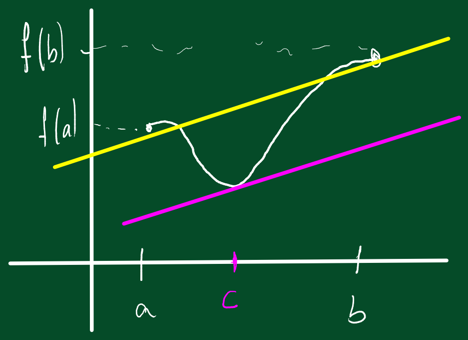
Teorema: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e derivável em $]a,b[$. Então existe $c\in\,]a,b[$ tq $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont.



Corolário: Se $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ derivável, tq $f'(x)=0,\ \forall x\in\,]a,b[$, então f é constante.

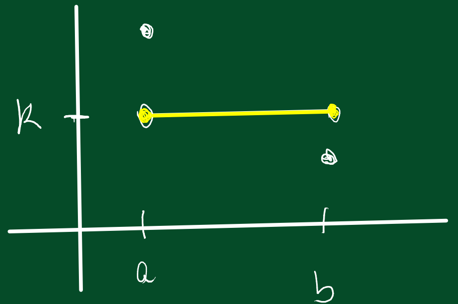
Dem.: Sejam $x_1<x_2\in\,]a,b[$.

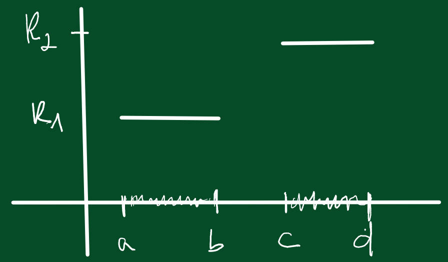
$I=[x_1,x_2]$. f é contínua em $[x_1,x_2]$ e derivável em $]x_1,x_2[$. Do TVM,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=0,\ c\in\,]x_1,x_2[$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_2)=f(x_1)\ \#$$





$3\le 3 \not\Rightarrow 3<3$

$2\le 3 \Leftarrow 2<3$

$$\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{b-a}\le\frac{1}{a^2}$$

Corolário: Se $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínuas, deriváveis em $]a,b[$ tq $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in\,]a,b[$, então $f(x)=g(x)+K$, $K\in\mathbb{R}$.

Dem.: $f'(x)=g'(x)\Rightarrow f'(x)-g'(x)=0\Rightarrow (f-g)'(x)=0$

$\Rightarrow (f-g)(x)=K\Rightarrow f(x)-g(x)=K\Rightarrow f(x)=g(x)+K$.

$c^2>a^2>a>1$

Exercício 6-c) $\dfrac{\ln b}{b}-\dfrac{\ln a}{a}\le\dfrac{b-a}{a^2}$, $1\le a<b\le e$ $\quad 1\le a<c<b\le e$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in[1,e]$

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=\dfrac{1-\overbrace{\ln c}^{0\le\cdot\le 1}}{c^2}$, $c\in[a,b]$

$\le\dfrac{1}{c^2}\le\dfrac{1}{a^2}$.

$\Rightarrow \dfrac{\ln b}{b}-\dfrac{\ln a}{a}\le\dfrac{b-a}{a^2}\ \#$

$1\le a<c \Rightarrow a\le \overbrace{a^2<a.c<c^2}\Rightarrow \dfrac{1}{c^2}<\dfrac{1}{a^2}$

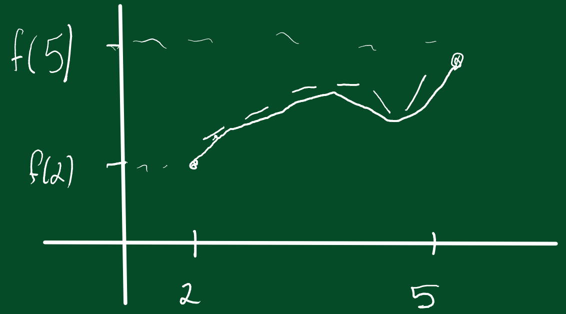
$f: [2,5] \to \mathbb{R}$, cont. e deriv. em $]2,5[$

