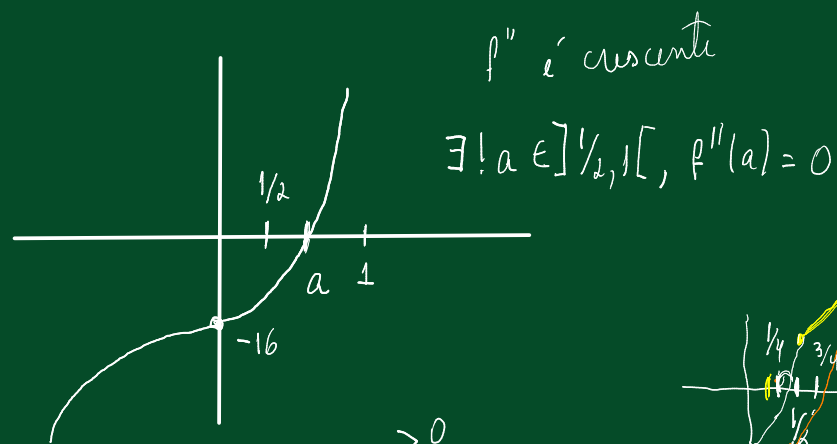


14. Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$. Quantas soluções distintas tem a equação $f''(x) = 0$? Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

$$f'(x) = 7x^6 + 3\pi x^2 - 16x + e$$

$$f''(x) = 42x^5 + 6\pi x - 16$$

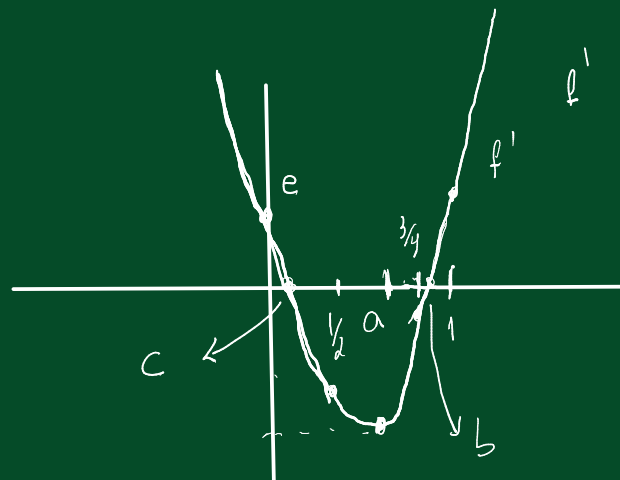


$$f'''(x) = 210x^4 + 6\pi > 0 \quad (\text{conc. de } f'')$$

$$f^{(iv)}(x) = 840x^3 \quad (\text{conc. de } f''')$$

$$f^{(iv)}(x) < 0, x < 0$$

$$f^{(iv)}(x) > 0, x > 0$$



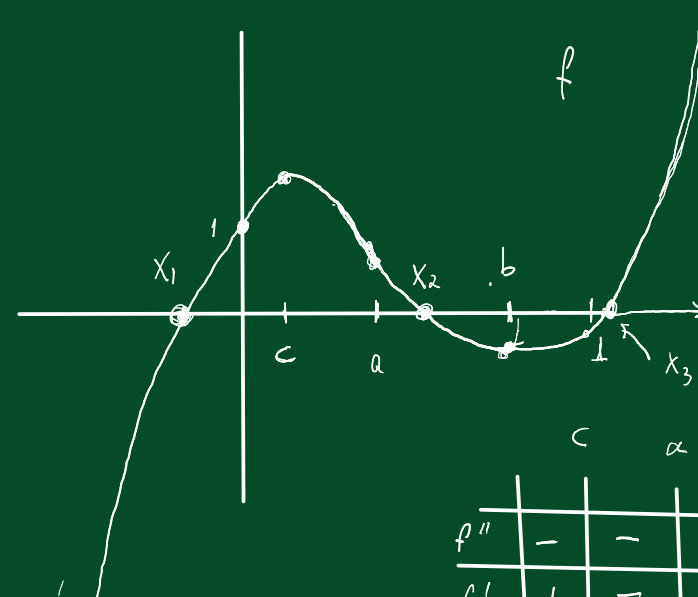
$\exists b \in]\frac{3}{4}, 1[\text{ tq } f'(b) = 0$
 f' tem conc p/cima $\exists c \in]0, \frac{1}{2}[\text{ tq } f'(c) = 0$

b é min local de f (não global)
 c é máx local de f .

$$\frac{7}{64} + \frac{3\pi}{4} - 8 + e$$

$$\frac{64e + 7 + 48\pi}{64} - \frac{512}{64}$$

$$< \frac{192 + 144 + 7}{34}$$



	c	a	b	
f''	-	-	+	+
f'	+	-	-	+

42. (Transferência Fuvest 2012) Seja $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$. Então, o coeficiente angular máximo das retas tangentes ao gráfico de f é

a. $\frac{1}{4}$. **b. $\frac{1}{8}$.** c. 0. d. $-\frac{1}{8}$. e. $-\frac{1}{4}$.

$$f'(x_0) = \frac{-2x_0}{(x_0^2+3)^2} \text{ é coef ang da reta tg em } x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2} \text{ tem máximos? } (x \in \mathbb{R})$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (x^2+3)^2 + 2x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x = 0$$

