Exercício. Calcule, caso existam:

a. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}+x;$

b. $\lim_{x\to+\infty} x\sin(x)\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right).$

a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}+x = \text{"}\infty-\infty\text{"}$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2\left(1-3/x\right)}+x =$

$\lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-3/x}+x=$

$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to-\infty}\underbrace{\left(1-\sqrt{1-3/x}\right)}_{\to 0} = \text{"}0.\infty\text{"}$

$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}+x \cdot \dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)}{\sqrt{x^2-3x}-x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}-x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3x}{\underbrace{|x|}_{-x}\sqrt{1-3/x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3\cancel{x}}{-\cancel{x}\left[\left(\sqrt{1-3/x}\right)+1\right]}$

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1-\underbrace{3/x}_{\to 0}}+1} = \dfrac{3}{2}$

$x\underbrace{\cos(1/x)}_{\to 1}-x$ não

$= x-x=0$ pode!

$\lim_{x\to+\infty} x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad u=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$

$\|$

$\lim_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(u)}{u}$

$\|$

1

Comentários:

$\lim_{x\to+\infty} x.0 = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x}^{\to+\infty}.\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1.$

ñ é indet. $\quad$ "$0.\infty$"

$\lim_{x\to\infty} \overbrace{x}^{\to+\infty}.\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} = 2$

$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^2}^{\to+\infty}.\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x}^{\to+\infty}.\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x}^{\to+\infty}.\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\text{ltda}}$ ñ existe

b) $\lim_{x\to+\infty} x.\operatorname{sen}x.\left(\cos\left(1/x\right)-1\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x.\operatorname{sen}\left(1/x\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = 1$

$= \lim_{x\to+\infty} x.\operatorname{sen}x\left(\cos(1/x)-1\right).\dfrac{\left(\cos(1/x)+1\right)}{\cos(1/x)+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\operatorname{sen}x.\left(\cos^2(1/x)-1\right)}{\cos(1/x)+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\operatorname{sen}x\left(-\operatorname{sen}^2(1/x)\right)}{\cos(1/x)+1}$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}}_{\to 1}\left(\underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\cos(1/x)+1}}_{\to 0}.\underbrace{(-\operatorname{sen}x)}_{\text{ltda}}\right) = 1.0 = 0$

Exercício. Suponha que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $x = 0$ tal que $f(x+h) = f(x) + f(h)$, para todos $x, h \in \mathbb{R}$.

a. Calcule $f(0)$.

b. Mostre que f é contínua em todos os pontos.

Dica. Considere a igualdade dada e veja o que acontece quando $h \to 0$.

a) $x = 0$, $h = 0$

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

$$\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

cont. de f em 0

b) $$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} f(x) + f(h) = f(x) + \lim_{h\to 0} f(h) \overset{\downarrow}{=} f(x) + f(0) = f(x)$$

$u = p + h$

$h \to 0 \Leftrightarrow u \to p$

$$\lim_{u\to p} f(u) = \lim_{h\to 0} f(p+h) = f(p) \Rightarrow f \text{ é contínua em } p.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = ?$$

É possível mostrar que $f(x) = a.x$, $a \in \mathbb{R}$

$n = 1 + 1 + \dots + 1$

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2.f(1)$

$f(n) = n.\underbrace{f(1)}_{a} \Rightarrow f(n) = a.n$

$f(p/q) = p/q.\underbrace{f(1)}_{a} \Rightarrow f(p/q) = a.(p/q)$

Exercício. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x) - f(p)| \leq \left(\sqrt{|x-p|}\right)^3$, para todos $x, p \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável, calculando sua derivada em cada ponto.

