Cúbica

1. **cub1**

   Seja $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são constantes reais. Considere as seguintes afirmações:

   (I) Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{f(x_0) = x_0}$. ✓

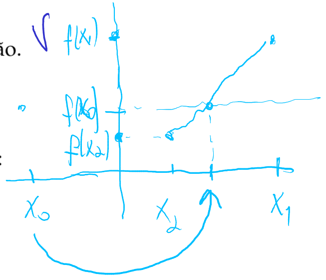
   (II) f possui exatamente um ponto de inflexão. V

   (III) f possui ao menos um ponto crítico. F

   (IV) Se $a^2 \leq 3b$, então f é injetora. V

   É sempre correto somente o que se afirma em:

   (a) (I), (II) e (IV) ✓
   (b) (II) e (IV)
   (c) (I) e (II)
   (d) (II) e (III)
   (e) (II), (III) e (IV)



(I) $g(x) = f(x) - x = x^3 + ax^2 + (b-1)x + c$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \\ g \text{ é contínua} \end{array}\right\} \text{TVI} \Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } g(x_0) = 0$$

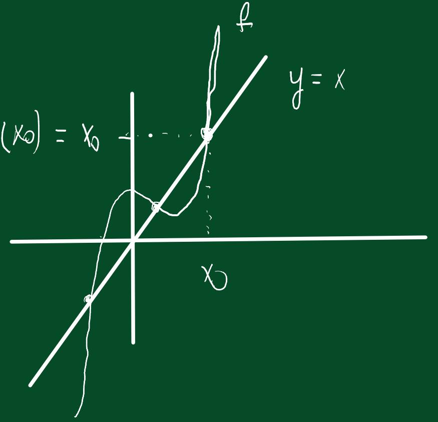
$$\Downarrow$$

$$f(x_0) = x_0$$

$h(x) = x + 1$ é bijetora

$h(x_0) = x_0$

não tem sol!



(II) $f''(x) = ?$

$f(x) = x^4 \Rightarrow f''(0) = 0$ e 0 ñ é pto de inflexão

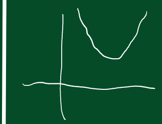
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\quad -a/3$

$f''(x) = 6x + 2a$

f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

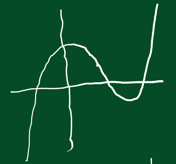
$\Rightarrow x_0 = -a/3$ é o único pto de inflexão

(III) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$ tem solução se $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4a^2 - 12b \geq 0$

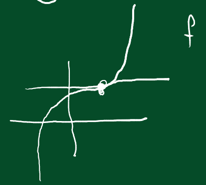


se $a, b \in \mathbb{R}$ tq $4a^2 - 12b < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (ñ tem raízes)

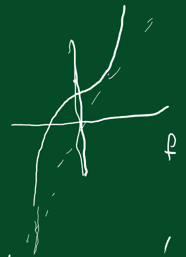
$4a^2 - 12b > 0$ $\quad f'(x)$ tem duas raízes



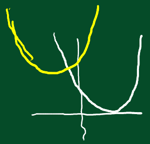
$4a^2 - 12b = 0$ $\quad f'(x)$ tem uma raiz



$4a^2 - 12b < 0$ $\quad f'(x)$ ñ tem raiz



(IV) $a^2 \leq 3b \Rightarrow 4a^2 - 12b \leq 0 \Rightarrow f'(x)$ tem no máximo uma raiz



$$\Downarrow$$

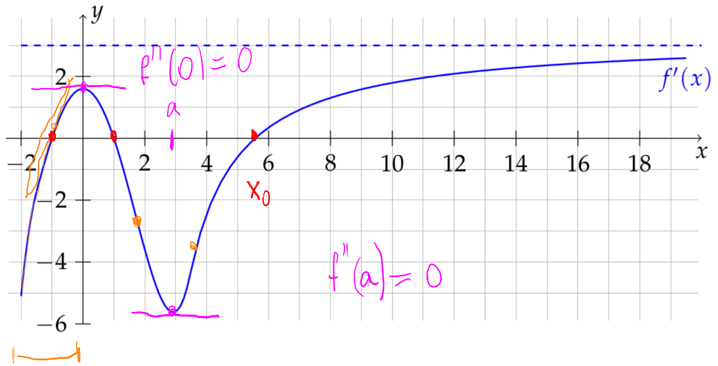
$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ é estrit. cresc.

$\Rightarrow f$ é injetora

Gráfico de f'

1. **grafder1**

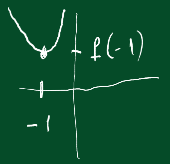
Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até segunda ordem. O gráfico de sua derivada, f', está ilustrado abaixo. Assinale a afirmação **FALSA**.



