- Concavidades
- Esboço de gráficos
- Regras ede L'Hospital
- Mais esboço de gráficos (assíntotas)

Lembrando: $f''(x) > 0, \forall x \in I \Rightarrow$ $<$

f tem concavidade para cima em I
baixo

Definição: Um ponto no domínio de f é de inflexão se existe intervalo aberto aberto que o contém tal que, neste intervalo, as concavidades de f, antes e depois de $x_0$ são opostas.

Proposição: Se f é de classe $C^2$ e $x_0$ é pto de inflexão então $f''(x_0) = 0$ ← $f''$ é contínua

Obs: $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ de inflexão.

$x_0$ máx local $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$x_0$ é inflexão $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Dem.: $x_0 \in D_f$, $f''(x_0) > 0$, $\exists I$ int. aberto tq $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f tem conc. p/ cima em I

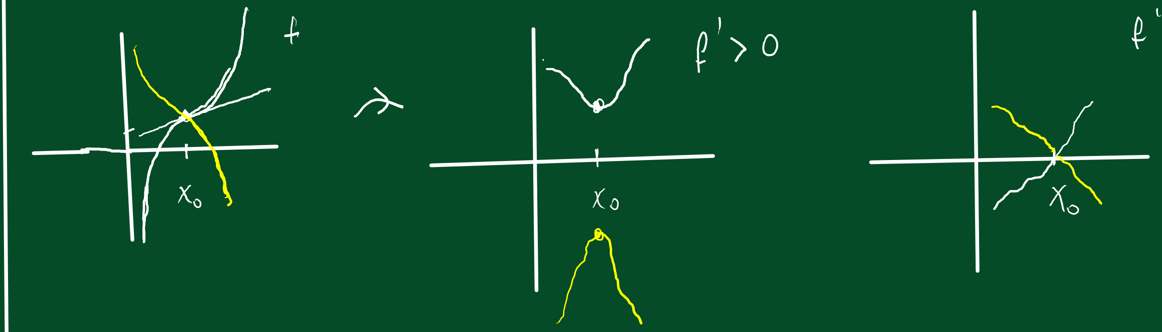
$f''(x_0) < 0$, — — — — — $f''(x) < 0 \Rightarrow$ " " baixo

Se $x_0$ é pto de inflexão só resta $f''(x_0) = 0$.

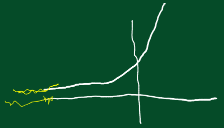
•) Sobre a Obs.: $f(x) = x^4 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \geq 0$ $f''(0) = 0$.

$x_0 = 0$ não é pto de inflexão.

•) $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ é candidato a máx ou min de $f'$.



Exemplo: 1) $f(x) = e^{-x^2}$



crescimento: $f'(x) = \underbrace{e^{-x^2}}_{>0} \cdot (-2x)$

$\qquad\qquad\quad 0$

| | | |
|---|---|---|
| $f'$ | + | − |
| $f$ | ↗ | ↘ |

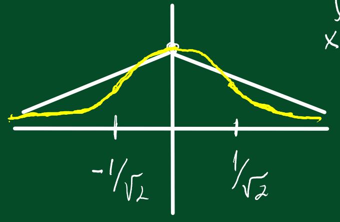
$x \to +\infty$

$x^2 \to +\infty$

$-x^2 \to -\infty$

$e^{-x^2} \to 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$




concavidade: $f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2}$

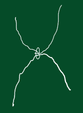
$= (4x^2 - 2)\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$

| | | $-1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | + | − | + |
| $f$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |

2) $f''(x) = 0, \forall x \Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f(x) = ax + b$ não tem concavidade.