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$|f(x) - f(p)| \leqslant |x-p| \cdot \sqrt{|x-p|} \overset{x \neq p}{\Longrightarrow} \frac{|f(x)-f(p)|}{|x-p|} \leqslant \sqrt{|x-p|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right| \leqslant \sqrt{|x-p|} \Longrightarrow \underbrace{-\sqrt{|x-p|}}_{\to 0} \leqslant \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leqslant \underbrace{\sqrt{|x-p|}}_{\to 0} \overset{\text{confronto}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0 \Rightarrow f'(p) = 0, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to p^{\pm}} \sqrt{|x-p|} = 0$$

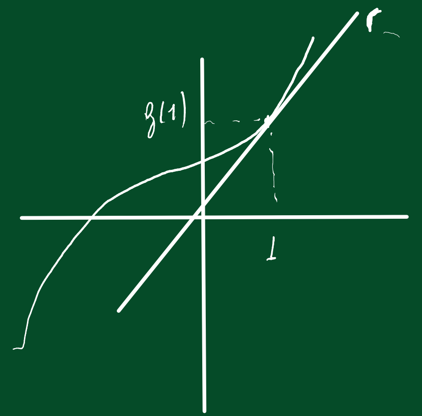
Exercício. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e seja $h(x) = f(g(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabe-se que:

(i) a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, g(1))$ tem equação $4x + 2y - 5 = 0$; r

(ii) a reta tangente ao gráfico de h no ponto $(1, h(1))$ é perpendicular à reta dada no item (i) acima e passa pelo ponto $(0, 1)$. s

Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

$$t: \quad y - \underbrace{f(1/2)}_{?} = \underbrace{f'(1/2)}_{?}\,(x - 1/2)$$



(i) $x = 1$ em r: $4 + 2y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow g(1) = 1/2$

$$r: y = \frac{5 - 4x}{2} \Rightarrow y = \underbrace{-2}_{g'(1)} x + 5/2 \Rightarrow g'(1) = -2$$

(ii) $s \perp r \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = 1/2 \Rightarrow h'(1) = 1/2$

$(0, 1) \in s$

$s: y = 1/2\, x + b \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow s: y = \frac{x}{2} + 1$

$(1, h(1)) \in s$, $x = 1$ em s: $y = 3/2 \Rightarrow h(1) = 3/2$

$$h(x) = f(g(x)) \xRightarrow{x=1} h(1) = f(g(1)) \Rightarrow \boxed{3/2 = f(1/2)}$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

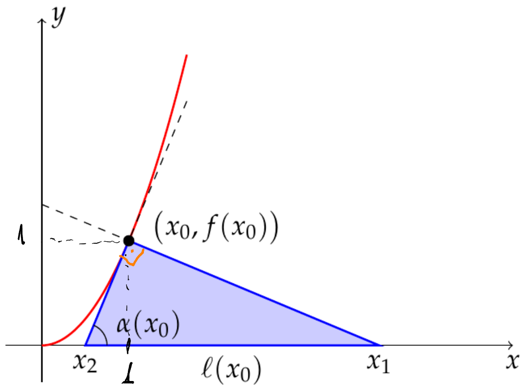
Em $x = 1$: $h'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$

$$1/2 = f'(1/2) \cdot (-2) \Rightarrow \boxed{f'(1/2) = -1/4}$$

$$t: y - 3/2 = \frac{-1}{4}(x - 1/2)$$

Exercício. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Considere o triângulo, indicado abaixo, formado pelo eixo Ox e as retas tangente e normal ao gráfico de f em cada ponto $(x, f(x))$, com $x > 0$.

$$\tan(\alpha(x_0)) = \frac{f(x_0)}{1 - x_2(x_0)}$$



$f'(x_0) = 2x_0$

$f'(1) = 2$

$f(1) = 1$

Com as notações da figura, determine a taxa de variação em $x_0 = 1$, das seguintes quantidades:

a. o lado $\ell(x)$; **b.** o ângulo $\alpha(x)$; **c.** a área do triângulo.

reta tangente: $r: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow r: y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$

$$\boxed{y = 2x_0 x - x_0^2}$$

reta normal: $s: y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{x}{2x_0} + x_0^2 + \frac{1}{2}}$

$$\left.\begin{aligned} x_2(x_0) &= x_0/2 \\ x_1(x_0) &= 2x_0^3 + x_0 \end{aligned}\right\} \ell(x_0) = x_1(x_0) - x_2(x_0) = 2x_0^3 + \frac{x_0}{2}$$

a) $\ell'(1) = ?$

$\ell'(x_0) = 6x_0^2 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

b) $\tan(\alpha(x)) = f'(x) \Rightarrow \tan(\alpha(x)) = 2x$

$\sec^2(\alpha(x_0)) \cdot \alpha'(x_0) = 2 \Rightarrow (1 + \tan^2(\alpha(x_0))) \cdot \alpha'(x_0) = 2x_0$

