo do vetor normal unitário a M até a origem de $\mathbb{L}^{n+2}$.

Nas condições acima, seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão isométrica com segunda forma fundamental α . Definimos o *índice de nulidade relativa* de f em p por $\nu(p) = \dim \Delta(p)$, onde

$$\Delta(p) = \text{Ker } \alpha_p = \{X \in T_p M : \alpha(X, Y) = 0, \text{ para todo } Y \in T_p M\} \subset T_p M.$$

Seja $\nu_0 = \min \{\nu(p) : p \in M\}$. O conjunto $M_0 = \{p \in M : \nu(p) = \nu_0\}$ é um aberto não-vazio de M e que a distribuição $p \mapsto \Delta(p)$ é involutiva e diferenciável em M_0 . Além disso, as subvariedades integrais da distribuição Δ são totalmente geodésicas tanto em M quando em $\mathbb{H}^{n+1}$ (vide [5, cap. 5]).

Se a imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ tem índice de nulidade relativa constante $\nu_0 = n - k$, então num aberto $U \subset M$ podemos definir a relação de equivalência

$$p \sim q \iff \pi(p) = \pi(q),$$

onde $\pi : U \rightarrow V$ é projeção de U sobre V , onde V é o espaço quociente das subvariedades integrais da distribuição de nulidade relativa. Neste caso sabemos que V é uma variedade diferenciável de dimensão k .

Ao longo de cada subvariedade integral, L , podemos mostrar que o campo normal unitário à imersão define um subfibrado unitário paralelo em relação à conexão normal, isto é, $\nabla_X^\perp \eta = 0$, pois, para cada $X \in TL$, como $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ temos $\langle \tilde{\nabla}_X \eta, \eta \rangle = 0$, ou seja,

$\tilde{\nabla}_X \eta \in TL$. Mas, se $Y \in TM$ temos que $\alpha(X, Y) = 0$, ou ainda, $(\tilde{\nabla}_X \eta)^\top = -A_\eta(X) = 0$, donde $\tilde{\nabla}_X \eta = 0$ e portanto

$$(1.20) \quad -A_\eta(X) + \nabla_X^\perp \eta = \tilde{\nabla}_X \eta = 0 \Rightarrow \nabla_X^\perp \eta = 0.$$

Em vista das considerações acima temos como parametrizar, pelo menos localmente, uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$ de nulidade relativa constante. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [6].

Teorema 1.6. *Sejam V^k uma variedade riemanniana e $g : V \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se Λ_1 é o fibrado normal unitário de g , isto é,*

$$\Lambda_1 = \{(y, w) : y \in V \text{ e } w \in (T_y V)^\perp \text{ tal que } \langle w, w \rangle = -1\},$$

considere a aplicação $\Psi : \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ dada por $\Psi(y, w) = w$. Então

- (i) *se U é aberto dos pontos regulares de Ψ , então $\Psi(U)$ é uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa constante, $\nu_0 = n - k$.*
- (ii) *Reciprocamente, toda hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa constante $\nu_0 = n - k$ pode ser localmente parametrizada desta forma.*
- (iii) *A imersão Ψ tem posto n em (y, w) se, e somente se, a segunda forma fundamental de g na direção de w , B_w , é não singular. Nesses pontos o operador de Weingarten de Ψ em $\mathbb{H}^{n+1}$, $A = A_g$ tem posto k e, ao longo de $\Delta^\perp$, temos $A = (B_w)^{-1}$.*

7. Subvariedades regradas

Definição 1.5. Uma subvariedade M^{m+1} de $\mathbb{H}^n$ é *regrada* se admite folheação por subvariedades totalmente geodésicas m -dimensionais de $\mathbb{H}^n$.

Conforme [2], o campo de direções normais à folheação acima citada é localmente integrável e se $\alpha : I \rightarrow M$ é uma curva integral desse campo e $\{e_1(s), \dots, e_m(s)\}$ são campos ortonormais tangentes à cada folha da folheação que regra M , então eles podem ser escolhidos de modo que cada um deles “não se move” em relação aos demais. Em termos mais precisos apresentamos o seguinte resultado, demonstrado neste mesmo artigo.

Lema 1.7. *Sejam M uma variedade riemanniana, $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva ao longo de M e $\{e_1(s), \dots, e_m(s)\}$ campos ortonormais tangentes a M ao longo de α . Então existem campos ortonormais $\{f_1(s), \dots, f_m(s)\}$ ao longo de α tais que*

- (i) *$[f_1(s), \dots, f_m(s)]$ e $[e_1(s), \dots, e_m(s)]$ são o mesmo subespaço de $T_{\alpha(s)}M$.*
- (ii) *Cada campo $\frac{D}{ds}f_i(s) = \nabla_{\partial_s}f_i(s)$, $1 \leq i \leq m$ é ortogonal a ao subespaço de $T_{\alpha(s)}M$ gerado por $\{f_1(s), \dots, f_m(s)\}$.*

Supondo então que os campos $\{e_1, \dots, e_m\}$, tangentes à folheação de M satisfazem as condições (i) e (ii) do lema 1.7 temos que $\langle e'_i, e_j \rangle = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq m$, onde $'$ denota a derivação em relação à variável s em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Deste modo M pode ser parametrizada por

$$(1.21) \quad X(s, t_1, \dots, t_m) = \exp_{\alpha(s)} \left(\sum_{i=1}^m t_i e_i(s) \right),$$

onde $\exp$ é a aplicação exponencial de $\mathbb{H}^n$, cuja expressão é bem conhecida:

$$\exp_p(rv) = \cosh(r)p + \sinh(r)v,$$

considerando $p \in M$ e v unitário em $T_p M$ como vetores em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Assim temos que se $r = r(t_1, \dots, t_m) = \sqrt{\sum_{i=1}^m t_i^2}$, então

$$\begin{aligned} X(s, t_1, \dots, t_m) &= \exp_{\alpha(s)} \left(\sum_{i=1}^m t_i e_i(s) \right) \\ &= \exp_{\alpha(s)} r \left(\frac{\sum_{i=1}^m t_i e_i(s)}{r} \right) \\ &= \cosh(r)\alpha(s) + \frac{\sinh(r)}{r} \sum_{i=1}^m t_i e_i(s) \end{aligned}$$

Escrevendo $e_0(s) = \alpha(s)$, $\phi_0(t_1, \dots, t_m) = \cosh(r)$ e $\phi_i(t_1, \dots, t_m) = \frac{\sinh(r)}{r} t_i$ temos

$$(1.22) \quad X(s, t_1, \dots, t_m) = \sum_{i=0}^m \phi_i(t_1, \dots, t_m) e_i(s).$$

Observamos que $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$ e que $\phi_0^2 - \sum_{i=1}^m \phi_i^2 = 1$, donde $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)$ é uma parametrização de uma vizinhança de $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^m \subset \mathbb{L}^{m+1}$. Além disso, os vetores tangentes às folhas totalmente geodésicas que regram a variedade são X_{t_i} , isto é, se α é a segunda forma fundamental de M^m em $\mathbb{H}^n$ então $\alpha(X_{t_i}, X_{t_j}) = 0$, para todos $1 \leq i, j \leq m$.

Podemos, de maneira semelhante, definir subvariedades regradas no espaço de De Sitter.

Definição 1.6. Uma subvariedade M^{m+1} no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^n$ é *regrada* se admite uma folheação por subvariedades totalmente geodésicas m -dimensionais de $\mathbb{S}_1^n$.

Como o espaço de De Sitter é uma variedade de tipo tempo, suas subvariedades podem ter tipo causal não definido. Utilizando campos $\{e_0 = \alpha(s), e_1(s), \dots, e_m(s)\}$ ao longo de M^{m+1} , definidos como anteriormente, temos, para subvariedades regradas por subvariedades totalmente de geodésicas de tipo causal bem definido, a seguinte parametrização

$$(1.23) \quad X(s, t_1, \dots, t_m) = \sum_{i=0}^m \phi_i(t_1, \dots, t_m) e_i(s),$$

onde e_0 é uma curva em $M \subset \mathbb{S}_1^n$ e portanto $\langle e_0, e_0 \rangle = 1$

O tipo causal da subvariedade totalmente geodésica que rege a subvariedade M^{m+1} caracteriza as funções $\phi_i, 0 \leq i \leq m$ como se segue:

(i) Subvariedade totalmente geodésica de tipo espaço:

$$\phi_0(r) = \cos(r) \quad \text{e} \quad \phi_i(t_1, \dots, t_m) = \frac{\sin(r)}{r} t_i,$$

donde $\sum_{i=0}^m \phi_i^2 = 1$, e portanto $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)$ é uma parametrização de um aberto de $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, com $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, para todo $1 \leq i \leq m$.

(ii) Subvariedade totalmente geodésica de tipo tempo:

$$\phi_0(r) = \sinh(r) \quad \text{e} \quad \phi_i(t_1, \dots, t_m) = \frac{\cosh(r)}{r} t_i,$$

donde $-\phi_0^2 + \sum_{i=1}^m \phi_i^2 = 1$, e, conseqüentemente, $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)$ é uma parametrização de um aberto de $\mathbb{S}_1^m \subset \mathbb{L}^{m+1}$. Assim existe um único k tal que $\langle e_k, e_k \rangle = -1$ e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $i \neq k$.

(iii) Subvariedade totalmente geodésica de tipo luz:

$$\phi_0(r) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_i(t_1, \dots, t_m) = \frac{t_i}{r},$$

donde $-\phi_0^2 + \sum_{i=1}^m \phi_i^2 = 0$, o que implica que $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)$ é uma parametrização de um aberto do cone de luz em $\mathbb{L}^{m+1}$. Aqui temos um único k tal que $\langle e_k, e_k \rangle = 0$ e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $i \neq k$.

Convém observar que o tipo causal das folhas não determina o tipo causal da subvariedade M . Um exemplo de superfície tipo tempo regradada por geodésicas tipo espaço pode ser encontrado em [14, cap. 1].

8. Hipersuperfícies de Weingarten

Retomemos as definições de tensor de Ricci, curvatura escalar e curvatura média para uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+k}$.

Definição 1.7. O *tensor de Ricci* de uma variedade riemanniana M^n em $p \in M$ é definido por

$$\text{Ric}_p(X, Y) = \text{Tr} (Z \mapsto R(Z, X)Y).$$

e a *curvatura escalar* em $p \in M$, S_p , é definida por

$$n(n-1)S_p = \text{Tr Ric}_p = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(X_i, X_i) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(X_i, X_j)X_i, X_j \rangle = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n K(X_i, X_j),$$

onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Definição 1.8. A *curvatura média* de uma imersão $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+k}$ é o vetor

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(X_i, X_i) \in (T_p M)^\perp,$$

onde $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Pode-se mostrar também que se $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ é base ortonormal de $(T_p M)^\perp$, então

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (\text{Tr } A_{\xi_j}) \xi_j.$$

Como consideramos hipersuperfícies M^n em $\tilde{M}^{n+1}$, se tomamos um referencial ortonormal $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ para $T_p M$, o vetor curvatura média $H(p) \in (T_p M)^\perp$ é um múltiplo do campo normal a M e portanto indicaremos, nesse caso e quando não houver ambigüidade, tanto o escalar $\mathcal{H} = \langle H, H \rangle$ quanto o vetor curvatura média por H .

Definição 1.9. Uma hipersuperfície conexa M^n em $\tilde{M}^{n+1}$ é *de Weingarten* se existe um função diferenciável $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não nula tal que $F(H, S) = 0$, onde H é a curvatura média e S é a curvatura escalar de M^n .

Proposição 1.8. *Nas condições acima temos que $dH \wedge dS = 0$.*

Demonstração: Tomando diferenciais em $F(H, S) = 0$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial H} dH + \frac{\partial F}{\partial S} dS = 0.$$

Fazendo agora o produto exterior com dS e depois com dH obtemos, respectivamente

$$\frac{\partial F}{\partial H} dH \wedge dS = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial S} dS \wedge dH = 0.$$

Qualquer uma destas relações implica que $dH \wedge dS = 0$. □

Superfícies regradas em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}_1^3$

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre superfícies na esfera $\mathbb{S}^3$ e no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$, os quais serão utilizados mais adiante numa classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Observamos que, enquanto não houver ambigüidade, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará tanto o produto interno canônico de $\mathbb{R}^4$ quanto o de $\mathbb{L}^4$, definido em (1.1).