~~(a)~~ $f''(x)$ não tem mínimo global. ✓
(b) Pode ocorrer de a equação $f(x) = 0$ não ter solução real.
(c) A equação $f''(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais distintas.
(d) f tem pelo menos um mínimo global, que pode ocorrer em $x = -1$ ou entre $x = 5$ e $x = 6$.
(e) $f''(x) > 0$ em $]-\infty, 0[$.

(e) $f'' > 0 \Leftrightarrow f'$ é crescente ✓

(d) $f'(x) = 0$, $x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0$
$-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

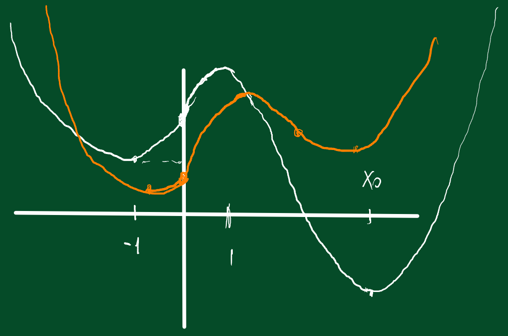


-1 é mín <u>local</u>

analog. x_0 é mín. <u>local</u>.

$f'(x) < 0$, $x < 0$
$f'(x) > 0$, $x > x_0$
e $f''(x) > 0$ nesses intervalos $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

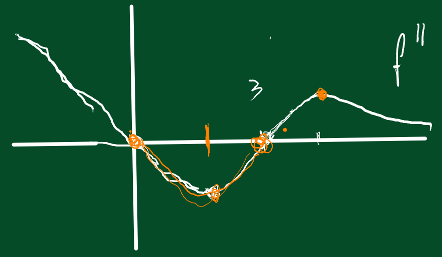
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



(b) ✓ graf laranja

(c) em rosa no enunciado

(a) $x < 0$, $f''(x) > 0$, $f''(0) = 0$; $f''(x) < 0$ $(0 < x < 3)$; $f''(x) > 0$



L'Hospital

1. **lhosp1**

   O valor do limite $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{\arcsin(x^2)}}$ é:

   (a) e^{-2} ✓
   (b) e^{2}
   (c) 0
   (d) $+\infty$
   (e) inexistente

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos(2x)}{\arcsin(x^2)}} = e^{-2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(2x)} \cdot -\operatorname{sen}(2x) \cdot 2}{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{-2 \cdot \sqrt{1-x^4}}{\cos 2x}}_{-2} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}_{1} = -2$$

Máximos e Mínimos

1. **maxmin1**

   Considere a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$. A soma dos valores máximo e mínimo de f em $[0,1]$ é igual a:

   (a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ ✓

   (b) 1

   (c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$

   (d) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{3}}$

   (e) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{3}}$

$$\frac{1}{\cancel{5}} x^{-4/5}(\quad)^{4/5} = \frac{4}{\cancel{5}} x^{1/5}(1-x)^{-1/5}$$

$$1 - x = 4 . x$$

$$x = 1/5$$

f é cont em $[0,1]$ $\Rightarrow$ tem máx e min.

•) $f(0) = f(1) = 0$ (min global)

•) $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} x^{-2/3} . (1-x)^{2/3} - \frac{2}{3} x^{1/3} (1-x)^{-1/3} = 0$

$$\Rightarrow x^{-2/3}(1-x)^{2/3} = 2x^{1/3} . (1-x)^{-1/3}$$

$$\Rightarrow 1 - x = 2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = 1/3$$

$$f(1/3) = (1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3} = \frac{4^{1/3}}{3} = \sqrt[3]{4}/3.$$

Equação

1. **eq1-1**

   Seja $c > 0$ uma constante e considere a equação

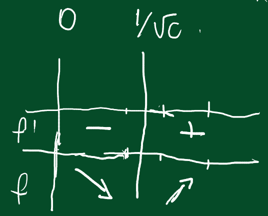
   $$cx^2 = 2\ln x.$$

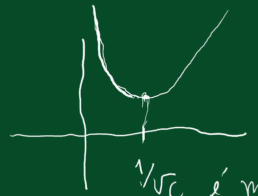
   Esta equação possui exatamente duas soluções reais se, e somente se:

   (a) $0 < c < \frac{1}{e}$ ✓
   (b) $c > \frac{1}{e}$
   (c) $0 < c < \frac{1}{2e}$
   (d) $c > \frac{1}{2e}$
   (e) $0 < c < \frac{2}{e}$