$x_0 = 1: (1 + 2^2) \cdot \alpha'(x_0) = 2 \Rightarrow \alpha_0'(x_0) = 2/5$

c) $A(x) = \frac{\ell(x) \cdot f(x)}{2} = \frac{(2x^3 + x/2) \cdot x_0^2}{2} = x^5 + x^3/4$

$A'(x_0) = \frac{\ell'(x_0) \cdot f(x_0) + \ell(x_0) \cdot f'(x_0)}{2} = \frac{23}{4}.$

Exercício.(P1–2019) Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $x\sin x + 2 \le f(x) \le x^2+2$. Considerando as afirmações

I. $f(0)=1$; **II.** $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x^2}=1$. **III.** f é contínua em $x_0=0$; **IV.** $f'(0)=1$.

Quais delas são verdadeiras?

I. $\cancel{\lim_{x\to0} x\sin x + 2 = 2 = \lim_{x\to0} x^2+2}$

$\cancel{\Downarrow}$

$\cancel{\lim_{x\to0} f(x) = 2}$ ~~(não fala nada sobre $f(0)$)~~

$$x\sin x + 2 \le f(x) \le x^2+2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$x=0$: $2\le f(0)\le 2 \Rightarrow f(0)=2$ I é falsa.

II. $\lim_{x}\frac{f(x)-2}{x^2} = ?$

$$x\sin x+2\le f(x)\le x^2+2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$x\sin x \le f(x)-2\le x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

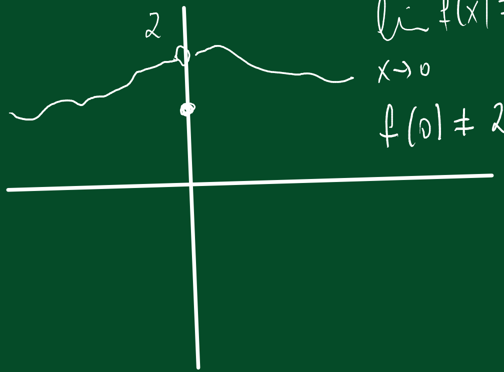
se $x\ne0$: $\frac{\sin x}{x}\le\frac{f(x)-2}{x^2}\le 1$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to0}1$

$\Downarrow$ confronto

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x^2}=1$

II é verdadeira



$\lim_{x\to0} f(x)=2$

$f(0)\ne 2$

Obs: $f(x)\le g(x) \Rightarrow f'(x)\le g'(x)$

é falso!

Ex.: $f(x)=\frac{1}{x}$, $0<x\le 1$ $f(x)\ge g(x)$

$g(x)=1$ $-\frac{1}{x^2}=f'(x)\le g'(x)=0$

III. $\lim_{x\to0} f(x)=2=f(0) \Rightarrow f$ é contínua em $x_0=0$. (verdadeira)

IV. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}=?$ é falsa

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\underbrace{x}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x^2}}_{\to1}=0\cdot1=0.$$

ou

$x>0$: $\sin x\le\frac{f(x)-2}{x}\le x \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-2}{x-0}=0$

$x<0$: $\sin x\ge\frac{f(x)-2}{x}\ge x\Rightarrow\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-2}{x-0}=0$

Exercício. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 1 \\ -x^3+3x^2-1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Discuta a existência das derivadas de todas as ordens de f.

$x<1$: $f'(x) = 3x^2$

$x>1$: $f'(x) = -3x^2+6x$

$x=1$: $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (laterais!)

