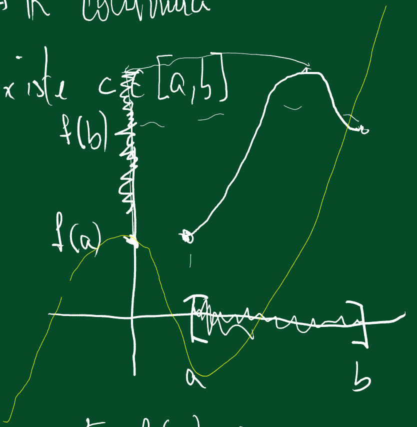
- Consequências to TVI;
- Weierstrass e Fermat;
- Rolle e TVM.

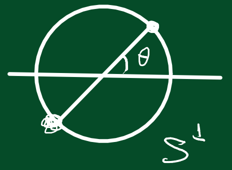
$f(x)$ tq $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ é sobrejetora
cont.

Teorema: Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e y entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe $c \in [a,b]$ tq $f(x)=y$.



Consequências:

- f leva intervalos em intervalos
- se $f(a).f(b) < 0$, $\exists c \in]a,b[$ tq $f(c)=0$
-



$f: S^1 \to \mathbb{R}$ contínua
existem pontos antípodas onde f tem o mesmo valor

$f:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$

$g(x) = f(x) - f(x+\pi)$

$g(0) = f(0) - f(\pi)$

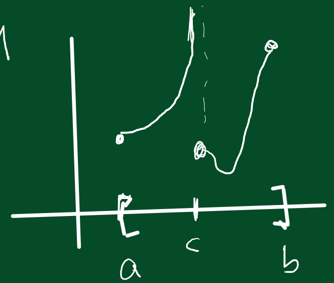
$g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0)$

$g(0) = -g(\pi) \Rightarrow g(0).g(\pi) \leq 0 \overset{TVI}{\Rightarrow} \exists \theta \in [0,\pi]$ tq $g(c)=0$

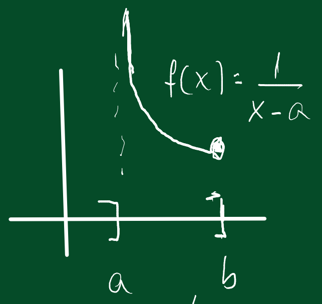
$\Rightarrow f(\theta) = f(\theta + \pi)$.

Máximos e mínimos

Lema: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e limitada $|f(x)| \leq M$



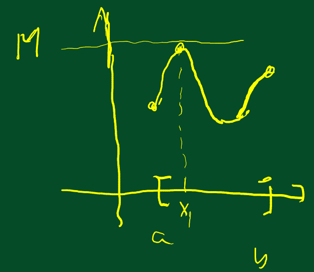
f não é contínua



ñ é limitada e é contínua

Teorema (de Weierstrass):
Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua
então existem x_0 e x_1 em $[a,b]$
tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [a,b]$.

x_0 é ponto de mínimo (global)
x_1 é ponto de máximo (global).



$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

quero $x_1 \in [a,b]$ tq $f(x_1) = M$

Teorema (de Weierstrass):

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua

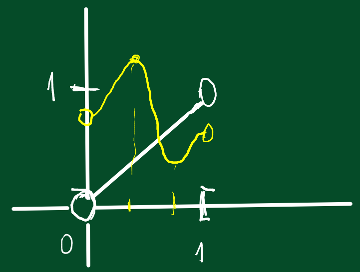
então existem x_0 e x_1 em $[a,b]$

tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in [a,b]$.

x_0 é ponto de mínimo (global)

x_1 é ponto de máximo (global).

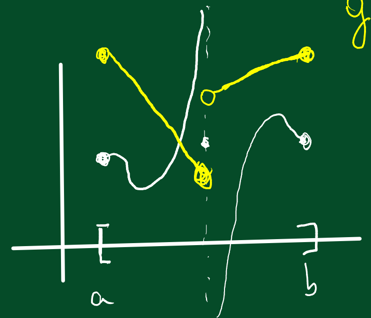
•) se o domínio de f não é intervalo fechado.



f é contínua mas não atinge valor máximo nem mínimo

g tem máx e mín

•)