Ao longo deste trabalho usamos a seguinte generalização do produto vetorial de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{L}^4$.

Definição 2.1. Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ (respectivamente $\mathbb{L}^4$). Definimos $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \in \mathbb{R}^4$ (respectivamente $\mathbb{L}^4$) como a única solução de

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge v_3, u \rangle = \det(v_1, v_2, v_3, u).$$

Claramente a aplicação definida acima é trilinear e anti-simétrica. Se v_i é um vetor de $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{L}^4$ e $(v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}), i = 1, 2, 3$ são suas coordenadas na base canônica de $\mathbb{R}^4$ (respectivamente $\mathbb{L}^4$), $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, então o vetor $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ pode ser calculado explicitamente através da fórmula

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = \det \begin{pmatrix} \epsilon e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{pmatrix},$$

onde $\epsilon = 1$ em $\mathbb{R}^4$ e $\epsilon = -1$ em $\mathbb{L}^4$. Observa-se facilmente que $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \in [v_1, v_2, v_3]^\perp$ e $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = 0$ se e somente se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente.

De modo análogo ao que foi feito no capítulo anterior podemos obter as equações para a curvatura seccional de superfícies na esfera $\mathbb{S}^3$ e as de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$, bem como o vetor

curvatura média de tais superfícies. Se $\{X(p), Y(p)\}$ é um referencial ortonormal para $T_p M$ então

$$(2.1) \quad K = 1 + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle$$

$$(2.2) \quad H = \frac{1}{2} \text{Tr } \alpha = \frac{1}{2} (\alpha(X, X) + \alpha(Y, Y))$$

Observe que H é um vetor de tipo tempo no caso de uma superfície de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$.

1. Superfícies regradas em $\mathbb{S}^3$

Nesta seção apresentamos algumas propriedades básicas das superfícies regradas e regradas mínimas em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, que serão úteis no capítulo seguinte.

Se $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície regrada então M pode ser, de acordo com (1.21) e o lema 1.7, parametrizada localmente por

$$(2.3) \quad X(s, t) = \exp_{e_0(s)}(te_1(s)) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t,$$

onde e_0 e e_1 são curvas em $\mathbb{S}^3$ com as seguintes propriedades

$$\langle e'_0(s), e'_0(s) \rangle = 1,$$

$$\langle e_0(s), e_1(s) \rangle = 0,$$

$$\langle e'_0(s), e_1(s) \rangle = 0.$$

Além disso, das definições de e_0 e e_1 e das propriedades acima, segue-se que

$$\langle e'_0(s), e_0(s) \rangle = 0,$$

$$\langle e'_1(s), e_1(s) \rangle = 0,$$

$$\langle e_0(s), e'_1(s) \rangle = 0.$$

Assim, temos que

$$\langle X_s, X_s \rangle = \cos^2 t + 2\langle e'_0, e'_1 \rangle \sin t \cos t + \langle e'_1, e'_1 \rangle \sin^2 t,$$

$$\langle X_t, X_t \rangle = 1,$$

$$\langle X_t, X_s \rangle = 0.$$

Nos cálculos que se seguem consideraremos o referencial ortonormal de $\mathbb{R}^4$, adaptado à superfície M dado por

$$(2.4) \quad \{X_t, \overline{X_s}, X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X, X\},$$

onde $\overline{X_s} = \frac{X_s}{A(s, t)}$ e $A(s, t) = \sqrt{\langle X_s, X_s \rangle}$. Note que o campo unitário $X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X$ é normal a M e tangente a $\mathbb{S}^3$.

Denotando respectivamente por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\mathbb{S}^3$ podemos escrever a segunda forma fundamental da imersão conforme (1.2)

$$\begin{aligned}\alpha(X_s, X_s) &= \nabla_{X_s} X_s - \frac{1}{A^2(s, t)} \langle \nabla_{X_s} X_s, X_s \rangle X_s - \langle \nabla_{X_s} X_s, X_t \rangle X_t - \langle \nabla_{X_s} X_s, X \rangle X \\ &= X_{ss} - \frac{1}{A^2(s, t)} \langle X_{ss}, X_s \rangle X_s - \langle X_{ss}, X_t \rangle X_t - \langle X_{ss}, X \rangle X \\ &= X_{ss} - \frac{A_s(s, t)}{A(s, t)} X_s + A_t(s, t) A(s, t) X_t + A^2(s, t) X.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\alpha(X_t, X_t) &= X_{tt} - \frac{1}{A^2(s, t)} \langle X_{tt}, X_s \rangle X_s - \langle X_{tt}, X_t \rangle X_t - \langle X_{tt}, X \rangle X = 0 \text{ e} \\ \alpha(X_s, X_t) &= X_{st} - \frac{1}{A^2(s, t)} \langle X_{st}, X_s \rangle X_s - \langle X_{st}, X_t \rangle X_t - \langle X_{st}, X \rangle X \\ &= X_{st} - \frac{A_t(s, t)}{A(s, t)} X_s.\end{aligned}$$

Usando a equação de Gauss (2.1), temos que a curvatura seccional de M é

$$(2.5) \quad K(\overline{X_s}, X_t) = 1 - \langle \alpha(\overline{X_s}, X_t), \alpha(\overline{X_s}, X_t) \rangle = 1 - \frac{\langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_s, X_t) \rangle}{A^2(s, t)}.$$

Usando as expressões acima obtidas para $\alpha(X_s, X_s)$ e $\alpha(X_t, X_t)$ em (2.2) temos que a curvatura média de M é dada por

$$(2.6) \quad H = \frac{1}{2} \text{Tr } \alpha = \frac{1}{2A^2(s, t)} \alpha(X_s, X_s).$$

Escrevendo $\alpha(X_s, X_s)$ e $\alpha(X_s, X_t)$ no referencial (2.4) obtemos

$$\begin{aligned}\alpha(X_s, X_s) &= \langle X_{ss}, X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X \rangle X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X \text{ e} \\ \alpha(X_s, X_t) &= \langle X_{st}, X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X \rangle X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X.\end{aligned}$$

Lembrando que $X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X$ é unitário, obtemos as seguintes expressões para as curvaturas seccional e média da superfície em termos da parametrização (2.3)

$$(2.7) \quad K = 1 - \frac{\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{A^4(s, t)} \leq 1 \text{ e}$$

$$(2.8) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{4A^6(s, t)} \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2$$

onde $\mathcal{H} = \langle H, H \rangle \geq 0$.

Podemos escrever $X_t \wedge X_s \wedge X$ em termos das curvas e_0 e e_1 , obtendo

$$(2.9) \quad X_t \wedge X_s \wedge X = \cos t(e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0) + \sin t(e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0)$$

e, com isso,

$$\begin{aligned}\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= -\langle e'_0, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle e \\ \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= \cos^2 t \langle e''_0, e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0 \rangle + \\ &\quad \cos t \sin t (\langle e''_0, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle + \langle e''_1, e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0 \rangle) + \\ &\quad \sin^2 t \langle e''_1, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle.\end{aligned}$$

Agora definimos as seguintes funções

$$\begin{aligned}(2.10) \quad Q(s) &= \langle e'_0, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle, \\ R(s) &= \langle e''_0, e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0 \rangle, \\ S(s) &= \langle e''_1, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle, \\ T(s) &= \langle e''_1, e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0 \rangle e \\ U(s) &= \langle e''_0, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle\end{aligned}$$

que, substituídas nas equações (2.7) e (2.8), nos permitem escrever

$$(2.11) \quad K = 1 - \frac{Q^2(s)}{A^4(s, t)} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = \frac{h^2(s, t)}{4A^6(s, t)},$$

onde $h(s, t) = R(s) \cos^2 t + S(s) \sin^2 t + (T(s) + U(s)) \sin t \cos t$.

1.1. Superfícies regradas mínimas em $\mathbb{S}^3$. Apresentamos aqui um resultado de classificação das superfícies regradas mínimas na esfera $\mathbb{S}^3$ que se encontra em [10, p. 352]. Reproduzimos aqui a demonstração deste resultado pois notamos a omissão, na equação das superfícies regradas mínimas em $\mathbb{S}^3$, do termo de derivada de primeira ordem na variável s .

Se M^2 é uma superfície regrada em $\mathbb{S}^3$ então podemos parametrizá-la como em (2.3) e sua curvatura média é dada por (2.6). Uma superfície, em geral uma subvariedade de uma variedade riemanniana (respectivamente semi-riemanniana), é chamada *mínima* (respectivamente *máxima*) se $H = 0$.

Para efeitos de simplicidade nos cálculos consideramos a função $A(s, t) = \langle X_s, X_s \rangle$, ao invés de $A(s, t) = \sqrt{\langle X_s, X_s \rangle}$ como definido anteriormente.

Uma superfície é mínima em $\mathbb{S}^3$ se, e somente se,

$$\Delta_M X = -2X,$$

onde Δ_M é o laplaciano ao longo da superfície, cuja expressão em termos das coordenadas para a parametrização utilizada é

$$\Delta_M f = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A} \sqrt{A} f_s \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{A} f_t) \right],$$

para toda função $f \in C^2(M)$ (vide [11, p. 15]). Deste modo a equação das superfícies mínimas regradas em $\mathbb{S}^3$ escreve-se

$$(2.12) \quad \frac{1}{A} X_{ss} + \frac{A_t}{2A} X_t - \frac{A_s}{2A^2} X_s = -X,$$

já que $X_{tt} = -X$. Observe que esta equação é equivalente a $\alpha(X_s, X_s) = 0$, pois, nesta parametrização, temos $\alpha(X_t, X_t) = 0$.

Fazendo o produto interno com $e'_0(s)$ em ambos os membros da equação (2.12) obtemos

$$2A\langle X_{ss}, e'_0 \rangle - A_s\langle X_s, e'_0 \rangle = 0,$$

uma vez que $\langle X_t, e'_0 \rangle = \langle X, e'_0 \rangle = 0$.

Expandindo os termos da expressão acima obtemos um polinômio em $\sin^2 t, \cos^2 t$ e $\sin t \cos t$ identicamente nulo. Como tais funções são linearmente independentes os coeficientes desse polinômio são nulos, a saber

$$(2.13) \quad \langle e'_0, e''_1 \rangle - \langle e'_0, e'_1 \rangle' = 0$$

$$(2.14) \quad \langle e'_1, e'_1 \rangle \langle e'_0, e''_1 \rangle - \langle e'_1, e''_1 \rangle \langle e'_0, e'_1 \rangle = 0$$

$$(2.15) \quad 2\langle e'_0, e'_1 \rangle \langle e'_0, e''_1 \rangle - \langle e'_1, e''_1 \rangle - \langle e'_0, e'_1 \rangle \langle e'_0, e'_1 \rangle' = 0$$

A equação (2.13) acima mostra que

$$(2.16) \quad \langle e''_0, e'_1 \rangle = 0,$$

enquanto que, com isso, (2.15) equivale a

$$(2.17) \quad \langle e''_1, e'_1 \rangle = \langle e'_0, e'_1 \rangle \langle e'_0, e''_1 \rangle.$$

Consideremos agora dois casos:

- Suponha que $\langle e'_0, e'_1 \rangle^2 - \langle e'_1, e'_1 \rangle = 0$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue-se que $\{e'_0, e'_1\}$ é linearmente dependente e, como $e'_0 \neq 0$, temos $e'_1(s) = \lambda(s)e'_0(s)$. Definindo $\eta(s) = e_0 \wedge e'_0 \wedge e_1$ temos

$$(2.18) \quad \eta'(s) = e'_0 \wedge e'_0 \wedge e_1 + e_0 \wedge e''_0 \wedge e_1 + e_0 \wedge e'_0 \wedge e'_1 = e_0 \wedge e''_0 \wedge e_1.$$

Além disso, como η é unitário temos que η' é ortogonal a η e de sua expressão temos que é ortogonal a e_0 a e_1 . Logo

$$(2.19) \quad \eta'(s) = \langle e'_0, \eta' \rangle e'_0,$$

já que $\{e_0, e'_0, e_1, \eta\}$ é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^4$ adaptado à superfície.