Usando Ex 3.1: $g(x) = x^3 \Rightarrow g(1) = 1$ e $g'(1) = 3$

$h(x) = -x^3+3x^2-1 \Rightarrow h(1) = 1$ e $h'(1) = 3$

$\Rightarrow f'(1) = 3$

Logo $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x<1 \\ -3x^2+6x, & x>1 \\ 3, & x=1 \end{cases} \Rightarrow f'$ é contínua em todos os pontos

$f''(x) = ?$

$x<1$: $f''(x) = 6x$

$x>1$: $f''(x) = -6x+6$

$x=1$: $f''(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$ (laterais)

Ex 3.1: $g(x) = 3x^2 \Rightarrow g(1) = 3 \Rightarrow g'(1) = 6$

$h(x) = -3x^2+6x \Rightarrow h(1) = 3 \Rightarrow h'(1) = 0$

f' ñ é derivável em $x = 1$.

$f'': \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = \begin{cases} 6x, & x<1 \\ -6x+6, & x>1 \end{cases}$

é contínua em todo seu domínio

$f'''(x) = ?$

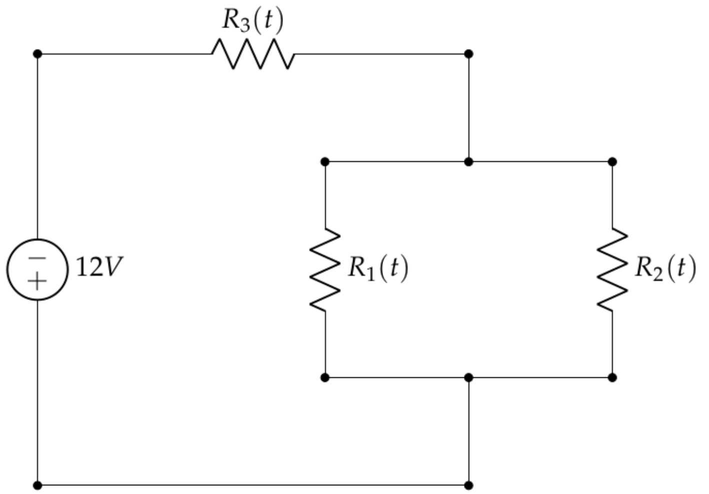
Ex. 3.1: $g(x) = 6x \Rightarrow g'(x) = 6$ $\quad g(1) = 6 = g'(1)$

$h(x) = -6x+6 \Rightarrow h'(x) = -6$ $\quad h(1) = 0$, $h'(1) = -6$

$f'''(x) = \begin{cases} 6, & \text{se } x<1 \\ -6, & \text{se } x>1 \end{cases}$ $\qquad f^{(4)}(x) = 0$, $\forall x \neq 1$

não definida em $x = 1$.

Exercício. Considere o circuito elétrico abaixo



Os resistores não conseguem manter sua resistividade constante (devido a variação da temperatura do ambiente e no componente, por exemplo). Seja t_0 um instante de tempo onde $R_1(t_0) = 20\Omega$, $R_2(t_0) = 30\Omega$, $R_3(t_0) = 3\Omega$ e as taxas de variação deles são, respectivamente $0,5\Omega/s$, $1\Omega/s$ e $0\Omega/s$. Determine, no instante t_0:

a. A taxa de variação da resistência total do circuito.

b. A taxa de variação da corrente no ponto logo após a fonte.

c. A taxa de variação da potência e da energia.

a) $R_T(t) = R_3(t) + \left(\frac{1}{R_1(t)} + \frac{1}{R_2(t)}\right)^{-1}$

$= R_3(t) + \frac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t)+R_2(t)}$

$$R_T'(t_0) = R_3'(t_0) + \frac{\left(R_1'(t_0)R_2(t_0) + R_1(t_0)R_2'(t_0)\right)\left(R_1(t_0)+R_2(t_0)\right) - R_1(t_0)R_2(t_0)\left(R_1'(t_0)+R_2'(t_0)\right)}{\left(R_1(t_0)+R_2(t_0)\right)^2}$$

$$= 0 + \frac{(0,5 . 30 + 20 . 1)(20+30) - 20 . 30(0,5+1)}{(20+30)^2}$$

$$= \frac{35 \times 50 - 600 \times 1,5}{50^2} = \frac{850}{2500} = \frac{17}{50}\ \Omega/s.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R_T(t_0) = 3 + \frac{20 . 30}{20+30} = 15\Omega \\ i(t_0) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{array}}$$

b) $i'(t_0) = ?$

$U(t) = R_T(t) . i(t) \Rightarrow 12 = R_T(t) . i(t) \Rightarrow 0 = R_T'(t_0) . i(t_0) + R_T(t_0) . i'(t_0)$

