Menu do dia:

·) Integral de Riemann: definição e propriedades
(soma, produto com escalar,
divisão do domínio, integral nula
de funções não-negativas).

·) Integrabilidade: contínuas ou com número finito de
descontinuidades.

·) Áreas sob gráficos e entre gráficos.

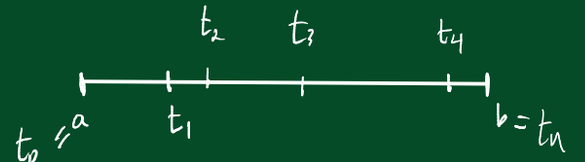
·) Primitivas, existência
f(x)=cos x, f(x)=e^x, f(x)=x²-5x+6, f(x)=tg(x)sec²(x)

·) Teorema Fundamental do Cálculo.
Exemplos e interpretações: f(x)=cos x, f(x)=sin(x), f(x)=1/x

·) TVM para integrais?

Integral de Riemann: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f limitada

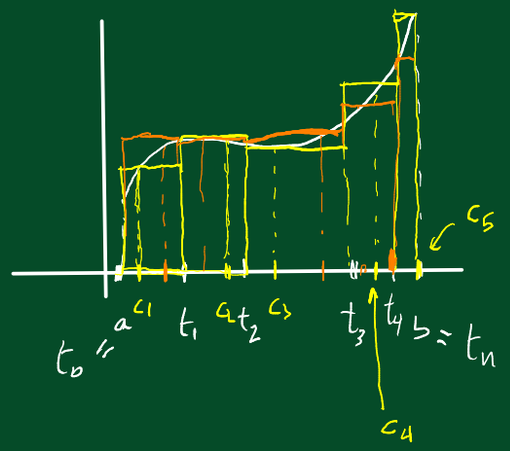
·) Partição de $[a,b]$: $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$, $P=\{t_i\}_{i=0}^{n}$

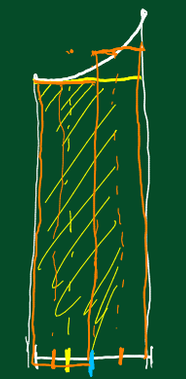


Norma de P: $|P|=\max\{\Delta t_i,\ 1\le i\le n\}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

·) Soma de Riemann: f, $P=\{t_i\}_{i=0}^{n}$, $c_i\in[t_{i-1},t_i]$, $1\le i\le n$

$$S(f,P,\{c_i\})=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta t_i$$





$$\frac{df}{dx}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$x - x_0$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

·) f é Riemann integrável $\Leftrightarrow \lim_{|P|\to 0} S(f,P,\{c_i\})=L\in\mathbb{R}$, para toda P com $|P|\to 0$ e qualquer escolha dos c_i's dada. Notação: $\int_a^b f(x)\,dx = L$.

Propriedades: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. $\to (f+g)(x)$

•) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

•) $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx$, $k \in \mathbb{R}$

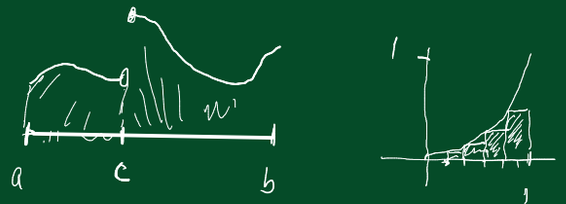
•) $f \geq 0$ e contínua com $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$

•) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Teorema: Se f é contínua então f é integrável.

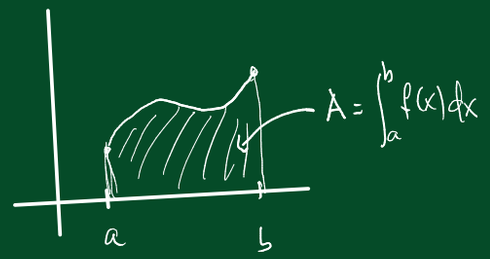
Obs.: Se f é descontínua num ponto ela é integrável.