Por outro lado, a aplicação normal de Gauss da superfície, N , é um vetor unitário na direção de $X \wedge X_s \wedge X_t$, cuja expressão, a menos de sinal, em termos de e_0 e e_1 é dada em (2.9). Sob a hipótese que estamos isso equivale a

$$X \wedge X_s \wedge X_t = (\cos t + \lambda \sin t) e_0 \wedge e'_0 \wedge e_1.$$

Como η é unitário, o campo normal unitário à superfície, a menos de orientação, é $N = \eta$ e portanto $dN = \eta'$.

Como a superfície é mínima então $\text{Tr } dN \equiv 0$. Ou seja,

$$\langle dN(e'_0), e'_0 \rangle + \langle dN(e_1), e_1 \rangle = 0,$$

pois $\{e'_0, e_1\}$ é uma base ortonormal para o espaço tangente.

Lembrando que η' é ortogonal a e_1 temos que a equação acima reduz-se a $\langle \eta', e'_0 \rangle = 0$, donde $\langle \eta, e''_0 \rangle = 0$, isto é e''_0 está no plano gerado por e_0 e e_1 . Deste modo, a equação (2.18) mostra que $\eta' = 0$, ou seja, $dN = 0$ e portanto a superfície é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^3$.

- Agora, se $\langle e'_0, e'_1 \rangle^2 - \langle e'_1, e'_1 \rangle$ não se anula num ponto, então não se anula numa vizinhança desse ponto. As equações (2.14) e (2.17) mostram que

$$(\langle e'_0, e'_1 \rangle^2 - \langle e'_1, e'_1 \rangle) \langle e'_1, e''_1 \rangle = 0,$$

isto é $\langle e'_1, e''_1 \rangle = 0$ e portanto, de (2.14), $\langle e'_0, e''_1 \rangle = 0$, ou seja, $\langle e'_1, e'_1 \rangle$ e $\langle e'_0, e'_1 \rangle$ são constantes, digamos k e l respectivamente, nessa vizinhança. Lembramos que $k > 0$.

Trocando então t por $\tilde{t} + t_0$ em (2.3) obtemos

$$X(s, \tilde{t} + t_0) = (e_0 \cos t_0 + e_1 \sin t_0) \cos \tilde{t} + (e_0 \sin t_0 + e_1 \cos t_0) \sin \tilde{t}.$$

A superfície parametrizada por

$$\tilde{X}(s, \tilde{t}) = \tilde{e}_0(s) \cos \tilde{t} + \tilde{e}_1(s) \sin \tilde{t},$$

onde $\tilde{e}_0(s) = e_0 \cos t_0 + e_1 \sin t_0$ e $\tilde{e}_1(s) = e_0 \sin t_0 + e_1 \cos t_0$ também verifica as equações (2.13), (2.14) e (2.15) e as curvas $\tilde{e}_0$ e $\tilde{e}_1$ verificam as condições logo abaixo de (2.12). Assim,

$$\langle \tilde{e}'_0, \tilde{e}'_1 \rangle = \cos t_0 \sin t_0 (1 + k) + l.$$

Como $\langle e'_0, e'_1 \rangle^2 - \langle e'_1, e'_1 \rangle \neq 0$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que $\langle e'_0, e'_1 \rangle^2 < \langle e'_1, e'_1 \rangle$, ou seja, $l^2 < k$.

Afirmamos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \tilde{e}'_0, \tilde{e}'_1 \rangle = 0$. De fato, isto equivale a encontrar t_0 tal que $\sin(2t_0) = -2l/(1+k)$, isto é, $-2l/(1+k) \in [-1, 1]$ ou ainda, $-2l \in [-1-k, 1+k]$. Como $l^2 < k$ temos que $[-1-l^2, 1+l^2] \subset [-1-k, 1+k]$. Claramente $-2l \in [-1-l^2, 1+l^2]$, donde concluímos que a afirmação é verdadeira.

Para tal escolha de $t_0 \in \mathbb{R}$ temos $\langle \tilde{e}'_0, \tilde{e}'_1 \rangle = 0$ e $\langle \tilde{e}'_1, \tilde{e}'_1 \rangle = \alpha$ para alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Em qualquer um dos casos acima podemos escolher uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ na qual

$$e_0(s) = (\cos s, \sin s, 0, 0) \quad \text{e} \quad e_1(s) = (0, 0, \cos \alpha s, \sin \alpha s)$$

e, com isso, provamos o resultado abaixo.

Teorema 2.1. *Toda superfície mínima regrada em $\mathbb{S}^3$ pode ser localmente parametrizada por*

$$X(s, t) = (\cos \alpha s \cos t, \sin \alpha s \cos t, \cos s \sin t, \sin s \sin t),$$

onde α é uma constante real.

Além disso, cálculo diretos mostram que para uma superfície mínima regrada em $\mathbb{S}^3$, parametrizada como acima temos a curvatura gaussiana dada por

$$K = 1 - \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)\cos(2t) + \alpha^2 + 1}.$$

2. Superfícies regradas de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$

Aqui apresentamos alguns resultados análogos aos da seção anterior, porém quando o espaço ambiente é $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{L}^4$.

Se M é uma superfície regrada de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ então, conforme (1.23) e o lema 1.7 podemos parametrizar M localmente por

$$(2.20) \quad X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t,$$

onde e_0 e e_1 são curvas em $\mathbb{S}_1^3$ satisfazendo as mesmas propriedades que os objetos correspondentes no caso de superfícies regradas em $\mathbb{S}^3$. Destacamos que o produto interno em questão é o de $\mathbb{L}^4$.

Com isso temos que

$$\begin{aligned} \langle X_s, X_s \rangle &= \cos^2 t + 2\langle e'_0, e'_1 \rangle \sin t \cos t + \langle e'_1, e'_1 \rangle \sin^2 t \\ \langle X_t, X_t \rangle &= 1 \\ \langle X_t, X_s \rangle &= 0 \end{aligned}$$

O referencial de $\mathbb{L}^4$, adaptado a M , utilizado nos cálculos seguintes é

$$(2.21) \quad \{X_t, \overline{X_s}, X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X, X\}$$

onde $\overline{X_s} = \frac{X_s}{A(s, t)}$ e $A(s, t) = \sqrt{\langle X_s, X_s \rangle}$. Observamos também que $X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X$ é um campo unitário normal a M e tangente a $\mathbb{S}_1^3$, sendo portanto de tipo tempo.

Como no caso da esfera, denotamos respectivamente por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\mathbb{S}_1^3$. Lembrando que $X_t, \overline{X_s}$ e X são campos de tipo espaço temos as expressões para a segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} \alpha(X_t, X_t) &= 0, \\ \alpha(X_s, X_s) &= X_{ss} - \frac{A_s(s, t)}{2A(s, t)}X_s + \frac{A_t(s, t)}{2}X_t + AX \text{ e} \\ \alpha(X_s, X_t) &= X_{st} - \frac{A_t(s, t)}{2A(s, t)}X_s. \end{aligned}$$

Com isso e as equações de Gauss (2.1) e da curvatura média (2.2) temos

$$(2.22) \quad K = 1 - \frac{\langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_s, X_t) \rangle}{A^2(s, t)}$$

$$(2.23) \quad H = \frac{1}{2A^2(s, t)}\alpha(X_s, X_s)$$

Observando que $\alpha(X_s, X_s)$ e $\alpha(X_s, X_t)$ são campos de tipo tempo, suas expressões no referencial (2.21) são

$$\begin{aligned}\alpha(X_s, X_s) &= -\langle X_{ss}, X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X \rangle X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X \text{ e} \\ \alpha(X_s, X_t) &= -\langle X_{st}, X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X \rangle X_t \wedge \overline{X_s} \wedge X.\end{aligned}$$

Assim, as expressões da curvatura seccional e média são

$$(2.24) \quad K = 1 + \frac{\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{A^4(s, t)}$$

$$(2.25) \quad \mathcal{H} = \frac{-1}{4A^6(s, t)} \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2$$

onde $\mathcal{H} = \langle H, H \rangle \leq 0$.

Escrevendo, como na seção anterior, $X_t \wedge X_s \wedge X$ em termos das curvas e_0 e e_1 obtemos

$$X_t \wedge X_s \wedge X = \cos t(e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0) + \sin t(e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= -\langle e'_0, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle \text{ e} \\ \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= \cos^2 t \langle e''_0, e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0 \rangle + \\ &\quad \cos t \sin t (\langle e''_0, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle + \langle e''_1, e_1 \wedge e'_0 \wedge e_0 \rangle) + \\ &\quad \sin^2 t \langle e''_1, e_1 \wedge e'_1 \wedge e_0 \rangle.\end{aligned}$$

Definindo funções $Q(s), R(s), S(s), T(s), U(s)$ como em (2.10) temos

$$(2.26) \quad K = 1 + \frac{Q^2(s)}{A^2(s, t)} \text{ e } \mathcal{H} = \frac{-h^2(s, t)}{4A^3(s, t)},$$

onde $h(s, t) = R(s) \cos^2 t + S(s) \sin^2 t + (T(s) + U(s)) \sin t \cos t$.

2.1. Superfícies regradas mínimas de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$. Para classificar as superfícies regradas mínimas de tipo espaço no espaço de De Sitter de dimensão 3, observamos que a equação que tais superfícies devem satisfazer é a mesma obtida no caso esférico, a saber $\alpha(X_s, X_s) = 0$, ou equivalentemente a expressão (2.12).

Deste modo as curvas $e_0(s)$ e $e_1(s)$ na parametrização (2.20) são curvas em $\mathbb{S}_1^3$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\langle e_0, e_0 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle &= 1 \\ \langle e'_0, e'_0 \rangle &= 1 \\ \langle e_0, e_1 \rangle &= 0 \\ \langle e'_0, e_1 \rangle = \langle e_0, e'_1 \rangle &= 0\end{aligned}$$

Aqui devemos ter $\langle e'_1, e'_1 \rangle < 0$, pois $\{e_0, e_1, e'_0\}$ gera um subespaço $W \subset \mathbb{L}^4$ de tipo espaço de dimensão 3 e portanto $W^\perp$ é subespaço unidimensional de tipo tempo, com $e'_1 \in W^\perp$.

Procedendo como no caso das superfícies mínimas em $\mathbb{S}^3$ obtemos as equações (2.13), (2.14) e (2.15) que são equivalentes a

$$(2.27) \quad \langle e_0'', e_1' \rangle = 0$$

$$(2.28) \quad \langle e_1', e_1' \rangle \langle e_0', e_1'' \rangle - \langle e_1', e_1'' \rangle \langle e_0', e_1' \rangle = 0$$

$$(2.29) \quad \langle e_0', e_1' \rangle \langle e_0', e_1'' \rangle - \langle e_1', e_1'' \rangle = 0$$

Definindo $f(s) = \langle e_0', e_1' \rangle$ e $g(s) = \langle e_1', e_1' \rangle < 0$, as equações (2.28) e (2.29) escrevem-se

$$g(s)f'(s) - \frac{g'(s)}{2}f(s) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{g'(s)}{2} = f(s)f'(s).$$

A segunda destas identidades nos mostra que $g(s) = f^2(s) + C, C \in \mathbb{R}$. Isto substituído em $g(s)f'(s) - \frac{g'(s)}{2}f(s) = 0$ mostra que $Cf'(s) = 0$. Como $g(s) < 0$ então $C \neq 0$, donde $f'(s) = 0$ ou seja $f(s)$ é constante e portanto $g(s)$ também é constante.

Fazendo uma translação no parâmetro t , como no caso esférico, podemos supor que $\langle e_0', e_1' \rangle = 0$ e $\langle e_1', e_1' \rangle = -\alpha^2$.

Assim, existe referencial ortonormal de $\mathbb{L}^4$ onde podemos escrever

$$e_0(s) = (0, 0, \cos s, \sin s) \quad \text{e} \quad e_1(s) = (\sinh \alpha s, \cosh \alpha s, 0, 0).$$

Com isso provamos o resultado abaixo.