$\Rightarrow i'(t_0) = -\frac{R_T'(t_0) . i(t_0)}{R_T(t_0)} = -\frac{17/50 . 8/10}{15} = \frac{-0,34 . 0,8}{15}$ A/s

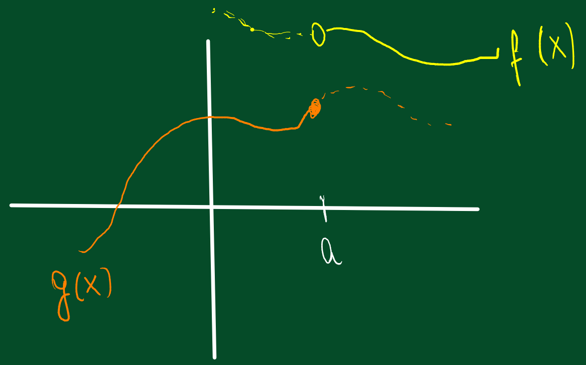
c) $P(t) = R(t) . i^2(t) = U(t) . i(t) = 12 . i(t)$

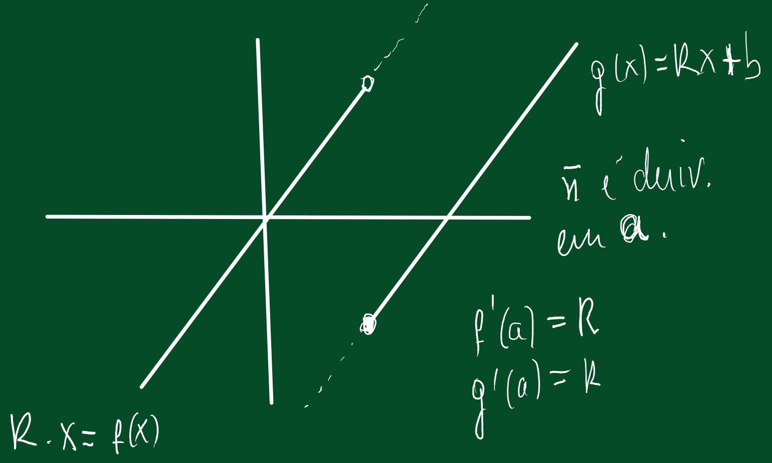
$\frac{dP}{dt}(t_0) = 12 . i'(t_0) = -\frac{4}{5} . \frac{17}{50} . \frac{8}{10}$ W/s $\left\{ \frac{dP}{dt}(t_0) = R'(t_0)i^2(t_0) + 2R(t_0)i(t_0)i'(t_0) \right.$

$\frac{dE}{dt}(t_0) = P(t_0) = -12 \times 0,8 = -9,6$ W.

3.1. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, $a \in I$ e $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq a, \\ g(x), & \text{se } x < a. \end{cases}$

Mostre que h é derivável em a se e somente se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$. Construa contra-exemplos removendo uma das condições de cada vez.





1. •) h é diferenciável em a ⇒ h é contínua em a

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = h(a) = f(a)$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) \overset{g \text{ é cont. em } a}{=} g(a)$$

h diferenciável em a ⇒ $f(a) = g(a)$.

•) h diferenciável em a ⇒ $h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$

$$h'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$h'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

h difvel em a ⇒ $f'(a) = g'(a)$

2. Se $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = ?$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - g(a)}{\cancel{x} - a} = g'(a)$$

logo $h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = f'(a) = g'(a)$.

