56. Seja k um número real. Prove que todas as funções deriváveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = kf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ são da forma ce^{kx}, com $c \in \mathbb{R}$.

E.D.O. de 1ª ordem de coef. constante.

Se $f(x) = ce^{kx}$, $c, k \in \mathbb{R}$ então $f'(x) = cke^{kx} = kf(x)$.

$$f'(x) = kf(x) \Rightarrow f'(x) - kf(x) = 0$$
$$\Rightarrow e^{-kx} f'(x) - ke^{-kx} f(x) = 0$$
$$\Rightarrow \left(e^{-kx} \cdot f(x) \right)' = 0$$
$$\Rightarrow e^{-kx} f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f(x) = ce^{kx}.$$

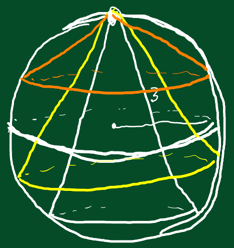
Exemplo: $f'(x) = 2f(x)$, $f(0) = 5$

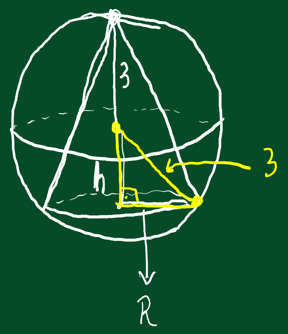
$$\Rightarrow f(x) = ce^{2x}$$
$$5 = f(0) = c \cdot e^{2 \cdot 0} = c$$

$$\therefore f(x) = 5e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$F(x) = -k^2 x$$
$$F(x(t)) = -k^2 \cdot x(t)$$
$$m \cdot x''(t) + k^2 x(t) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x(t) = A\cos(kt) + B\,\text{sen}(kt)$$

44. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.





$h^2 + R^2 = 9$

$R^2 = 9 - h^2$

$H = 3 + h$

$$V(H,R) = \frac{\pi R^2 . H}{3} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi(9-h^2)(3+h)}{3}, \quad h \in [\cancel{-3}, 3]$$

$h \in [0,3]$

$V(h)$ é contínua em $[0,3]$, logo tem máx e min ali (Weierstraß)

•) $V(0) = 9\pi$, $V(3) = 0$

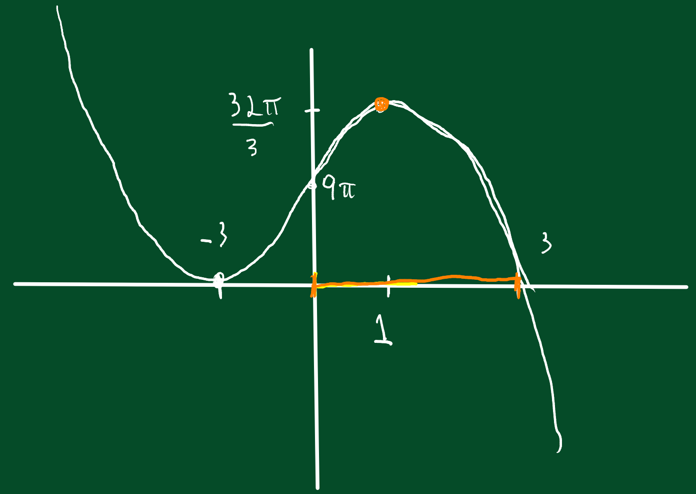
•) $V'(h) = \frac{\pi}{3}\left[(-2h)(3+h) + (9-h^2).1\right]$

$= \frac{\pi}{3}\left[-3h^2 - 6h + 9\right] = -\pi\left[h^2 + 2h - 3\right]$

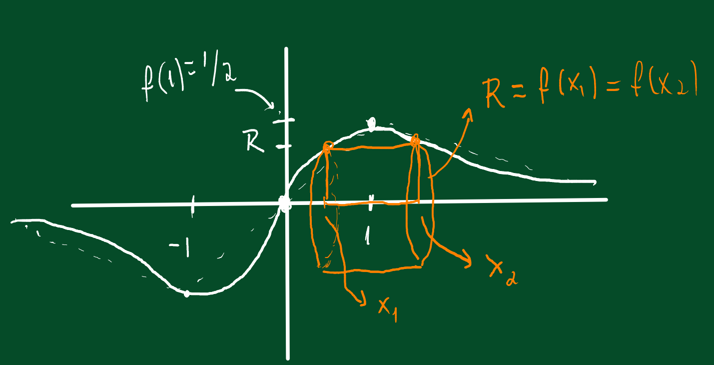
$V'(h) = 0 \Rightarrow h = \frac{-2 \pm 4}{2}$ ↗ $h = \cancel{-3}$ ↘ $h = 1$

O cone de volume máximo tem $H = 4$ e $R = \sqrt{8}$.

$V(1) = \frac{32\pi}{3}$.



47. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?



$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$V(R,H) = \pi R^2 . H$

$\Delta = 1 - 4R^2$

$f(x) = R \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = R \Rightarrow Rx^2 - x + R = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4R^2}}{2R} \Rightarrow H = x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{1-4R^2}}{R}$

$V(R) = \pi R^2 . \left(\dfrac{\sqrt{1-4R^2}}{R}\right) = \pi R . \sqrt{1-4R^2}$, $R \in]0, 1/2[$ (intervalo aberto)

$R \in [0, 1/2]$

$R = 0$ e $R = 1/2$ não dão cilindros $V(0) = V(1/2) = 0$

Em $[0, 1/2]$ tem máx e mín (podendo ñ fazer sentido)

•) $V(0) = V(1/2) = 0$

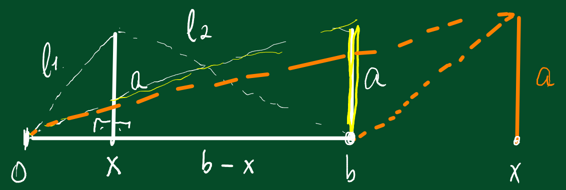
•) $V'(R) = \pi \left[\sqrt{1-4R^2} - \dfrac{8R^2}{2\sqrt{1-4R^2}} \right] = 0 \Leftrightarrow 1 - 4R^2 = 4R^2$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ único pto crítico

em $[0, 1/2]$ é o máx.

$V\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} . \sqrt{1 - 1/2} = \dfrac{\pi}{4}$.

49. Sejam $a, b > 0$. Determine, caso exista, o perímetro mínimo dos triângulos de base b e altura (relativa à base dada) a.



$\Delta = 4b^2 + 8b^2$

$$P(\ell_1, \ell_2) = b + \ell_1 + \ell_2 = b + \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + a^2} = P(x)$$

se $x > b$ $P(x) > P(b)$, x ñ tem chance de ser mínimo

considero $P(x)$, $0 \leq x \leq b$, tem máx e mínimo.

•) $P(0) = b + a + \sqrt{b^2 + a^2} = P(b)$.

•) $P'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \dfrac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+a^2}} = 0 \iff \dfrac{x^2}{x^2+a^2} = \dfrac{(b-x)^2}{(b-x)^2+a^2}$

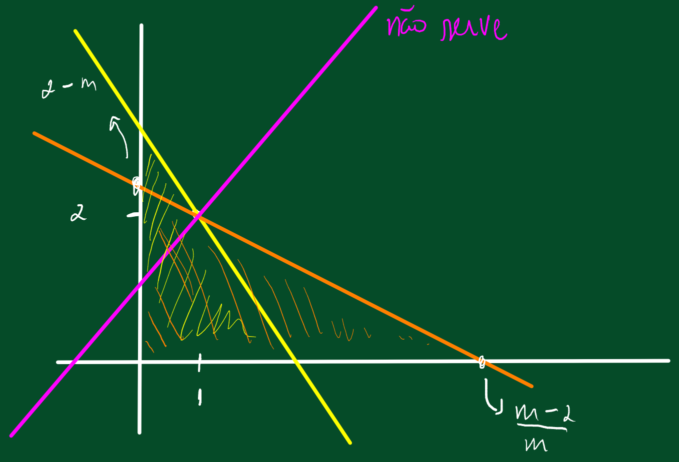
$\iff a^2x^2 = a^2(b-x)^2 \Rightarrow x^2 = b^2 - 2bx + x^2$

$\Rightarrow \boxed{x = b/2}$

$P(b/2) = b + \sqrt{b^2 + 4a^2}$ é mínimo global.

51. (P2, 2016) Considere todos os triângulos retângulos formados pelos semi-eixos positivos e por uma reta que passa pelo ponto $(1,2)$. Dentre todos esses triângulos, aquele que possui área mínima tem a hipotenusa valendo

a. $\sqrt{18}$. **b.** $\sqrt{20}$. **c.** $\sqrt{38}$. **d.** $\sqrt{24}$. **e.** $\sqrt{40}$.



reta que passa por $(1,2)$:

$y - 2 = m(x-1)$, $m < 0$

$y = 0$: $-2 = mx - m \Rightarrow x = \dfrac{m-2}{m}$

$x = 0$: $y = 2 - m$

$A(m) = -\dfrac{(m-2)^2}{2m}$, $m<0$ (ñ uso Weierstrass), $A(m) = -\dfrac{m}{2} + 2 - \dfrac{2}{m}$

$\lim\limits_{m \to -\infty} A(m) = +\infty = \lim\limits_{m \to 0^-} A(m)$ $\longrightarrow$ -2 é pto de min global

$A'(m) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{m^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = -2}$ $A(-2) = 4$ $h^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

$\Rightarrow h = \sqrt{20}$