3) $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$

$x_v = -\frac{b}{2a}$



$y_v = -\Delta/4a$

$2x^2 + \underbrace{6}x + \underbrace{9}$

$x_v = -3$

$y_v = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

•) $e^x > x \,, \; x > 0$

$g(x) = e^x - x$

$g(0) = 1 > 0$

$g'(x) = e^x - 1 > 0, \; x > 0$

$\Downarrow$

$g$ crescente $\Rightarrow g(x) > g(0) = 1 > 0, \; x > 0$

$e^x - x > 0 \Rightarrow e^x > x.$

•) $e^x > x^2/2 \,, \; \forall x \in \mathbb{R}$

$h(x) = e^x - x^2/2 \,, \; h(0) = 1 > 0$

$h'(x) = e^x - x = g(x) > 0$

$\Downarrow$

$h$ é cresc. $\Rightarrow e^x > x^2/2$

$x > 0: \; \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

⋮

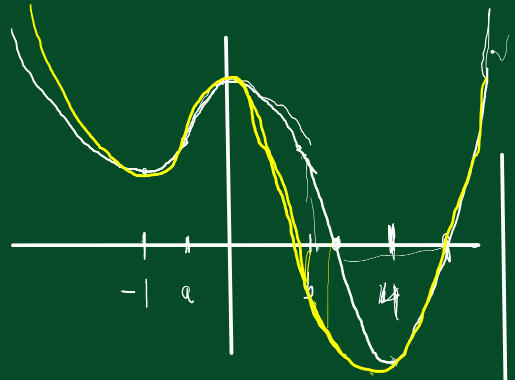
•) $e^x > x^n/n! \,, \; x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{n-1}} = +\infty$

•) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \; \alpha > 0$

$n = \frac{x}{\alpha}$ ....

Exercício: $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ , $-2 \le x \le 3$




Wei garante máx e min globais.

·) no bordo: $f(-2) = \_\_$ e $f(3) = \_\_$

·) no interior: $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x.(x^2 - 3x - 4) = x(x-4)(x+1)$

| | -1 | 0 | ~~4~~ | |
|---|---|---|---|---|
| f' | − | + | − | + |
| f | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

$f(-1) = \_\_$

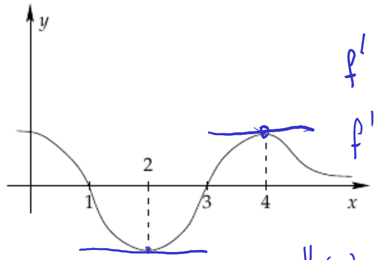
$f(0) = 3$

$1 \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$

·) concavidade: $f''(x) = 3x^2 - 6x - 4 = (x-a)(x-b)$

| | a | b | |
|---|---|---|---|
| f'' | + | − | + |
| f | ∪ | ∩ | ∪ |

**26.** (Transferência Fuvest 2007) Seja $f$ uma função derivável até segunda ordem e suponha que o gráfico da função derivada $f'$ seja representado pela figura abaixo:




Pode-se afirmar que a única alternativa incorreta é

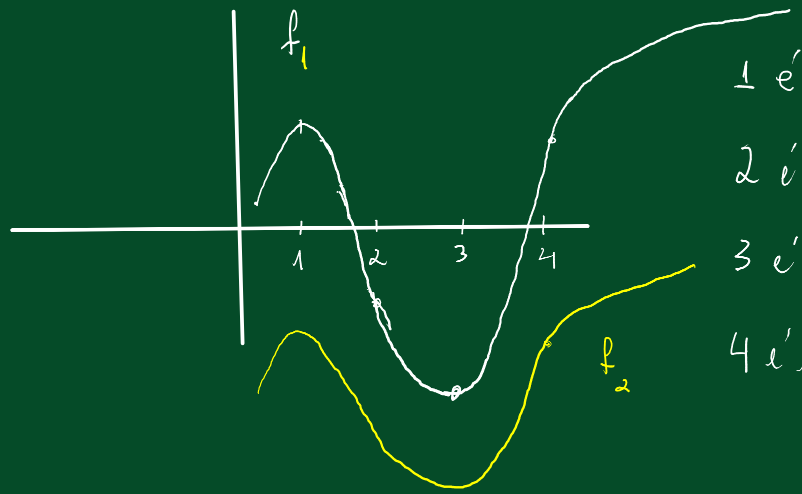
**a.** $f$ possui concavidade para cima no intervalo $]1, 2[$. X

**b.** $x = 1$ é ponto de máximo local de $f$ e $x = 3$ é ponto de mínimo local de $f$.

**c.** $f$ possui concavidade para cima no intervalo $]3, 4[$.

**d.** $f$ é crescente para $x < 1$ e também para $x > 3$ e decrescente para $1 < x < 3$.

**e.** $x = 2$ e $x = 4$ são pontos de inflexão de $f$.




1 é máx local

2 é inflexão

3 é min local

4 é inflexão

$f_1(x) - f_2(x) = k$