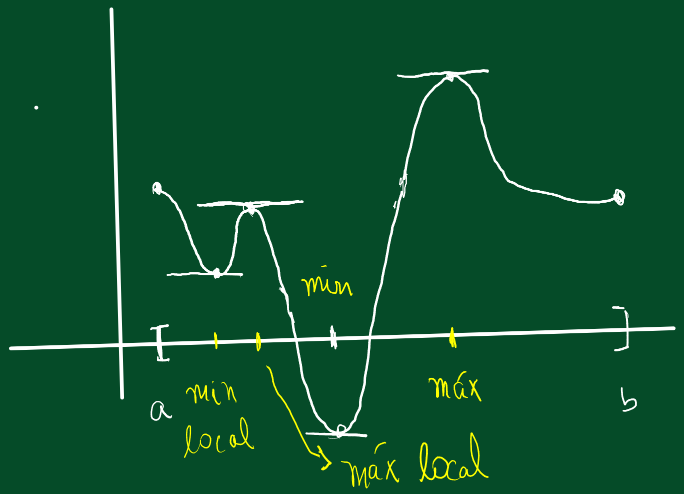


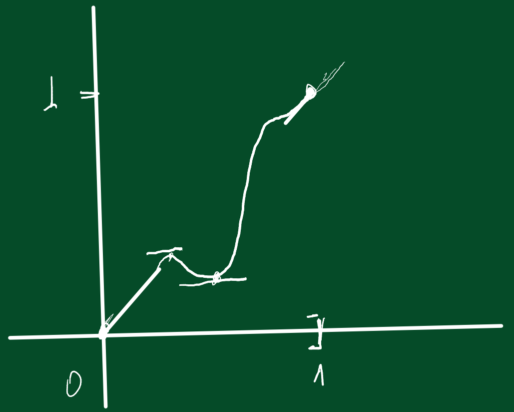
f ñ é cont e ñ tem máx nem mín.

g tem máx e mín.

Def.: $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 é pto min local se existe um intervalo aberto J contendo x_0 tq
$f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in J$

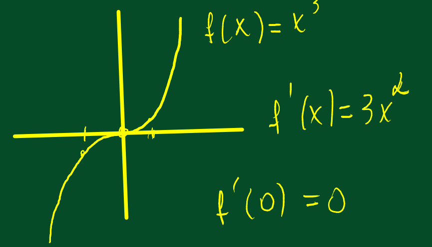
x_1 é pto max local se existe um intervalo aberto J contendo x_1 tq
$f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in J$

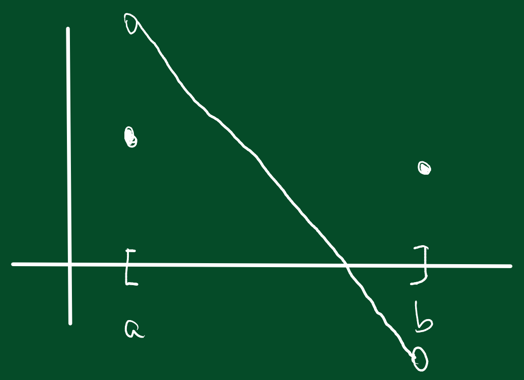




Teo (Fermat): Seja $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivável. Se x_0 é max ou min local de f, então $f'(x_0) = 0$

ATENÇÃO: Se $f'(x_0) = 0$, x_0 não é necessariamente pto de máx ou min local





4.a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x \,,\quad x \in [0, \pi]$

Wei $\Rightarrow$ tem máx e min (globais)

Fermat $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x = -1$

$\Rightarrow x = 3\pi/4$

(ñ está no interior)

$f(3\pi/4) = \sqrt{2}$

$f(0) = -1$

$f(\pi) = 1$

$x_0 = 0$ é ponto de min

$x_1 = \frac{3\pi}{4}$ é ponto de máx.

Ex.: $f(x) = x^3 - 3x,\quad x \in [-1, 2]$

Wei $\Rightarrow$ tem (globais)

Fermat: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x \cancel{= -1}$

Candidatos: $x = 1 \quad f(1) = -2$
$x = -1 \quad f(-1) = -2$
$x = 2 \quad f(2) = 2$

-1 e 1 são mínimos globais

2 é máx global.

4.c) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x,\quad \frac{1}{2} \leq x \leq 4$

Wei ✓

Fermat: $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \cancel{x = 0}$ e $x = 1$

$f(1/2) = 2 - \ln 2$; $\underset{\text{min.}}{f(1) = 1}$; $\underset{\text{max}}{f(4)} = \frac{1}{4} + \ln 4 = \frac{1}{4} + 2\ln 2$ $\quad f(1/2) \geq f(1);\ f(1) \leq f(4)$