Teorema 2.2. *Toda superfície mínima regrada em $\mathbb{S}_1^3$ pode ser localmente parametrizada por*

$$X(s, t) = (\sinh \alpha s \sin t, \cosh \alpha s \sin t, \cos s \cos t, \sin s \cos t),$$

onde α é uma constante real.

A curvatura gaussiana de uma superfície regrada e mínima de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ é

$$K = 1 + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1 + (\alpha^2 + 1) \cos(2t)}.$$

Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$

Neste capítulo apresentamos uma classificação para superfícies regradas e de Weingarten no espaço hiperbólico. Para tanto fazemos algumas observações que nos permitem aplicar os resultados enunciados anteriormente.

Observação 3.1. Se M^n , com $n \geq 3$, é uma hipersuperfície regrada e conexa de $\mathbb{H}^{n+1}$, então o aberto U dos pontos de M onde a curvatura escalar é diferente de -1 coincide com o aberto V dos pontos $p \in M$ onde a curvatura seccional é diferente de -1 , ou seja, existe um subespaço bidimensional σ de $T_p M$ tal que $K_p(\sigma) \neq -1$.

De fato, se $K_p(\sigma) = -1$ para todo subespaço bidimensional σ de $T_p M$ então $S(p) = -1$ e portanto $U \subset V$. Para verificar a outra inclusão, consideramos $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ campos ortonormais em TM tais que $Y_i(p) \in \Delta(p)$ para $1 \leq i \leq n-1$, onde $\Delta(p)$ é a distribuição de nulidade relativa em p . Em outras palavras, os campos $Y_i, 1 \leq i \leq n-1$, são tangentes às subvariedades que regram M . Portanto $\alpha(Y_i, Y_j) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n-1$.

Usando a equação de Gauss (1.7), temos

$$\begin{aligned} K(Y_i, Y_j) &= -1, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n-1, i \neq j \text{ e} \\ K(Y_i, Y_n) &= -1 - \|\alpha(Y_i, Y_n)\|^2 \leq -1, \text{ para } 1 \leq i < n. \end{aligned}$$

Como $K_p(\sigma) \leq -1$ para todo subespaço bidimensional σ , então

$$S(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n K(Y_i, Y_j) \leq -1.$$

Deste modo, se existe $\sigma \subset T_p M$ tal que $K_p(\sigma) < -1$ então $\sigma = [Y_i, Y_n]$ para algum $1 \leq i \leq n-1$ e, nesse caso, $S(p) < -1$.

Observação 3.2. Se M^n , com $n \geq 3$, é uma hipersuperfície regrada e conexa de $\mathbb{H}^{n+1}$ e $p \in M$ então $S(p) \neq -1$ se e somente se o índice de nulidade relativa de M é $\nu = n-2$.

De fato, tomando $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ campos como na observação anterior e indicando por $A = (a_{ij})$ a matriz do operador de Weingarten de M temos que $a_{ij} = \langle A(Y_i), Y_j \rangle$. Lembrando que $\langle A(Y_i), Y_j \rangle = \langle \alpha(Y_i, Y_j), \eta \rangle$, onde η é o campo normal a M em $\mathbb{H}^{n+1}$ concluímos que $a_{ij} = 0$, sempre que $1 \leq i, j \leq n-1$ e portanto a matriz A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \langle AY_1, Y_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle AY_{n-1}, Y_n \rangle \\ \langle AY_n, Y_1 \rangle & \dots & \langle AY_n, Y_{n-1} \rangle & \langle AY_n, Y_n \rangle \end{bmatrix},$$

donde conclui-se facilmente que as primeiras $n-1$ colunas são linearmente dependentes, ou seja, $\text{posto } A \leq 2$. Como $\nu = \text{Ker } A$ e $n = \text{Ker } A + \text{Posto } A$, temos $\nu = n - \text{Posto } A \geq n-2$.

Se $p \in M$ satisfaz $S(p) \neq -1$ então $K_p(\sigma) \neq -1$ para algum subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ e, pela observação anterior, temos que existe um Y_i tal que $\alpha(Y_i, Y_n) \neq 0$, ou seja, $\langle A(Y_i), Y_n \rangle$ é não nulo e portanto alguma das $n-1$ primeiras colunas e a última coluna são ambas não nulas e linearmente independentes, donde $\text{Posto } A = 2$ e $\nu = n-2$.

Reciprocamente, se a imersão tem índice de nulidade relativa constante, $\nu = n-2$, então podemos considerar campos ortonormais $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ em TM tais que, em cada $p \in M$, $\{Z_1(p), \dots, Z_{n-2}(p)\}$ geram o espaço de nulidade relativa $\Delta(p) \subset T_p M$. Com isso temos $a_{ij} = \langle A(Z_i), Z_j \rangle = \langle \alpha(Z_i, Z_j), \eta \rangle = 0$, se $1 \leq i, j \leq n-2$, donde a matriz do operador de Weingarten tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle AZ_{n-1}, Z_{n-1} \rangle & \langle AZ_{n-1}, Z_n \rangle \\ 0 & \dots & 0 & \langle AZ_n, Z_{n-1} \rangle & \langle AZ_n, Z_n \rangle \end{bmatrix}$$

Como, por hipótese, o $\text{Posto } A = 2$ devemos ter

$$\langle AZ_{n-1}, Z_{n-1} \rangle \langle AZ_n, Z_n \rangle - \langle AZ_n, Z_{n-1} \rangle \langle AZ_{n-1}, Z_n \rangle \neq 0$$

e, da equação de Gauss (1.7) temos $K(p) \neq -1$ e portanto $S(p) \neq -1$.

Em vista das observações acima e do teorema 1.6, podemos parametrizar, numa vizinhança de um ponto com curvatura seccional diferente de -1 , qualquer hipersuperfície regrada M^n de $\mathbb{H}^{n+1}$ utilizando o fibrado normal unitário de uma imersão riemanniana $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$, a qual parametriza a aplicação normal de Gauss da hipersuperfície. Neste

caso a aplicação normal de Gauss é paralela ao longo das subvariedades integrais da distribuição de nulidade relativa como mostra a equação (1.20).

A seguir estabelecemos algumas propriedades da imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$.

Proposição 3.1. *Sejam $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície conexa, regradada e orientada com índice de nulidade relativa $\nu = n - 2$ e $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ a imersão riemanniana descrita acima. Então $g(V)$ é uma superfície regradada de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$.*

Demonstração: Usando (1.22), podemos parametrizar localmente a hipersuperfície M^n por

$$X(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(t_1, \dots, t_{n-1}) e_i(s),$$

onde $p = e_0$ é o vetor posição em $\mathbb{H}^{n+1}$, isto é $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$, $\{e'_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ geram $T_p M$ e a nulidade relativa em cada espaço tangente é gerada por $\{e_2, \dots, e_{n-1}\}$. Podemos escrever a aplicação normal de Gauss, $\eta : M \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ como $\eta(p) = \frac{\xi(p)}{\|\xi(p)\|}$, onde

$$\xi(p) = X_s \wedge X_{t_1} \wedge \dots \wedge X_{t_{n-1}} \wedge X \in \mathbb{L}^{n+2}.$$

Tal escolha é adequada pois, deste modo, $\xi(p) \in T_p M^\perp \cap [p]^\perp$ que é um subespaço de $T_p \mathbb{H}^{n+1}$ e portanto de tipo espaço, donde $\|\xi\| > 0$. Das expressões de X_s, X_{t_i} e X temos que

$$\xi = F(\phi_1, \dots, \phi_{n-1}) e_0 \wedge \dots \wedge e_{n-1},$$

onde F é uma função a valores reais que depende exclusivamente de $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Para cada $s = s_0$ fixado, a imagem da aplicação de Gauss da folha de M que passa por $p = e_0(s_0)$ é ortogonal ao subespaço $P_1(s_0) = [e_0(s_0), \dots, e_{n-1}(s_0)]$, que é de tipo tempo e dimensão n em $\mathbb{L}^{n+2}$. Portanto a aplicação normal de Gauss neste ponto está contida num plano $P_2(s_0) = P_1(s_0)^\perp$ de tipo espaço e dimensão 2 em $\mathbb{L}^{n+2}$.

Observamos que $\mathbb{S}_1^{n+1} \cap P_2(s_0)$ é uma geodésica de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e que η é parametrizada por g . Assim g é uma superfície de tipo espaço regradada por estas geodésicas de tipo espaço. $\square$

Como a imersão g acima é de tipo espaço podemos então escolher um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ adaptado à imersão g tal que $e_1(y) \in T_y V$ seja tangente à geodésica de tipo espaço que rege a imersão em $y \in V$, $e_2(y) \in T_y V$ e o conjunto $\{e_3(y), \dots, e_{n+1}(y)\} \in T_y V^\perp$ gera um subespaço de tipo tempo para cada $y \in V$.

Denotando por θ a segunda forma fundamental de g temos que $\theta(e_1, e_1) = 0$ e, em relação a este referencial, os operadores de Weingarten nas direções normais a g são dados por

$$(3.1) \quad B_{e_j} = \begin{bmatrix} \langle \theta(e_1, e_1), e_j \rangle & \langle \theta(e_1, e_2), e_j \rangle \\ \langle \theta(e_2, e_1), e_j \rangle & \langle \theta(e_2, e_2), e_j \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_j \\ \beta_j & \lambda_j \end{bmatrix}, \text{ para } 3 \leq j \leq n+1$$

Com isso podemos calcular as curvaturas média e escalar de M^n em termos dos operadores de Weingarten de g . Se $\{X_1, \dots, X_n\}$ são campos ortonormais em TM , tais que $\{X_1(p), \dots, X_{n-2}(p)\}$ geram a nulidade relativa de M em $p = (y, w)$, então o teorema 1.6 nos dá as seguintes expressões para as curvaturas média e escalar de M em p :

$$(3.2) \quad H(y, w) = \frac{1}{n} \text{Tr } A = \frac{1}{n} \text{Tr } B_w^{-1}(y) = \frac{\text{Tr } B_w(y)}{n \det B_w(y)}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} S(y, w) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n K(X_i, X_j) \\ &= -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n (\langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle - \|\alpha(X_i, X_j)\|^2) \\ &= -1 + \frac{2}{n(n-1)} \det(A(y)) \\ &= -1 + \frac{2}{n(n-1)} \det(B_w^{-1}(y)) \\ &= -1 + \frac{2}{n(n-1)} \det(B_w(y))^{-1} \end{aligned}$$

O par (y, w) é tal que $y = (y_1, y_2) \in V$ e $w = (l_3, \dots, l_{n+1})$ é um vetor unitário normal à imersão g , isto é $w = \sum \varepsilon_j l_j e_j$, com $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$ e existe $3 \leq k \leq n+1$ tal que $-l_k^2 + \sum_{j \neq k} l_j^2 = -1$.

Se, além de regradada, M é de Weingarten então $dH \wedge dS = 0$ e, de (3.2) e (3.3), segue-se que

$$(3.4) \quad d\left(\sum l_j \lambda_j\right) \wedge d\left(\sum l_j \beta_j\right) = 0.$$

Da definição 1.4 temos que o primeiro espaço normal de g em cada ponto é dado por

$$N_1^g(y) = [\theta(e_1, e_2), \theta(e_2, e_2)],$$

donde concluímos que $\dim N_1^g(y) \leq 2$ para todo $y \in V$.

Observamos que se $\dim N_1^g = 0$ então $\theta \equiv 0$, donde $B_w \equiv 0$, para todo w , o que contradiz o fato da aplicação Ψ do teorema 1.6 ser uma imersão. Vejamos agora que $\dim N_1^g(y) = 1$, para todo $y \in V$.

Lema 3.2. *Seja $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma superfície regradada tipo espaço que parametriza uma hipersuperfície regradada e de Weingarten, $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$, com índice de nulidade relativa constante $\nu = n - 2$. Então $\dim N_1^g \equiv 1$.*

Demonstração: Em vista das observações acima basta verificar que $\dim N_1^g < 2$. Suponhamos então que $\dim N_1^g(y_0) = 2$, para algum y_0 em V^2 . Então existe uma vizinhança aberta V_0 de y_0 na qual $\dim N_1^g = 2$. Sem perda de generalidade temos que $\{e_3, e_4\}$ é um referencial ortonormal para N_1^g em cada ponto dessa vizinhança.