$f(x) = cx^2 - 2\ln x \quad , \quad x > 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2cx - \frac{2}{x} = \frac{2cx^2 - 2}{x} = \frac{2}{x}\left(cx^2 - 1\right), \quad \underline{x > 0}$





$1/\sqrt{c}$ é min global

Preciso de $c > 0$ tq $f(1/\sqrt{c}) < 0$

$f(1/\sqrt{c}) = 1 - 2\ln(1/\sqrt{c}) < 0$

$\ln(1/\sqrt{c}) > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(c) > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c < e^{-1}}$

Taxa de Variação

1. **taxa2**

   Os ponteiros de um relógio medem 2cm e 4cm e movem-se, cada um com sua velocidade, que é constante. Quando o relógio marca exatamente duas horas, a distância entre as pontas dos ponteiros está diminuindo a uma taxa de:

   (a) $\frac{11\pi}{180}$cm por minuto. ✓
   (b) $\frac{11\pi}{90}$cm por minuto.
   (c) $\frac{11\pi}{60}$cm por minuto.
   (d) $\frac{11\pi}{45}$cm por minuto.
   (e) $\frac{11\pi}{30}$cm por minuto.

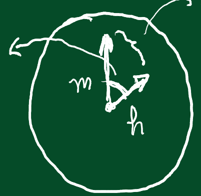
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$X \longleftrightarrow Y$

t

θ

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}$$



$$D(\theta) = m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos\theta$$

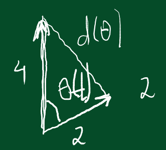
$\theta \longrightarrow D(\theta)$

$\uparrow$

t

$$D(t) = D(\theta(t)) \Rightarrow D'(t) = D'(\theta(t)) \cdot \theta'(t)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (2m \cdot n \operatorname{sen}\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$



Em t_0: $\theta(t_0) = \pi/3$

$$d^2(t_0) = 20 - 16 \cdot \cos \pi/3 = 12 \Rightarrow d(t_0) = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\theta(t_0) = \sqrt{3}/2$$

$$d^2(t) = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos\theta$$

$$2d(t) \cdot d'(t) = 16 \operatorname{sen}\theta \cdot \theta'(t) \Rightarrow d'(t) = \frac{8 \operatorname{sen}\theta \cdot \theta'(t_0)}{d(t)} \Rightarrow d'(t_0) = \frac{8 \cdot \cancel{\sqrt{3}}/2 \cdot 11\pi/360}{2\cancel{\sqrt{3}}}$$

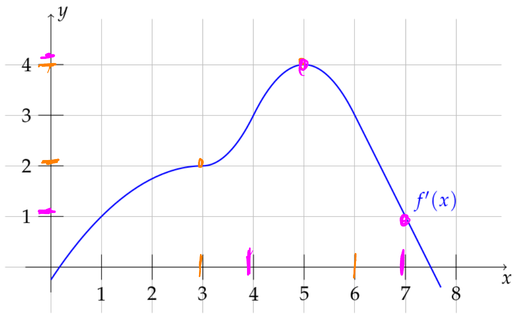
$$= \frac{22\pi}{360} = \frac{11\pi}{180}\ \text{cm/min}.$$

$$\theta' = \frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{720} = \frac{22\pi}{720} = \frac{11\pi}{360}$$

TVM

1. **tvm1**

   Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. O gráfico de sua derivada está ilustrado abaixo.



   A afirmação que pode **não** estar correta é

   (a) $f(6) - f(3) \in [6,9]$ ✓
   (b) $f(3) - f(1) \in [2,4]$
   (c) $f(7) - f(4) \in [3,12]$
   (d) $f(6) - f(4) \in [6,8]$
   (e) $f(5) - f(3) \in [4,8]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad \text{para algum } c \in]a,b[$$

a) $$\frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = f'(c), \quad c \in]3,6[$$

$\in [2,4]$

$$2 \leqslant \frac{f(6) - f(3)}{3} \leqslant 4 \Rightarrow 6 \leqslant f(6) - f(3) \leqslant 12$$

$$\Rightarrow f(6) - f(3) \in [6,12]$$

c) $$1 \leqslant \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} \leqslant 4 \qquad 1 \leqslant f'(x) \leqslant 4, \quad x \in [4,7]$$

$$\Downarrow$$

$$3 \leqslant f(7) - f(4) \leqslant 12$$

b), d) e e) são análogos ao c).

Verdadeiro ou Falso

1. **vouf1**

   Assinale somente as alternativas com afirmações corretas.

