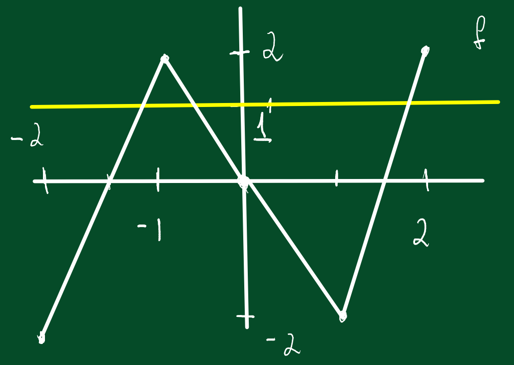
·) Quantas soluções tem a equação $x^3 - 3x = 1$ no intervalo $[-2,-1]$? E em $[-1,2]$?

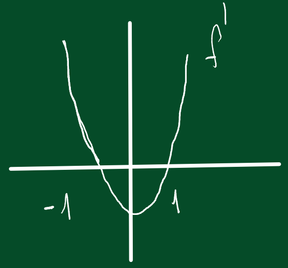


$f(x) = x^3 - 3x$

1) $\left.\begin{array}{l} f(-2) = -2 \\ f(-1) = 2 \end{array}\right\}$ TVI $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [-2,-1]$ tq $f(x_0) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow$

		-1		1	
f'	+		−		+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



f é crescente em $]-2,-1[\Rightarrow x_0$ é a única solução de $f(x) = 1$ em $[-2,-1]$.

2) $\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ f(2) = 2 \end{array}\right\}$ TVI não diz nada.

$f(0) = 0$, TVI $\Rightarrow \exists\, x_1 \in [-1,0]$ tq $f(x_1) = 1$

f é decrescente em $[-1,0]$, x_1 é o único tq $f(x_1) = 1$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f(2) = 2 \end{array}\right\}$ TVI + TVM $\Rightarrow \exists!\, x_2\ [1,2]$ tq $f(x_2) = 1$

Lista 2: 8) $f(x) = (1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}, \quad x > 0$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(x+1)\right)'$$

$$= (1+x)^{1/x}\cdot\left[\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(x+1) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{(1+x)^{1/x}}{x^2(x+1)}}_{>0}\underbrace{\Big[-(x+1)\ln(x+1) + x\Big]}_{\leq 0}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é decrescente, se $x > 0$.

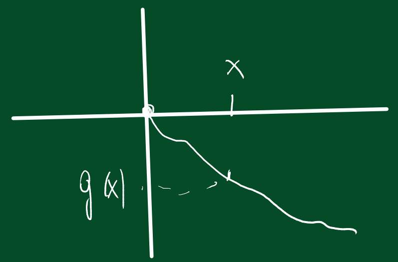
$e < \pi \Rightarrow f(e) > f(\pi)$

$\Rightarrow (1+e)^{1/e} > (1+\pi)^{1/\pi}$

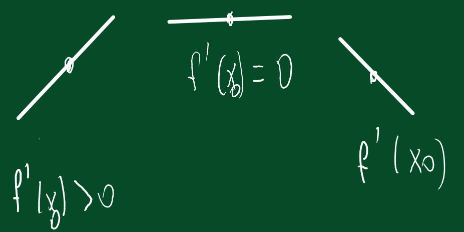
$\Rightarrow (1+e)^{\pi} > (1+\pi)^{e}$.

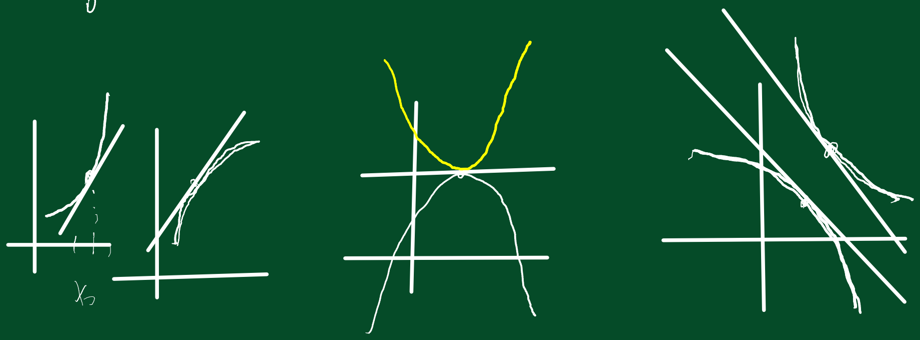
$g(x) = x - (x+1)\ln(x+1), \quad x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g'(x) = 1 - \ln(x+1) - 1 = -\ln(x+1) \leq 0 \end{array}\right\} g(x) \leq 0$$



Concavidades:





Def.: f tem concavidade p/ cima em x_0 se existe intervalo aberto I, $x_0 \in I$ tq $f(x) > T(x)$, $\forall x \in I$, $x \neq x_0$.

$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (reta tg ao gráf. de f em x_0)

Teorema: Se f admite segunda derivada então:

(i) $f''(x) > 0, \forall x \in I \Rightarrow$ f tem concavidade p/ cima

(ii) $f''(x) < 0, \forall x \in I \Rightarrow$ f tem conc. p/ baixo.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

$f'(x) = 0 \Downarrow x = \frac{-b}{2a}$

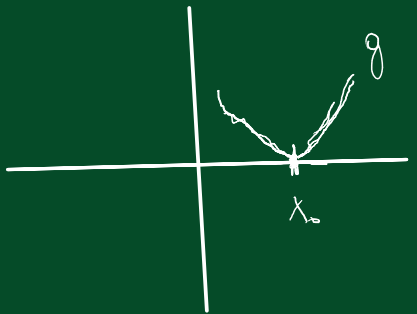
Dem.: $f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ é crescente.

$g(x) = f(x) - T(x) \Rightarrow g(x_0) = f(x_0) - T(x_0) = 0$

$g'(x) = f'(x) - T'(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

$g'(x_0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x > x_0: f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow g'(x) > 0 \text{ é pos} \Rightarrow g(x) \text{ é cresc.} \\ x < x_0: f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g(x) \text{ é decresc.} \end{array}\right\} x_0 \text{ é min local de } g$



$g(x) > \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{g(x_0)}$, $\forall x \in I$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > T(x)$, $x \in I$, $x \neq x_0$.