Nesta base temos

$$\begin{aligned} \theta(e_1, e_2) &= \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 & \text{e} & & \theta(e_2, e_2) &= \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4, \text{ ou} \\ \theta(e_1, e_2) &= \pm \lambda_3 e_3 \mp \lambda_4 e_4 & \text{e} & & \theta(e_2, e_2) &= \pm \beta_3 e_3 \mp \beta_4 e_4, \end{aligned}$$

respectivamente se $\{e_3, e_4\}$ é um referencial de tipo espaço ou se $\{e_3, e_4\}$ é um referencial onde um dos vetores é de tipo tempo.

Nesse contexto, a equação 3.4 escreve-se

$$(3.5) \quad d(l_3 \lambda_3 + l_4 \lambda_4) \wedge d(l_3 \beta_3 + l_4 \beta_4) = 0 \quad \text{ou} \quad d(\pm l_3 \lambda_3 \mp l_4 \lambda_4) \wedge d(\pm l_3 \beta_3 \mp l_4 \beta_4) = 0$$

Os campos coordenados ∂y_1 e ∂y_2 são tangentes à superfície e portanto de tipo espaço enquanto que $\partial l_3, \dots, \partial l_{n+1}$ podem ser de tipo espaço ou tempo. Se ∂l_k for de tipo espaço temos $dl_j(\partial l_k) = \delta_{jk}$, e, se for de tipo tempo, temos $dl_j(\partial l_k) = -\delta_{jk}$, onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Em qualquer caso as equações em (3.5) aplicadas ao par $(\partial l_3, \partial l_4)$ resultam em

$$(3.6) \quad \lambda_3 \beta_4 - \lambda_4 \beta_3 = 0,$$

ou seja, $\theta(e_1, e_2)$ e $\theta(e_2, e_2)$ são linearmente dependentes e portanto $\dim N_1^g \equiv 1$ □

Lema 3.3. *Seja $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão como acima. Então $N_1^g(y)$ tem o mesmo tipo causal para todo $y \in V^2$.*

Demonstração: Observamos inicialmente que $\dim N_1^g \equiv 1$ e que se $N_1^g(y_1)$ e $N_1^g(y_2)$ são subespaços, de tipo espaço e de tipo tempo respectivamente, de $T_{g(y_1)} \mathbb{S}_1^{n+1}$, então existe $\bar{y} \in V^2$ tal que $N_1^g(\bar{y})$ é tipo luz. Mostremos então que não existe $\bar{y} \in V^2$ tal que $N_1^g(\bar{y})$ é tipo luz.

Seja $v(y)$ um gerador unitário de $N_1^g(y)$, $y \in V^2$, isto é $\langle v(y), v(y) \rangle = 1$ se $N_1^g(y)$ é tipo espaço e $\langle v(y), v(y) \rangle = -1$ se $N_1^g(y)$ é tipo tempo. Observamos que o tipo causal de $N_1^g(y)$ é o mesmo de $v(y)$.

Suponha que $y_0 \in V^2$ é tal que $N_1^g(y_0)$ é tipo espaço (respectivamente tipo tempo). Então existe vizinhança maximal U de y_0 tal que $N_1^g(y)$ é tipo espaço (tempo) para todo $y \in U$. Sejam então $\bar{y} \in \partial U \cap g(V^2)$ e $\{y_n\}$ uma seqüência em U que converge para $\bar{y}$. Como $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{L}^{n+2}$ então $\bar{y} \in \mathbb{S}_1^{n+1}$. Se $N_1^g(y_0)$ é tipo espaço (tempo) então $N_1^g(y_n)$ é tipo espaço (tempo) para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo temos

$$\pm 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v(y_n), v(y_n) \rangle = \langle v(\bar{y}), v(\bar{y}) \rangle,$$

onde o sinal é determinado pelo caráter causal de $v(y_n)$.

O argumento acima também mostra que se $y_0 \in V^2$ é tal que $N_1^g(y_0)$ é tipo luz então todos os pontos de V^2 devem ter primeiro espaço normal com este tipo causal. □

Lema 3.4. *O primeiro espaço normal da imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ acima, N_1^g , define um subfibrado paralelo de $TV^\perp$.*

Demonstração: O primeiro espaço normal da imersão g pode ser de tipo espaço, tempo ou luz. Nas condições acima temos que

$$N_1^g = \{\theta(X, Y) : X, Y \in TM\} = [\theta(e_1, e_2), \theta(e_2, e_2)].$$

A proposição 3.2 mostra que $\dim N_1^g \equiv 1$ e portanto temos que, em cada ponto $y \in V$, existem constantes reais, a e b , não ambas nulas, tais que

$$a\theta(e_1, e_2) + b\theta(e_2, e_2) = 0.$$

Vamos supor que $b \neq 0$ e portanto

$$(3.7) \quad \theta(e_2, e_2) = \lambda\theta(e_1, e_2).$$

A equação de Codazzi, (1.12), quando $X = Z = e_1$ e $Y = e_2$ nos dá

$$\nabla_{e_1}^\perp \theta(e_2, e_1) - \theta(\nabla_{e_1} e_2, e_1) - \theta(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = \nabla_{e_2}^\perp \theta(e_1, e_1) - \theta(\nabla_{e_2} e_1, e_1) - \theta(e_1, \nabla_{e_2} e_1).$$

Como o campo e_1 é tangente à geodésica que rege a imersão g , temos $\theta(e_1, e_1) = 0$ e $\nabla_{e_1} e_1 = 0$. Logo,

$$(3.8) \quad \nabla_{e_1}^\perp \theta(e_1, e_2) = \theta(\nabla_{e_1} e_2, e_1) - 2\theta(e_1, \nabla_{e_2} e_1) \in N_1^g.$$

Aplicando novamente a equação de Codazzi com $X = e_1$ e $Y = Z = e_2$ temos

$$\nabla_{e_1}^\perp \theta(e_2, e_2) - 2\theta(\nabla_{e_1} e_2, e_2) = \nabla_{e_2}^\perp \theta(e_1, e_2) - \theta(\nabla_{e_2} e_1, e_2) - \theta(e_1, \nabla_{e_2} e_2).$$

As equações (3.7) e (3.8) mostram que

$$(3.9) \quad \nabla_{e_1}^\perp \theta(e_2, e_2) = d\lambda(e_1)\theta(e_1, e_2) + \lambda\nabla_{e_1}^\perp \theta(e_1, e_2) \in N_1^g.$$

e, portanto,

$$(3.10) \quad \nabla_{e_2}^\perp \theta(e_1, e_2) = \nabla_{e_1}^\perp \theta(e_2, e_2) - 2\theta(\nabla_{e_1} e_2, e_2) + \theta(\nabla_{e_2} e_1, e_2) + \theta(e_1, \nabla_{e_2} e_2) \in N_1^g.$$

Das equações (3.7) e (3.10) concluímos que

$$(3.11) \quad \nabla_{e_2}^\perp \theta(e_2, e_2) = \nabla_{e_2}^\perp \lambda\theta(e_1, e_2) = d\lambda(e_2)\theta(e_1, e_2) + \lambda\nabla_{e_2}^\perp \theta(e_1, e_2) \in N_1^g.$$

As equações (3.8), (3.10), (3.9) e (3.11) mostram que se $\xi \in N_1^g$ e $X \in TM$ então $\nabla_X^\perp \xi \in N_1^g$, como desejado. $\square$

Podemos então aplicar o corolário 1.5 para reduzir para 1 a codimensão da imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ nos casos em que N_1^g é de tipo espaço ou tempo. Não se pode aplicar o mesmo corolário quando N_1^g é tipo luz pois este fibrado é degenerado.

Proposição 3.5. *Seja $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão de tipo espaço e regrada que parametriza a aplicação normal de Gauss de uma hipersuperfície regrada e de Weingarten M^n de $\mathbb{H}^{n+1}$, com N_1^g de tipo espaço ou tempo. Então existe subvariedade $\tilde{M}^3$, totalmente geodésica em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, tal que $g(V) \subset \tilde{M}$ é regrada e não-desenvolvível. Além disso, se K e H são as curvaturas gaussianas e média de g então $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$, onde $a \in \mathbb{R}$ é constante e $\mathcal{H} = \langle H, H \rangle$.*

Observação 3.3. No caso em que N_1^g é de tipo espaço temos $\tilde{M} \cong \mathbb{S}^3$ e se N_1^g é de tipo tempo temos $\tilde{M} \cong \mathbb{S}_1^3$.

Uma superfície regrada é chamada *não-desenvolvível* se sua curvatura intrínseca é diferente da curvatura seccional do ambiente.

Demonstração: O lema 3.4 mostra que o fibrado N_1^g é paralelo na conexão normal e o lema 3.2 garante que $\dim N_1^g = 1$. Usando então o corolário 1.5 com $L = N_1^g$ temos que a imersão $g : V \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ admite redução de codimensão, para 1, donde segue-se a primeira parte do enunciado.

Se consideramos campos $\{e_1, \dots, e_n\}$ como antes podemos supor que $N_1^g = [e_3]$, onde e_3 é tipo espaço ou tempo. Portanto o operador de Weingarten, em cada direção $e_j, j \geq 3$, é

$$(3.12) \quad B_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_j = 0, \text{ para } 4 \leq j \leq n+1.$$

Como M^n é de Weingarten, a equação (3.4) fica

$$d(l\lambda) \wedge d(l\beta) = 0,$$

que, aplicada ao par $(X, \partial l)$, com $X \in TV$, resulta em

$$d\lambda(X)\beta - d\beta(X)\lambda = 0.$$

Com isto existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda = a\beta$$

e $\beta \neq 0$ pois, em caso contrário, teríamos B_{e_3} degenerada, contradizendo a hipótese de imersão no teorema 1.6. Usando (3.12), as curvaturas gaussiana e média de g em $\tilde{M}^3$ são

$$\begin{aligned} K &= 1 - \epsilon\beta^2 \neq 1 \\ \mathcal{H} &= \epsilon \frac{\lambda^2}{4} = \epsilon \frac{a^2\beta^2}{4}, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \langle e_3, e_3 \rangle$, e então a imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ é não-desenvolvível e suas curvaturas média e gaussiana satisfazem $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$. $\square$

Descrevemos a seguir classificações para a imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ conforme o tipo causal de seu primeiro espaço normal.

1. Imersões g com N_1^g de tipo espaço

Neste caso temos $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$, uma superfície regrada e não-desenvolvível na esfera $\mathbb{S}^3$. Apresentamos alguns resultados sobre tais imersões, os quais podem ser encontrados em [14] e [7].

Proposição 3.6. *Seja $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma superfície regrada conexa não-desenvolvível satisfazendo $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$. Então $H = 0$ ou $\mathcal{H} = a^2/4$ e $K = 0$. Neste segundo caso a superfície está contida num produto de dois círculos.*

Demonstração: Se $a = 0$ então $\mathcal{H} = 0$, donde $H = 0$ e portanto g é uma superfície mínima regradada em $\mathbb{S}^3$.

