30)

$$\text{(m)}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\,\mathrm{arctg}x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{\mathrm{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{(1+x^2)\,\mathrm{atan}\,x+x}{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)\,\mathrm{atan}\,x+x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+x^2)\underbrace{\frac{\mathrm{atan}\,x}{x}}_{\to 1}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

ou

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{atan}\,x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

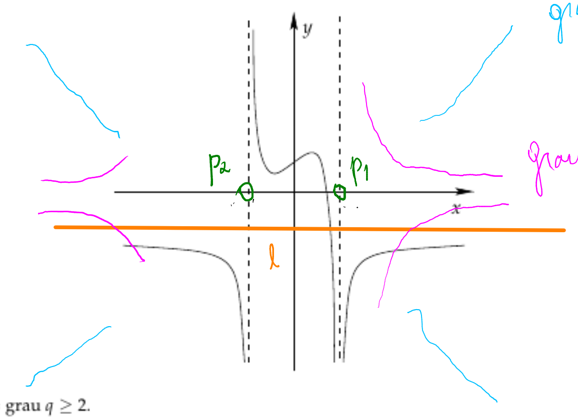
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\underbrace{2x\,\mathrm{atan}\,x}_{\to 0}+1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{(l)}\quad\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = \text{"}+\infty-\infty\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\overbrace{x\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

35. (Transferência Fuvest 2002) Sabendo que a figura abaixo é o esboço do gráfico de uma função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que p e q são polinômios, tem-se



grau p > grau q

grau p < grau q

a. grau p = grau $q \geq 2$.
b. grau p = grau $q \leq 2$.
c. grau $p >$ grau $q > 2$.
d. grau $p >$ grau $q = 2$.
e. grau $p <$ grau $q = 2$.

$$x^2 \to +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5+3x^2+2}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\overbrace{\left(1+3/x^3+2/x^5\right)}^{\to 1}}{x^3\underbrace{\left(1+2/x^2+1/x^3\right)}_{\to 1}} = +\infty$$

Se $\lim_{x \to p_1} q(x) = a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to p_1} f(x) = f(p_1) = \frac{p(p_1)}{q(p_1)} \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{(x+1)}{(x+1)^2(x+2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

grau $q = 3$
grau $p = 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = l^{\neq 0} \Rightarrow \text{grau } p = \text{grau } q$$

$\lim_{x\to p_1} f(x) = -\infty \Rightarrow p_1$ é raiz de q

$\lim_{x\to p_2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to p_2^-} f(x) = -\infty \Rightarrow p_2$ é raiz de q

$\Big\}$ grau $q(x) \geq 2$

Lista 1:

1.8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 2|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^3)}{x}$.

$$\Downarrow$$

$$|f(x^3)| \leq 2|x^3| \Rightarrow \left| \frac{f(x^3)}{x} \right| \leq 2 \left| \frac{x^3}{x} \right| = 2x^2$$

$$\Downarrow$$

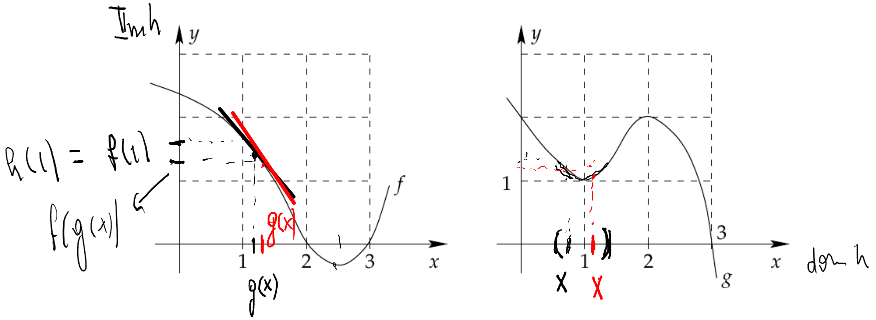
$$\underbrace{-2x^2}_{\to 0} \leq \frac{f(x^3)}{x} \leq \underbrace{2x^2}_{\to 0} \quad (\text{se } x \to 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^3)}{x} = 0.$$