$0 \leq f'(x) \leq 1 \Rightarrow \dfrac{f(5) - f(2)}{5-2} = f'(c) \leq 1$
≥ 0

≥ 0

$\Rightarrow f(5) - f(2) \leq 3$

$\Rightarrow f(5) \leq f(2) + 3 \qquad f(5) \geq f(2)$



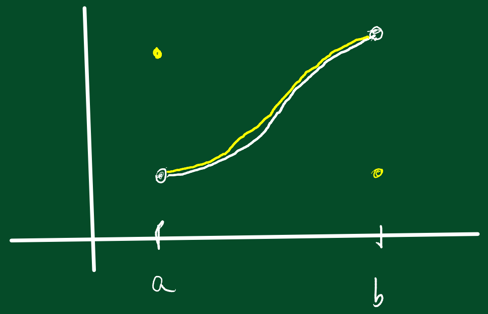
Proposição: Seja $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, derivável, tq $f'(x) \geq 0$ ($\leq$), $\forall x \in]a,b[$.
Então f é crescente (decrescente) $(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$

Dem.: sejam $x_1 < x_2$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}$ (≤ 0), $c \in]x_1, x_2[$

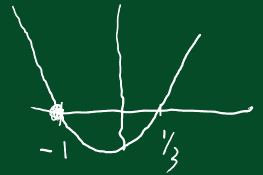
$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ($\leq$) $\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ ($\leq$) #

Obs.: Vale para $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, se f é cont. em $[a,b]$



Exemplo: $f(x) = \dfrac{x^2-x}{1+3x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$



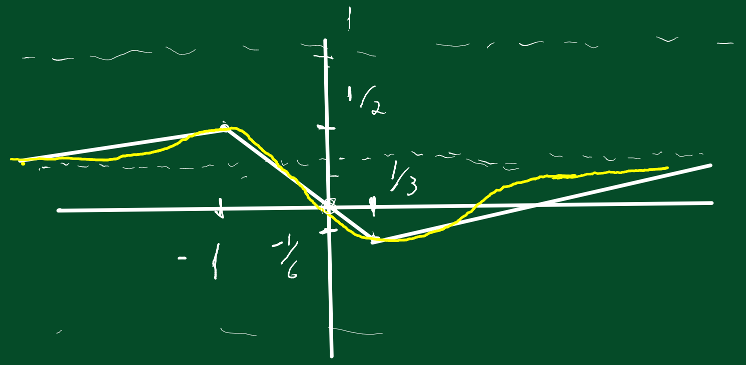
$$f'(x) = \frac{(2x-1)(1+3x^2) - (x^2-x)6x}{(1+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+6x^2+2x-1}{(1+3x^2)^2} = \frac{3x^2+2x-1}{(1+3x^2)^2}$$

	-1		1/3	
f'	+		−	+
f	↗		↘	↗

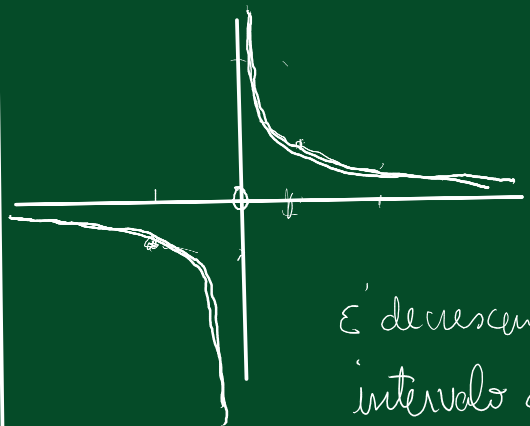
-1 é pto de máx local (global)

1/3 é pto de min local (global)



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1/3$
+

Ex.: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \overset{?}{\Rightarrow} f$ é decrescente



$f(-1) = -1$ $\quad -1 < 1/2 \quad f(-1) < f(1/2)$

$f(1/2) = 2$

⇓

f ñ é decrescente!

É decrescente em cada intervalo do domínio

Número de soluções de equações:

Quantas sols tem $x^3-x=1$ no intervalo $]-2;1[$? E em $]-1,2[$?

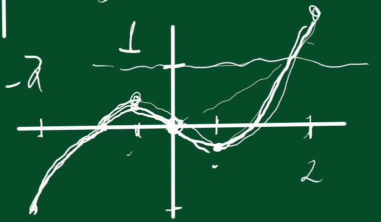
$f(x) = x^3-x$, $f'(x) = 3x^2-1$

	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	
f'	+		−	+
f	↗		↘	↗

•) $f(-2) = -6$, f crescente

$f(1) = 0$

⇓



não tem sol.

•) $f(2) = 6 \overset{TVI}{\Longrightarrow}$ tem sol!

$f(-1) = 0$

f' diz que é só uma vez