Uma superfície regradada em $\mathbb{S}^3$ pode ser localmente parametrizada por

$$X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t,$$

onde e_0 e e_1 são curvas em $\mathbb{S}^3$ com as seguintes propriedades

$$\langle e_0, e_1 \rangle = 0, \quad \langle e'_0, e'_1 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle e'_1, e'_1 \rangle = 1.$$

Note que a parametrização acima é diferente da apresentada em (2.3). Introduzindo as funções

$$\begin{aligned} F(s) &= \langle e'_0, e'_0 \rangle - \langle e'_0, e_1 \rangle^2 \\ G(s) &= 1 - \langle e'_0, e_1 \rangle^2 \\ P(s, t) &= F(s) \cos^2 t + G(s) \sin^2 t \end{aligned} \quad (3.13)$$

temos que suas curvaturas gaussiana e média são dadas por

$$K = 1 - \frac{Q^2(s)}{P^2(s, t)} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = \frac{(h(s, t) + 2Q(s)\langle e'_0, e_1 \rangle)^2}{4P^3(s, t)}, \quad (3.14)$$

onde $Q(s)$ e $h(s, t)$ estão definidas em (2.10) e (2.11). Das expressões de Q , F e G segue-se que $Q^2 = FG$, donde $F(s)$ e $G(s)$ nunca se anulam, já que $Q(s) \neq 0$, pois a superfície é não-desenvolvível. Observamos também que $P(s, t) > 0$ já que $\mathcal{H} \geq 0$. Por hipótese $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$, ou seja,

$$h(s, t) - aQ(s)\sqrt{P(s, t)} = -2Q(s)\langle e'_0(s), e_1(s) \rangle.$$

Derivando a equação acima em relação a t obtemos

$$h_t(s, t) = aQ(s) \frac{P_t(s, t)}{2\sqrt{P(s, t)}}. \quad (3.15)$$

Escrevendo explicitamente $h_t(s, t)$ e $P_t(s, t)$ obtemos

$$\begin{aligned} h_t(s, t) &= \sin(2t)(S(s) - R(s)) + \cos(2t)(T(s) + U(s)) \\ P_t(s, t) &= \sin(2t)(G(s) - F(s)). \end{aligned}$$

Em particular, se $t = 0$ em (3.15) obtemos $T(s) + U(s) = 0$ para todo s . Deste modo, a equação (3.15) reduz-se a

$$\sin(2t) \left[(S(s) - R(s)) - aQ(s) \frac{(G(s) - F(s))}{2\sqrt{P(s, t)}} \right] = 0, \quad \text{para todo } s \text{ e todo } t.$$

Se existe um ponto (s_0, t_0) onde $P_t(s_0, t_0) \neq 0$ então $P_t(s, t) \neq 0$ numa vizinhança W de (t_0, s_0) , ou seja $\sin(2t) \neq 0$ e $G(s) \neq F(s)$ em W . Logo

$$\frac{1}{\sqrt{P(s, t)}} = \frac{2(S(s) - R(s))}{aQ(s)(G(s) - F(s))},$$

que derivada em relação a t nos dá $P_t = 0$ em W , uma contradição. Logo $P_t(s, t) = 0$ para todo (s, t) , donde $G(s) = F(s)$ e portanto $Q^2 = P^2$, donde $K = 0$ e $\mathcal{H} = a^2/4$.

A matriz da segunda forma fundamental de g é

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \lambda \end{bmatrix},$$

donde $K = 1 + \det B$ e o comprimento do vetor curvatura média é $\|H\| = \text{Tr } B/2$. Assim $\beta^2 = 1$ e $\|H\| = \lambda/2$. A menos de orientação podemos supor $a > 0$ e $\beta = 1$ e esses são, conforme [13, cap. 7], os dados da imersão de um produto de dois círculos, a menos de uma isometria de $\mathbb{S}^3$. $\square$

Vejamos o que acontece com a hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ em cada um dos casos descritos na proposição acima.

Proposição 3.7. *Seja M^n uma hipersuperfície orientada, conexa, regrada e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa $\nu = n - 2$. Se a imagem de sua aplicação normal de Gauss, $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$, é uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3$ então M^n é uma superfície mínima em $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Demonstração: Segue-se diretamente da equação (3.2), já que se g é uma superfície mínima com segunda forma fundamental B , então $\text{Tr } B = 0$. $\square$

As superfícies mínimas regradas em $\mathbb{H}^{n+1}$ estão classificadas em [2]. Neste artigo os autores demonstram que toda $m + 1$ -subvariedade regrada mínima de um espaço forma $(\mathbb{R}^N, \mathbb{S}^N$ ou $\mathbb{H}^N)$ pode ser localmente parametrizada por um helicóide generalizado deste espaço.

Concluimos então que se a aplicação normal de Gauss de uma hipersuperfície regrada e de Weingarten de nulidade relativa $\nu = n - 2$ é dada por uma superfície mínima $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ então M^n é um aberto de um helicóide generalizado de $\mathbb{H}^{n+1}$, que são restrições a $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{n+1}$ de helicóides generalizados em $\mathbb{L}^{n+2}$. Em [2] são exibidas parametrizações, a menos de movimentos rígidos do espaço de Lorentz, dos helicóides generalizados de $\mathbb{L}^{n+2}$. São elas

$$(3.16) \quad X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^k t_i e_i(s) + \sum_{i=1}^{n-k} t_{k+i} V_{2k+i} + sbV_{n+k+1} \text{ ou}$$

$$(3.17) \quad X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^{n-k} t_i V_i + \sum_{i=1}^k t_{n-k+i} e_{n-k+i}(s) + sbV_{n+k+1},$$

onde os vetores $V_1, \dots, V_{n+2}$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{L}^{n+2}$, com $\langle V_1, V_1 \rangle = -1$ e os campos $e_i(s)$ são definidos por

$$\begin{aligned} e_1(s) &= \cosh(a_1 s) V_1 + \sinh(a_1 s) V_2 \\ e_i(s) &= \cos(a_i s) V_{2i-1} + \sin(a_i s) V_{2i}, i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

e $a_1, \dots, a_n$ e b são constante reais.

Deste modo, se $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ é uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ então podemos assumir que ela é parametrizada, de acordo com o teorema 2.1, localmente por

$$g(t_1, t_2) = \gamma_0(t_1) \cos t_2 + \gamma_1(t_1) \sin t_2,$$

onde

$$\begin{aligned}\gamma_0(t_1) &= (0, \cos \alpha t_1, \sin \alpha t_1, 0, \dots, 0) \\ \gamma_1(t_1) &= (0, 0, 0, \cos t_1, \sin t_1, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotemos ainda $E = \langle g_{t_1}, g_{t_1} \rangle$.

Consideramos então $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ o referencial de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, adaptado a g , dado por

$$\begin{aligned}e_1 &= g_{t_2} \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{E}} g_{t_1} \\ e_3 &= \frac{1}{\alpha \sqrt{E}} (-\gamma'_0 \sin t_2 + \alpha^2 \gamma'_1 \cos t_2) \\ e_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1) \\ e_{n+1} &= (1, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

Observamos que e_{n+1} é um campo de tipo tempo e os demais são todos de tipo espaço. Se θ é a segunda forma fundamental de g então, procedendo com cálculos semelhantes aos da seção anterior obtemos

$$\begin{aligned}\theta(e_1, e_1) &= 0, \\ \theta(e_2, e_2) &= 0 \text{ e} \\ \theta(e_1, e_2) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left\{ (-\gamma'_0 \sin t_2 + \gamma'_1 \cos t_2) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{E} [(\gamma'_0 \cos t_2 + \gamma'_1 \sin t_2) \cos t_2 \sin t_2 (1 - \alpha^2)] \right\}.\end{aligned}$$

Com isto, a matriz da segunda forma fundamental desta imersão, em cada direção normal $e_j, j \geq 3$, é dada por $B_{e_k}(i, j) = [\langle \theta(e_i, e_j), e_k \rangle]$. Explicitamente

$$B_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{E}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{E}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{e_j} = 0 \text{ para } 4 \leq j \leq n+1.$$

Segue-se do teorema 1.6 que a hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ pode ser parametrizada por

$$X(t_1, t_2, s_1, \dots, s_{n-2}) = \sum_{j=3}^{n+1} \phi_j(s_1, \dots, s_{n-2}) e_j(t_1, t_2),$$

onde (t_1, t_2) são parâmetros locais para $g(V^2)$, $\{e_3, \dots, e_{n+1}\}$ geram o espaço normal à imersão g e as funções $\phi_j(s_1, \dots, s_{n-2})$, $3 \leq j \leq n+1$ são uma parametrização local de $\mathbb{H}^{n-2} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$, isto é $\sum_{j=3}^n \phi_j^2 - \phi_{n+1}^2 = -1$. Deste modo, os pontos no fibrado Λ_1 são da forma (y, w) onde $y \in V$ e $w \in (T_y V)^\perp$ com $\langle w, w \rangle = -1$, ou seja, $w = \sum_{j=3}^{n+1} \phi_j e_j = X$.

Ainda do teorema 1.6 segue-se que a segunda forma fundamental desta hipersuperfície é dada por

$$A_g = (B_w(y))^{-1} = (\phi_3 B_{e_3}(y))^{-1} = \frac{1}{\phi_3} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{E}}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{E}}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

Usando (3.2) e (3.3) as curvaturas média e escalar da hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ são dadas respectivamente por

$$(3.18) \quad H = 0 \quad \text{e} \quad S = -1 - \frac{2E}{n(n-1)\alpha^2\phi_3^2}.$$

No caso em que a superfície $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ está contida no produto de dois círculos em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ podemos assumir que ela é parametrizada por

$$g(t_1, t_2) = r_1 \left(0, \sin\left(\frac{t_1}{r_1}\right), \cos\left(\frac{t_1}{r_1}\right), 0, \dots, 0 \right) + r_2 \left(0, 0, 0, \sin\left(\frac{t_2}{r_2}\right), \cos\left(\frac{t_2}{r_2}\right), 0, \dots, 0 \right),$$

onde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $r_1 r_2 \neq 0$.

Podemos considerar o referencial ortonormal de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ adaptado a g dado por

$$\begin{aligned} e_1 &= r_1 g_{t_1} - r_2 g_{t_2} \\ e_2 &= r_2 g_{t_1} + r_1 g_{t_2} \\ e_3 &= \left(0, -r_2 \sin\left(\frac{t_1}{r_1}\right), -r_2 \cos\left(\frac{t_1}{r_1}\right), r_1 \sin\left(\frac{t_2}{r_2}\right), r_1 \cos\left(\frac{t_2}{r_2}\right), 0, \dots, 0 \right) \\ e_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1) \\ e_{n+1} &= (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Note que e_{n+1} é um campo de tipo tempo e todos os demais são de tipo espaço. Cálculos semelhantes aos realizados no caso em $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ é mínima mostram que neste referencial a matriz da segunda forma fundamental de g , em cada direção normal, é dada por

$$B_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{e_j} = 0 \quad \text{para} \quad 4 \leq j \leq n+1.$$

Novamente usando o teorema 1.6 podemos parametrizar localmente a hipersuperfície M^n por

$$X(t_1, t_2, s_1, \dots, s_{n-2}) = \sum_{j=3}^{n+1} \phi_j(s_1, \dots, s_{n-2}) e_j(t_1, t_2),$$

onde, como antes, (t_1, t_2) são parâmetros locais para $g(V^2)$, $\{e_3, \dots, e_{n+1}\}$ geram o espaço normal à imersão g e as funções $\phi_j(s_1, \dots, s_{n-2})$, $3 \leq j \leq n+1$ são uma parametrização local de $\mathbb{H}^{n-2} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$, isto é $\sum_{j=3}^n \phi_j^2 - \phi_{n+1}^2 = -1$. Deste modo, os pontos no fibrado Λ_1 são da forma (y, w) onde $y \in V$ e $w \in (T_y V)^\perp$ com $\langle w, w \rangle = -1$, ou seja, $w = \sum_{j=3}^{n+1} \phi_j e_j$.

Segue-se da segunda parte do teorema 1.6 que a segunda forma fundamental desta hipersuperfície é dada por

$$A_g = (B_w(y))^{-1} = (\phi_3 B_{e_3}(y))^{-1} = \frac{1}{\phi_3} \begin{bmatrix} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As expressões (3.2) e (3.3) fornecem as curvaturas média e escalar da hipersuperfície

$$(3.19) \quad H = \frac{r_1^2 - r_2^2}{n\phi_3 r_1 r_2} \quad \text{e} \quad S = -1 - \frac{2}{n(n-1)\phi_3^2}.$$

2. Imersões g com N_1^g de tipo tempo

Nesta seção consideramos $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$, uma superfície regrada e não-desenvolvível de tipo espaço para as quais apresentamos resultados análogos aos da seção anterior.

Proposição 3.8. *Seja $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ uma superfície de tipo espaço, regrada e não-desenvolvível, tal que $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$. Então $\mathcal{H} = 0$ ou $\mathcal{H} = -a^2/4 \neq 0$ e $K = 2$.*

Demonstração: Se $a = 0$ então temos $\mathcal{H} = 0$ e portanto $H = 0$, já que o espaço normal de uma superfície de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ é não-degenerado de tipo tempo.