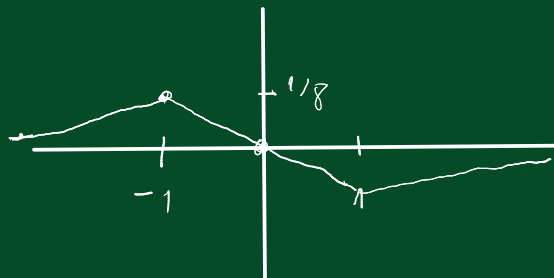
$$\Leftrightarrow (x^2+3) [-2(x^2+3) + 8x^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$g(-1) = \underline{\underline{1/8}} = -g(1) \Rightarrow -1 \text{ é pto de máx local}$$

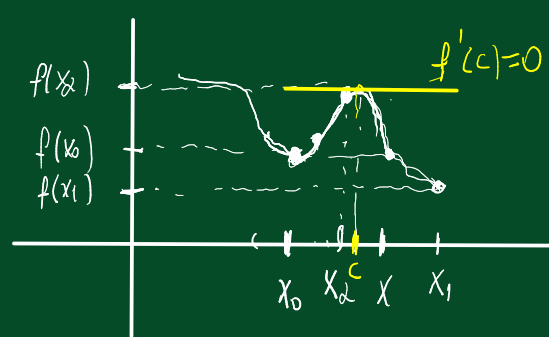
global

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = 0$$



19. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0 . Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f , então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f .

$\exists! x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f'(x_0) = 0$ e x_0 é min local então é mínimo global.



f é derivável $\Rightarrow f$ é contínua

x_0 é min local $\Rightarrow \exists x_2 > x_0$ tq $f(x_2) > f(x_0)$

Suponha que existe $x_1 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) < f(x_0)$

$f: [x_2, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2) \xRightarrow{\text{TVF}}$$

$\exists x \in]x_1, x_2[$ tq $f(x) = f(x_0)$

$f: [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua

e derivável em $]x_0, x[$ e $f(x) = f(x_0) \Rightarrow \exists c \in]x_0, x[$ tq $f'(c) = 0$ ∇

Rolle



x_0 n' é o
único pto crítico de f

38] $f(x) = e^x/x \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

f'	+	-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

1 é pto de min global $\Rightarrow f(x) \geq f(1) \forall x \in \mathbb{R}$
 $\parallel$
 e

$$\frac{e^x}{x} \geq e, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(a) = e^a/a \quad f(b) = e^b/b$$

$$f(a) \cdot f(b) = \frac{e^a}{a} \cdot \frac{e^b}{b} = \frac{e^{a+b}}{ab} > e^2, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$30. w] \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{x+4} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{x+4} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{3}{x})^x \cdot (1+\frac{3}{x})^4}{(1+\frac{2}{x})^x \cdot (1+\frac{2}{x})^4} \right) = \ln \left(\frac{e^3 \cdot 1}{e^2 \cdot 1} \right) = 1.$$

"1. ∞ "

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} (a^x + b^x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(a^x + b^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a^x + b^x)}{x}} = e^{\max\{\ln a, \ln b\}} = e^{\max\{a, b\}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^x + b^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln a \cdot a^x + \ln b \cdot b^x}{a^x + b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln a \cdot \frac{a^x}{a^x + b^x} + \ln b \cdot \frac{b^x}{a^x + b^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln a \cdot \frac{1}{1 + (b/a)^x} + \ln b \cdot \frac{1}{1 + (a/b)^x} \stackrel{(*)}{=}$$

$$a > b: (b/a)^x \rightarrow 0, (a/b)^x \rightarrow +\infty \Rightarrow (*) = \ln a$$

$$b > a: \curvearrowright \Rightarrow (*) = \ln b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a/x)^x = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^{\mu} \right]^a = e^a$$

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\mu}$$

$\Downarrow$

$$\mu = \frac{x}{a}$$

$\curvearrowright$

$$e = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y}$$

(o) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

1) $D_f = \mathbb{R}$.

2) $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = \frac{x \cdot (3x - 2)}{3 \cdot (x^3 - x^2)^{2/3}}, x \neq 0, x \neq 1$

	0	$\frac{2}{3}$	1	
f'	+	-	+	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty$

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(x - 1)^{2/3}} = \pm\infty$

3) $f''(x) = \frac{1}{3} \cdot (3x - 2)(x^3 - x^2)^{-2/3} + \frac{1}{3}x \cdot 3(x^3 - x^2)^{-2/3} + \frac{1}{3}x(3x - 2)\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (x^3 - x^2)^{-5/3} \cdot (3x^2 - 2x)$

$= \frac{1}{3}(3x - 2)(x^3 - x^2)(x^3 - x^2)^{-5/3} + x(x^3 - x^2)(x^3 - x^2)^{-5/3} - \frac{2}{9}x^2(3x - 2)^2(x^3 - x^2)^{-5/3}$

$= \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-5/3} \left[(3x - 2)(x^3 - x^2) + x(x^3 - x^2) - \frac{2}{3}(3x - 2)^2 \right] = \frac{-2}{9} \frac{x^2}{(x - 1)x^2)^{5/3}}$

	0	1	
f''	+	+	-
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$

$y = ax + b$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

5) $f(0) = 0$
 $f(1) = 1$

6) Asymptota: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{3}x - x = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = ?$