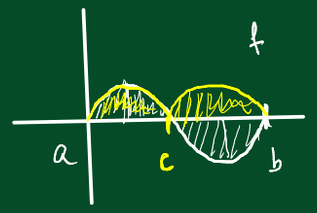
Áreas: $f \geq 0$ e integrável

A = área entre $0x$ e graf f, $a \leq x \leq b$

$A = \int_a^b f(x)\,dx$



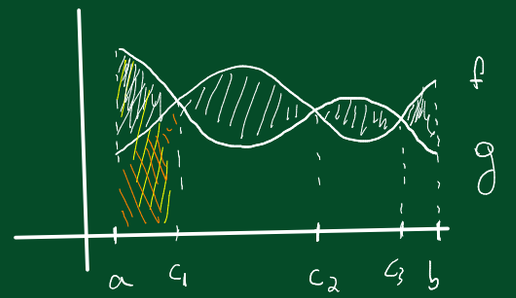
$A = \int_a^b f(x)\,dx$



$\int_a^b f(x)\,dx = 0$

$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx$

$= \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \geq 0.$

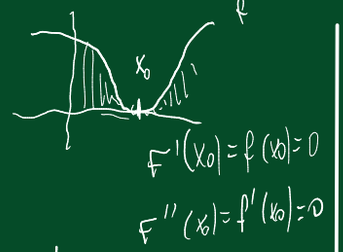


$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

Primitivas; $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$F: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f

se $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.



Exemplos: $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = x^3/3 + K$

$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \operatorname{sen} x + K$

$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x \Rightarrow F(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + K$, $K \in \mathbb{R}$

$\left(\dfrac{f^2}{2}\right)' = f \cdot f'$

Obs.: 1) Se F e G são primitivas de f então

$F(x) = G(x) + K$ $\qquad F' = f = G' \Rightarrow F' - G' = 0$

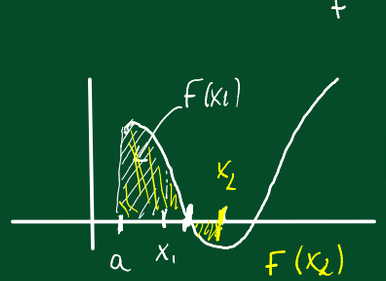
$\Rightarrow (F - G)' = 0$

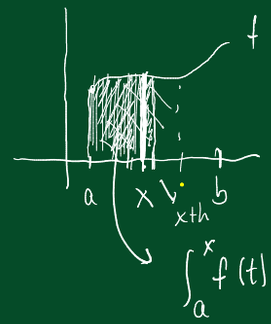
2) Se f é contínua então existe primitiva de f.

Exemplo: $f(x) = e^{-x^2}$ tem primitiva. Quem é?

Não consigo escrevê-la

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ é a primitiva





$x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ $\qquad F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

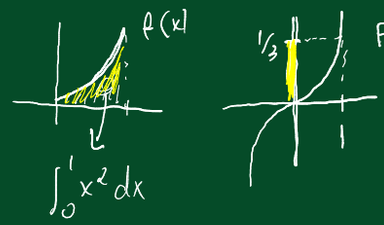
Teorema Fundamental do cálculo:

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e F é uma primitiva de f, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Dem.: Vídeo.

Exemplos: 1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = 1/3 - 0 = 1/3$.

$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = x^3/3 + K$

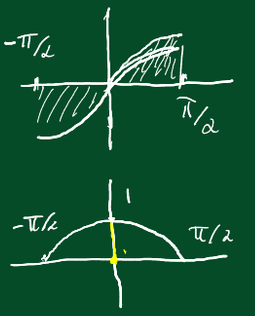


2) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = 1 - (-1) = 2$

$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \operatorname{sen} x$

3) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx =$

$F(\pi/2) - F(-\pi/2) = 0$

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$F(x) = -\cos x$