Podemos parametrizar localmente uma superfície regrada de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ por

$$X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t,$$

onde e_0 e e_1 são curvas de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ satisfazendo

$$\langle e_0, e_1 \rangle = 0, \quad \langle e'_0, e'_1 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle e'_0, e'_1 \rangle = 1.$$

as curvaturas gaussiana e média da superfície, em termos dessa parametrização, são dadas por

$$(3.20) \quad K = 1 - \frac{Q^2(s)}{P^2(s, t)} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = -\frac{(h(s, t) + 2Q(s)\langle e'_0, e_1 \rangle)^2}{4P^3(s, t)},$$

onde $Q(s)$ e $h(s, t)$ estão definidas em (2.26) e $P(s, t)$ é como em (3.13). Ressaltamos que, apesar da forma das equações ser a mesma das equações correspondentes às imersões na esfera $\mathbb{S}^3$, o produto interno neste caso é o de $\mathbb{L}^4$. Aqui também temos que $P(s, t) > 0$ já que $\mathcal{H} \leq 0$, pois H é de tipo tempo.

A relação $4\mathcal{H} - a^2(K - 1) = 0$ neste caso equivale a

$$h(s, t) - aQ(s)\sqrt{P(s, t)} = 2Q(s)\langle e'_0(s), e_1(s) \rangle.$$

Procedendo com argumento idêntico ao utilizado na proposição 3.6 obtemos $Q^2 = P^2$ e portanto $K = 2$ e $\mathcal{H} = -a^2/4$. $\square$

Vejamos como é a hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ em cada um dos casos acima.

Proposição 3.9. *Seja M^n uma hipersuperfície conexa, orientada, regrada e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa $\nu = n - 2$. Se a imersão g que parametriza a aplicação normal de Gauss de M é uma superfície mínima em $\mathbb{S}_1^3$ então M^n é uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Demonstração: Procedendo exatamente como no caso esférico podemos obter o resultado usando novamente a equação (3.2). $\square$

Se $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ é uma superfície mínima em $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ então podemos assumir que ela é parametrizada, de acordo com o teorema 2.2, localmente por

$$g(t_1, t_2) = \gamma_0(t_1) \cos t_2 + \gamma_1(t_1) \sin t_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_0(t_1) &= (0, 0, \cos t_1, \sin t_1, 0, \dots, 0) \\ \gamma_1(t_1) &= (\sinh \alpha t_1, \cosh \alpha t_1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotemos ainda $E = \langle g_{t_1}, g_{t_1} \rangle$.

Consideramos então $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ o referencial de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, adaptado a g , dado por

$$\begin{aligned} e_1 &= g_{t_2} \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{E}} g_{t_1} \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{-\alpha^2 E}} (-\alpha^2 \gamma'_0 \sin t_2 + \gamma'_1 \cos t_2) \\ e_4 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_{n+1} &= (0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Observamos agora que e_3 é um campo unitário de tipo tempo normal à superfície e os demais são todos de tipo espaço. Se θ é a segunda forma fundamental de g então, procedendo com cálculos semelhantes aos da seção anterior obtemos

$$\begin{aligned} \theta(e_1, e_1) &= 0, \\ \theta(e_2, e_2) &= 0 \text{ e} \\ \theta(e_1, e_2) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left\{ (-\gamma'_0 \sin t_2 + \gamma'_1 \cos t_2) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{E} [(\gamma'_0 \cos t_2 + \gamma'_1 \sin t_2) \cos t_2 \sin t_2 (1 + \alpha^2)] \right\}. \end{aligned}$$

Com isto, a matriz da segunda forma fundamental desta imersão, em cada direção normal $e_j, j \geq 3$, é dada por $B_{e_k}(i, j) = [\langle \theta(e_i, e_j), e_k \rangle]$. Explicitamente

$$B_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{E}} \\ \frac{a}{\sqrt{E}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{e_j} = 0 \text{ para } 4 \leq j \leq n+1.$$

Segue-se do teorema 1.6 que a hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ pode ser parametrizada por

$$X(t_1, t_2, s_1, \dots, s_{n-2}) = \sum_{j=3}^{n+1} \phi_j(s_1, \dots, s_{n-2}) e_j(t_1, t_2),$$

onde (t_1, t_2) são parâmetros locais para $g(V^2)$, $\{e_3, \dots, e_{n+1}\}$ geram o espaço normal à imersão g e as funções $\phi_j(s_1, \dots, s_{n-2}), 3 \leq j \leq n+1$ são uma parametrização local de $\mathbb{H}^{n-2} \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$, isto é $-\phi_3^2 + \sum_{j=4}^n \phi_j^2 = -1$. Deste modo, os pontos no fibrado Λ_1 são da forma (y, w) onde $y \in V$ e $w \in (T_y V)^\perp$ com $\langle w, w \rangle = -1$, ou seja, $w = \sum_{j=3}^{n+1} \phi_j e_j = X$.

Ainda do teorema 1.6 segue-se que a segunda forma fundamental desta hipersuperfície é dada por

$$A_g = (B_w(y))^{-1} = (\phi_3 B_{e_3}(y))^{-1} = \frac{1}{\phi_3} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{E}}{a} \\ \frac{\sqrt{E}}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

Usando (3.2) e (3.3) as curvaturas média e escalar da hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ são dadas respectivamente por

$$(3.21) \quad H = 0 \quad \text{e} \quad S = -1 - \frac{2E}{n(n-1)a^2\phi_3^2}.$$

O outro caso, isto é, uma superfície regrada em $\mathbb{S}_1^3$ tal que $K = 2$ e $\mathcal{H} = -a^2/4$ não pode ocorrer, devido ao resultado abaixo cuja demonstração encontra-se em [4].

Teorema 3.10. *Seja S uma superfície de classe C^2 , completa e de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$. Se sua curvatura gaussiana satisfaz $K \geq 1$ então S é uma esfera totalmente geodésica e $K = 1$.*

3. Imersões g com N_1^g de tipo luz

Observamos que, neste caso não podemos aplicar o resultado de redução de codimensão do teorema 1.5 para codimensão 1, como nos casos anteriores, já que o primeiro espaço normal é degenerado.

Não sabemos entretanto se existe algum inteiro $k > 1$ para o qual a codimensão da imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ pode ser reduzida. Por outro lado é simples verificar que tais imersões, se existirem, satisfazem $K = 1$. Tal fato segue-se diretamente da equação de Gauss (1.16) para imersões de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$

$$K = 1 + \langle \theta(X, X), \theta(Y, Y) \rangle - \langle \theta(X, Y), \theta(X, Y) \rangle,$$

pois $\theta(X, X) = 0$ e $\theta(X, Y)$ é um vetor de tipo luz, ou seja, $\langle \theta(X, Y), \theta(X, Y) \rangle = 0$ para todos $X, Y \in TM$.

Se $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma superfície mínima, concluímos de modo idêntico aos casos anteriores que M^n também será uma superfície mínima em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Porém, o fato da imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ ter primeiro espaço normal de tipo luz equivale a dizer que

$$\langle \theta(X_s, X_s), \theta(X_s, X_s) \rangle = \langle \theta(X_s, X_t), \theta(X_s, X_t) \rangle = 0,$$

onde θ é a segunda forma fundamental de g e X_s, X_t são os campos tangentes coordenados relativos à parametrização

$$(3.22) \quad X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t,$$

de toda superfície regrada de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Observamos que as curvas $e_0(s)$ e $e_1(s)$ satisfazem às mesmas propriedades que as de curvas que parametrizam superfícies regradas na esfera, vide (2.3).

Escrevendo explicitamente $\theta(X_s, X_s)$ e $\theta(X_s, X_t)$ obtemos

$$\begin{aligned} \theta(X_s, X_s) &= X_{ss} - \frac{\langle X_{ss}, X_s \rangle}{A^2} X_s - \langle X_{ss}, X_t \rangle X_t - \langle X_{ss}, X \rangle X \\ \theta(X_s, X_t) &= X_{st} - \frac{\langle X_{st}, X_s \rangle}{A^2} X_s - \langle X_{st}, X_t \rangle X_t - \langle X_{st}, X \rangle X, \end{aligned}$$

onde $A(s, t) = \sqrt{\langle X_s, X_s \rangle}$, ou ainda,

$$(3.23) \quad \theta(X_s, X_s) = X_{ss} - \frac{A_s}{A} X_s + A A_t X_t + A^2 X$$

$$(3.24) \quad \theta(X_s, X_t) = X_{st} - \frac{A_t}{A} X_s.$$

Cálculo direto nos leva às seguintes expressões

$$\begin{aligned} \langle \theta(X_s, X_s), \theta(X_s, X_s) \rangle &= \langle X_{ss}, X_{ss} \rangle - A_s^2 - A^2 A_t^2 - A^4 \\ \langle \theta(X_s, X_t), \theta(X_s, X_t) \rangle &= \langle X_{st}, X_{st} \rangle - A_t^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle X_{ss}, X_{ss} \rangle &= A_s^2 + A^2 A_t^2 + A^4 \\ \langle X_{st}, X_{st} \rangle &= A_t^2 \end{aligned}$$

Escrevendo as expressões acima em termos da parametrização (3.22) obtemos respectivamente

$$(3.25) \quad A^2 \langle X_{ss}, X_{ss} \rangle = \langle X_{ss}, X_s \rangle^2 + \langle X_{st}, X_s \rangle^2 + A^6$$

$$(3.26) \quad A^2 \langle X_{st}, X_{st} \rangle = \langle X_{st}, X_s \rangle^2$$

Expandindo os termos da identidade (3.25) observamos que seus termos são polinômios homogêneos em $\sin t$ e $\cos t$, onde $A^2 \langle X_{ss}, X_{ss} \rangle, \langle X_{ss}, X_s \rangle^2, \langle X_{st}, X_s \rangle^2$ são de grau 4 e A^6

é de grau 6. Já a expressão (3.26) nos dá polinômios homogêneos de grau 4 em ambos os lados. Explicitamente

$$\begin{aligned}
A^2 \langle X_{ss}, X_{ss} \rangle &= \langle e_1'', e_1'' \rangle \langle e_1', e_1' \rangle \sin^4 t + 2(\langle e_0', e_1' \rangle \langle e_1'', e_1'' \rangle + \langle e_1', e_1' \rangle \langle e_0'', e_1'' \rangle) \sin^3 t \cos t \\
&\quad + (\langle e_1'', e_1'' \rangle + 4\langle e_0', e_1' \rangle \langle e_0'', e_1'' \rangle + \langle e_1', e_1' \rangle \langle e_0'', e_0'' \rangle) \sin^2 t \cos^2 t \\
&\quad + 2(\langle e_0', e_1' \rangle \langle e_0'', e_0'' \rangle + \langle e_0'', e_1'' \rangle) \sin t \cos^3 t + \langle e_0'', e_0'' \rangle \cos^4 t \\
\langle X_{ss}, X_s \rangle^2 &= \langle e_1'', e_1'' \rangle^2 \sin^4 t + 2\langle e_1'', e_1'' \rangle \langle e_0', e_1' \rangle \sin^3 t \cos t + \langle e_0', e_1' \rangle^2 \cos^2 t \sin^2 t \\
\langle X_{st}, X_s \rangle^2 &= \langle e_0', e_1' \rangle^2 \sin^4 t - 2(\langle e_1'', e_1'' \rangle - 1) \langle e_0', e_1' \rangle \sin^3 t \cos t \\
&\quad + \left[(\langle e_1', e_1' \rangle - 1)^2 - 2\langle e_0', e_1' \rangle^2 \right] \cos^2 t \sin^2 t \\
&\quad + 2(\langle e_1', e_1' \rangle - 1) \langle e_0', e_1' \rangle \sin t \cos^3 t + \langle e_0', e_1' \rangle^2 \cos^4 t \\
A^6 &= \langle e_1', e_1' \rangle^3 \sin^6 t + 6\langle e_0', e_1' \rangle \langle e_1', e_1' \rangle^2 \sin^5 t \cos t \\
&\quad + (3\langle e_1', e_1' \rangle^2 + 12\langle e_0', e_1' \rangle^2 \langle e_1', e_1' \rangle) \sin^4 t \cos^2 t \\
&\quad + (12\langle e_0', e_1' \rangle \langle e_1', e_1' \rangle + 8\langle e_0', e_1' \rangle^3) \sin^3 t \cos^3 t \\
&\quad + (3\langle e_1', e_1' \rangle + 12\langle e_0', e_1' \rangle^2) \cos^4 t \sin^2 t + 6\langle e_0', e_1' \rangle \cos^5 t \sin t + \cos^6 t \\
A^2 \langle X_{st}, X_{st} \rangle &= \langle e_1', e_1' \rangle \sin^4 t - 2(1 - \langle e_1', e_1' \rangle) \langle e_0', e_1' \rangle \sin^3 t \cos t \\
&\quad + (1 + \langle e_1', e_1' \rangle^4 - 4\langle e_0', e_1' \rangle) \cos^2 t \sin^2 t \\
&\quad + 2(\langle e_1', e_1' \rangle - 1) \langle e_0', e_1' \rangle \sin t \cos^3 t + \langle e_1', e_1' \rangle \cos^4 t
\end{aligned}$$