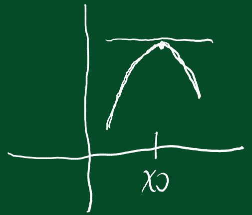
Lista 2:

27. (Transferência 2017) Considere as funções deriváveis f e g cujos gráficos estão esboçados abaixo:



Seja $h = f \circ g$. Sabendo que $x = 1$ é ponto de mínimo local de g e que $g(1) = 1$, é correto afirmar que

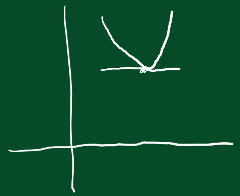
a. $h'(1) > 0$.
b. $h'(1) < 0$.
c. $x = 1$ é ponto de inflexão de h.
d. $x = 1$ é ponto de mínimo local de h.
e. $x = 1$ é ponto de máximo local de h.



$f'(x) > 0, \; x < x_0$

$f'(x) < 0, \; x > x_0$

$f'(x_0) = 0$



$f'(x) < 0, \; x < x_0$

$f'(x) > 0, \; x > x_0$

$f'(x_0) = 0$

$h(x) = f(g(x))$

$g(1) = 1$ e $g'(1) = 0$

$h(1) = f(g(1)) = f(1)$

		1	
h'	$+$		$-$
h	↗		↘

$h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

$\Downarrow$

$h'(1) = f'(g(1)).g'(1) = 0$

$\Rightarrow x_0 = 1$ é candidato a máx ou mín de h.

$x < 1: \; h'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{<0}.\underbrace{g'(x)}_{<0} > 0$

$x > 1: \; h'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{<0}.\underbrace{g'(x)}_{>0} < 0$

1 é máx local de h.

$h''(x) = f''(g(x)).g'(x)^2 + f'(g(x)).g''(x)$

$h''(1) = f''(g(1)).\underbrace{g'(1)^2}_{0} + \underbrace{f'(g(1))}_{<0}.\underbrace{g''(1)}_{>0} < 0$

$\Rightarrow$ 1 ñ é pto de inflexão de h.

24. (Transferência Fuvest 2013) Seja $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, em que a e b são números reais. Sabe-se que $x = 1$ é ponto de máximo local e que $f(1)f(-1) = -3$, Nessas condições, $a + b$ vale

a. -3. **b.** -1. **c.** 0. **d.** 1. **e.** 3.

$\boxed{f'(x) = -2 + \frac{2}{x^3}} < 0$ ou $f'(x) = \cancel{2} - \frac{2}{x^3} > 0$ se $x > 1$

$x > 1$ ✓

$f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f'(x) = a - \frac{2b}{x^3} < 0$

- 1 é máx local (*): $f'(1) = 0 \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2b}$
- $f(1) \cdot f(-1) = -3 \Rightarrow (a+b)(b-a) = -3 \Rightarrow \boxed{b^2 - a^2 = -3}$

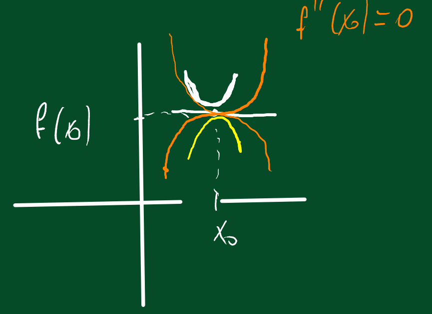
$b^2 - 4b^2 = -3 \Rightarrow b = \pm 1 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\boxed{a + b = \pm 3}}$

(*) $x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$; $x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ $\Rightarrow a, b < 0 \Rightarrow \boxed{a + b = -3.}$

Teste da 2^a derivada

x_0 é pto crítico $(f'(x_0) = 0)$

- se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é mín local
- se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é máx local



$f''(x) = \frac{6b}{x^4} \Rightarrow \underbrace{f''(1)}_{6b} < 0 \Rightarrow b < 0$