   (a) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função derivável até segunda ordem tal que $f''(x)=0$ tem duas soluções reais distintas, então f tem algum ponto de extremo (máximo ou mínimo) local. (-25%)

   (b) Se f é uma função tal que $x\ln x < f(x) < 0$, para todo $0<x<1$, então $\lim_{x\to0^+} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)=0$. (50%)

   (c) Se f é uma função que admite derivada até segunda ordem em toda a reta, tal que $f'(x)>0$ e $f''(x)>0$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (50%)

   (d) Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, tais que grau(q) ≥ 1, então $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ possui assíntota vertical, ou seja, existe $p\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to p^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim_{x\to p^-} f(x)=\pm\infty$. (-25%)

   (e) Se f é uma função qualquer tal que $f(a)f(b)<0$, então existe $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=0$. (-25%)

   (f) Se f e g são funções deriváveis definidas em $\mathbb{R}$ e se $f(x)\leq g(x)$ em $]0,+\infty[$, então $f'(x)\leq g'(x)$ em $]0,+\infty[$. (-25%)

(a) $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$

$f''(x)=0$ tem duas soluções e

f não tem máximo nem mínimo locais..

$f''(x)=0$

$\Updownarrow$

$x=0$ ou

$x=1$

$$f(x)=\begin{cases} -x^3, & x\leq 1\\ ax^3+bx^2+cx+d, & x>1\end{cases}$$

com derivada até segunda ordem

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$$

$-1 = a+b+c+d$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x)$$

$-3 = 3a+2b+c$

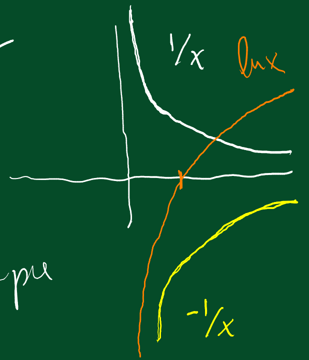
é falsa!

b) $x\ln x < f(x) < 0$

$$\lim_{x\to0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to0^+} \underbrace{f(x)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin\left(1/f(x)\right)}_{\text{ltda}} = 0.$$ ✓



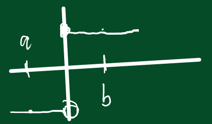
c) $f''(x)>0 \Rightarrow$ conc p/ cima sempre

$\Rightarrow \boxed{f(x) > T_{x_0}(x)}$

reta

$f'(x)>0 \Rightarrow T_{x_0}(x)$ é crescente $\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} T_{x_0}(x) = +\infty}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} T(x) = +\infty$. ✓

e) 

$f(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$ X

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ falsa!

f) $f(x)=0$; $g(x)=1/x$, $f(x)\leq g(x)$

$f'(x)=0$; $g'(x)=-1/x^2$, $g'(x)\leq f'(x)$

FALSA.

Esboço de gráfico

1. **graf1**

   Considere a função $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$.

   (a) Estude o crescimento de f, determinando os pontos de máximo e de mínimo locais e globais de f, se existirem.

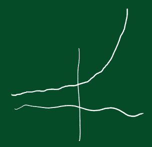
   (b) Estude a concavidade de f.

   (c) Determine as assíntotas do gráfico de f, se existirem.

   (d) Faça um esboço do gráfico de f.

(a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x) = e^{2/x} + x\cdot e^{2/x}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \left(\frac{x-2}{x}\right)\cdot \underbrace{e^{2/x}}_{>0}$$



		0		2	
f'	$+$		$-$		$+$
f	↗		↘		↗

2 é min. local $f(2) = 2e$

(b) $$f''(x) = \frac{4e^{2/x}}{x^3}$$

		0	
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

(c) $$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x}_{\substack{+\infty\\ -\infty}}\ \underbrace{e^{\overbrace{2/x}^{\substack{\to 0\\ \to 0}}}}_{\substack{\to 1\\ \to 1}} = \pm\infty$$

• $$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{2/x} = 1$$

$$g(x) = e^x \qquad g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} x\cdot e^{2/x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2/x}-1}{1/x}$$

$$= \lim_{u\to 0^{\pm}} 2\cdot\frac{e^u-1}{u} = 2\cdot 1 = 2.$$

$u = 2/x$

$x\to\pm\infty \Rightarrow u\to 0^{\pm}$

assíntota: $y = x+2$ (em $+\infty$ e em $-\infty$)

• $$\lim_{x\to 0^+} xe^{2/x} = \text{"}0\cdot+\infty\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2/x^2\cdot e^{2/x}}{-1/x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{e^{\overbrace{2/x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} = 0 \text{ (Não pode usar L'Hospital)}$$

d)