Observamos que os polinômios homogêneos de grau 6 isoladamente são linearmente independentes, bem como os de grau 4, porém a união de ambos os conjuntos não o é. Precisamente podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sin^4 t &= \sin^6 t + \sin^4 t \cos^2 t \\
\sin^3 t \cos t &= \sin^5 t \cos t + \sin^3 t \cos^3 t \\
\sin^2 t \cos^2 t &= \sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t \\
\sin t \cos^3 t &= \sin^3 t \cos^3 t + \sin t \cos^5 t \\
\cos^4 t &= \sin^2 t \cos^4 t + \cos^6 t
\end{aligned}$$

Com essas identidades, podemos escrever (3.25) e (3.26) como combinações lineares dos polinômios homogêneos linearmente independentes $\{\sin^k(t) \cos^{6-k}(t) : 0 \leq k \leq 6\}$. Definindo

$$\begin{aligned}
f(s) &= \langle e_0'(s), e_1'(s) \rangle, & g(s) &= \langle e_1'(s), e_1'(s) \rangle, & h(s) &= \langle e_1''(s), e_1''(s) \rangle, \\
u(s) &= \langle e_0''(s), e_1''(s) \rangle, & v(s) &= \langle e_0''(s), e_0''(s) \rangle, & w(s) &= \langle e_0''(s), e_1'(s) \rangle, \\
y(s) &= \langle e_1''(s), e_1'(s) \rangle, & z(s) &= \langle e_0'(s), e_1''(s) \rangle,
\end{aligned}$$

o sistema citado acima tem a forma

$$\begin{aligned}
-f^2 - g^3 + gh - y^2 &= 0 \\
-6fg^2 + 2fg + 2fh - 2f + 2gu - 2wy - 2yz &= 0 \\
-12f^2g + f^2 + 4fu - 4g^2 + gh + gv + 2g + h - w^2 - 2wz - y^2 - z^2 - 1 &= 0 \\
-8f^3 - 12fg + 2fh + 2fv + 2gu + 2u - 2wy - 2yz &= 0 \\
-11f^2 + 4fu - g^2 + gv - g + h + v - w^2 - 2wz - z^2 - 1 &= 0 \\
-2fg + 2fv - 4f + 2u &= 0 \\
-f^2 + v - 1 &= 0 \\
g - f^2 &= 0
\end{aligned}$$

As três últimas equações mostram que $g(s) = f^2(s)$, $v(s) = 1 + f^2(s)$ e $u(s) = -f(s)$. Substituindo isso nas outras equações obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
-f^6 + f^2h - f^2 - y^2 &= 0 \\
-6f^5 + f^3 + 2f(h - 1) - 2y(w + z) &= 0 \\
-15f^4 + f^2(h + 1) - (w + z)^2 - y^2 - 1 &= 0 \\
-20f^3 + 2fh - 2y(w + z) &= 0 \\
(f^2 + 1)h - 15f^2 - (w + z)^2 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

A última destas equações expressa $(w + z)^2 + 1 = (f^2 + 1)h - 15f^2$, que aplicado na terceira equação dá $y^2 = -15f^2(1 - f^2)$. Por outro lado, a penúltima equação substituída na segunda produz

$$-6f^5 + 21f^3 - 2f = 0,$$

donde $f(s)$ é uma constante. Existem cinco possibilidades para essa constante, uma delas sendo, $f(s) = 0$.

Se $f(s)$ é uma das constantes não nulas então as funções g, u, v e y também são constantes não nulas. Agora $y = g'/2$, donde $g'(s)$ é não nula, contradizendo $g(s)$ ser constante.

Se $f(s) = 0$ então $y(s) = g(s) = u(s) = 0$, $v(s) = h(s) = 1$ e $(w + z)(s) = f'(s) = 0$. Com isso, $A^2(s, t) = \langle X_s, X_s \rangle = \cos^2 t$, donde $A_s = 0$, $AA_t = -\sin t \cos t$ e $A_t/A = -\tan t$. Deste modo as equações (3.23) e (3.26) ficam

$$\theta(X_s, X_s) = X_{ss} - \sin t \cos t X_t + \cos^2 t X \quad \text{e} \quad \theta(X_s, X_t) = X_{st} + \tan t X_s.$$

Supondo que $a\theta(X_s, X_s) + b\theta(X_s, X_t) = 0$, onde a e b são funções sobre a superfície temos

$$(aX_{ss} + bX_{st})1 - aX_t \sin t \cos t + aX \cos^2 t + bX_s \tan t = 0.$$

Como $\{1, \sin t \cos t, \cos^t, \tan t\}$ é linearmente independente temos $a = b = 0$, o que mostra que $\{\theta(X_s, X_s), \theta(X_s, X_t)\}$ é linearmente independente, contradizendo o lema 3.2. Isto demonstra o resultado a seguir.

Lema 3.11. *Não existe imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ que parametriza localmente a aplicação normal de Gauss de uma hipersuperfície regrada e de Weingarten de $\mathbb{H}^{n+1}$ cujo primeiro espaço normal é de tipo luz.*

4. Classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$

Em vista dos resultados obtidos até agora temos a seguinte classificação para hipersuperfícies regradas e de Weingarten no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Lembramos que os resultados 3.10 e 3.11 das seções anteriores descartam algumas possibilidades para a imersão que parametriza localmente a aplicação normal de Gauss de tais hipersuperfícies.

Teorema 3.12. *Seja $n \geq 3$ e M^n uma hipersuperfície conexa, regrada e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$. Então vale uma e somente uma das seguintes afirmações*

- (i) M^n tem curvatura seccional constante igual a -1 , ou seja, M^n é um aberto do fibrado normal unitário sobre uma curva de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$.
- (ii) M^n é um aberto do fibrado normal unitário sobre uma superfície regrada mínima em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ ou sobre um produto de dois círculos em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$.
- (iii) M^n é um aberto do fibrado normal unitário sobre uma superfície regrada mínima de tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$.

Demonstração: Consideremos o aberto $\tilde{M} = \{x \in M : S(x) \neq -1\}$ de M .

Suponha que $\tilde{M} \neq \emptyset$, isto é existe $x_0 \in M$ tal que $S(x_0) \neq -1$ e seja W uma componente conexa de $\tilde{M}$ tal que $x_0 \in W$. As observações 3.1 e 3.2 no início deste capítulo mostram que todo ponto em W tem índice de nulidade relativa $\nu(x) = n - 2$ e portanto W admite uma parametrização de Gauss dada por uma imersão $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ cujas propriedades foram estudadas nas seções anteriores.

O lema 3.3 mostra que o tipo causal de N_1^g é o mesmo para todo $y \in V$. Se ele é de tipo espaço ou tempo as proposições 3.1 e 3.5 mostram que g é regrada cujas curvaturas gaussianas e média satisfazem $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$ sendo portanto superfícies de Weingarten em $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{S}_1^3$.

Quando N_1^g é de tipo espaço a proposição 3.6 mostra que $g(V^2)$ é uma superfície mínima em $\mathbb{S}^3$ ou então $K = 0$ e $H = a/2$, donde $g(V^2)$ está contida num produto de dois círculos e portanto M verifica ii. Nesses casos as expressões para a curvatura escalar de M são dadas respectivamente por (3.18), quando M é mínima e por (3.19) em caso contrário.

Quando N_1^g é de tipo tempo a proposição 3.8 mostra que $g(V^2)$ deve ser uma superfície mínima em $\mathbb{S}_1^3$ e portanto verifica o caso iii. Nessas condições as expressões para a curvatura escalar de M são dadas respectivamente por (3.21).

A caracterização apresentada para as hipersuperfícies regradas e de Weingarten de curvatura constante -1 segue-se da observação 3.2, onde mostramos que o índice de nulidade relativa num ponto satisfaz $\nu(p) \geq n - 2$ e que $\nu(p) = n - 2$ se e somente se $S(p) \neq -1$. Logo $\nu(p) = n$ ou $\nu(p) = n - 1$.

Com a notação da observação 3.1 temos que

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n K(Y_i, Y_j)}{n(n-1)} \\ &= \frac{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} K(Y_i, Y_j) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} K(Y_n, Y_j)}{n(n-1)} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2 + 2(1 - n - \sum \|\alpha(Y_j, Y_n)\|^2)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Logo $S(p) = -1$ se, e somente se, $\sum \|\alpha(Y_j, Y_n)\|^2 = 2n^2 - 6n + 4 > 0$, se $n \geq 3$. Logo algum $\alpha(Y_j, Y_n)$ é não nulo e portanto M^n não pode ser totalmente geodésica, ou seja, $\nu(p) = n - 1$ e podemos aplicar o teorema 1.6 para obter uma parametrização local M^n como um fibrado normal unitário sobre uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$.

Finalmente, mostremos que se $\tilde{M} \neq \emptyset$ então $\tilde{M} = M$. De fato, se existe $y \in \partial \tilde{M} \cap M$ tal que $y \notin \tilde{M}$, isto é, $S(y) = -1$, considere um aberto conexo $U \subset \tilde{M}$ tal que $y \in \partial U$ e uma seqüência $\{y_k\} \subset U$ tal que $\lim y_k = y$ e portanto

$$\lim S(y_k) = S(y) = -1,$$

o que só é possível, em vista das fórmulas em (3.19) e (3.21) para a curvatura escalar de M , se $\lim \phi_3(y_k) = \phi_3(y) = \infty$. Mas isso implica que as coordenadas de y não são números reais e portanto $y \notin \mathbb{L}^{n+2}$, uma contradição. Portanto ou vale a parte i ou então $\tilde{M} = M$ e aplicam-se os argumentos acima. $\square$

Referências

Bibliográficas

- [1] A. C. Asperti and B. C. Valério. Ruled weingarten hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$. *Advances in Geometry*, 8:1–10, 2008.
- [2] J. M. Barbosa, M. Dajczer, and L. P. Jorge. Minimal ruled submanifolds in spaces of constant curvature. *Indiana University Mathematics Journal*, 33(4):531–547, 1984.
- [3] E. Beltrami. Risoluzione di un problema relativo alla toeria delle superficie gobbe. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 7:177–181, 1865.
- [4] A. A. Borisenko. Compact spacelike surfaces in the 3-dimensional de sitter space. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 2(1):3–8, 2006.
- [5] M. Dajczer. *Submanifolds and isometric immersions*. Publish or Perish, 1990.
- [6] M. Dajczer and D. Gromoll. Gauss parametrizations and rigidity aspects of submanifolds. *J. Differential Geometry*, 22:1–12, 1985.
- [7] M. Dajczer and K. Tenenblat. Rigidity for complete weingarten hypersurfaces. *Transactions of the american mathematical society*, 312(1):129–140, 1989.
- [8] F. Dillen and W. Kühnel. Ruled weingarten surfaces in minkowski 3-space. *Manuscripta Mathematica*, 98(3):307–320, March 1999.
- [9] U. Dini. Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale e una funzione dell’altro. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 7:205–210, 1865.
- [10] H. B. Lawson. Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$. *Annals of Mathematics*, 92:335–374, 1970.
- [11] H. B. Lawson. *Lectures on minimal submanifolds*. Publish or Perish, second edition, 1980.
- [12] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. Academic Press, 1983.
- [13] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume four. Publish or Perish, second edition, 1979.
- [14] B. C. Valério. *Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais*. PhD thesis, IME-USP, 2004.