Exercício. Sabe-se que uma circunferência de raio 1 e centro no eixo Oy tangencia a parábola $y = x^2$ no ponto (p, p^2), onde $p > 0$. Determine o centro da circunferência. Quantos outros pontos sobre a parábola têm essa propriedade? Justifique.

r_n é a reta normal à parabola em (p, p^2)

$f(x) = x^2$

$f'(p) = 2p$

$r_n: \; y - p^2 = -\dfrac{1}{2p}(x - p)$

$r_n: \; y = \dfrac{-x}{2p} + p^2 + \dfrac{1}{2}$

$x = 0$ em $r_n \Rightarrow y_c = p^2 + \dfrac{1}{2}$

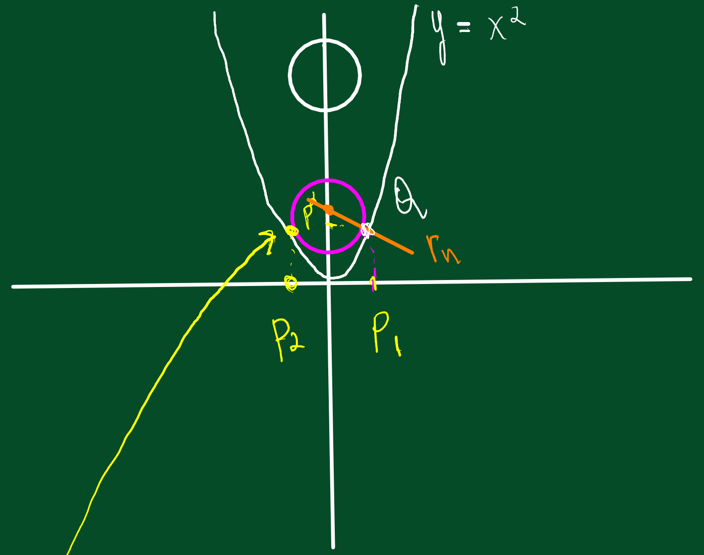
Centro: $C = \left(0, p^2 + \dfrac{1}{2}\right)$

$Q = (p, p^2)$

$d(C, Q) = 1 \Rightarrow \sqrt{(p-0)^2 + (p^2 - (p^2 + 1/2))^2} = 1$

$\Rightarrow p^2 + 1/4 = 1 \Rightarrow p^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow p_1 = \sqrt{3}/2 \quad \left(p_2 = -\sqrt{3}/2\right)$

$\Rightarrow y_c = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}.$



(p, p^2) no círculo e na parábola

$$\begin{cases} x^2 + (y - c)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$x^2 + (x^2 - c)^2 = 1 \quad (*)$

quero $c \in \mathbb{R}$ tq $(*)$

tenha uma solução positiva:

$x^4 + (1 - 2c)x^2 + c^2 - 1 = 0$

$t = x^2$

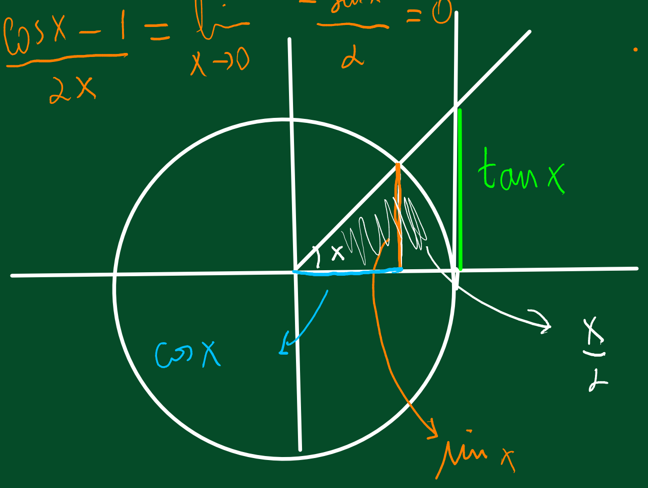
$t^2 + (1 - 2c)t + c^2 - 1 = 0$

$\Delta = (1 - 2c)^2 - 4(c^2 - 1)$

única sol: $\Delta = 0 \Rightarrow c = \ldots$

3.2.d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$



2π — π

x — A

$\downarrow$

$A = \dfrac{x}{2}$

•) é contínua e derivável em todo $x_0 \neq 0$

•) $x_0 = 0$:

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow f$ é contínua em $x_0 = 0$.

ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x - 0} = 0$ (confronto com (*))

$\therefore f'(0) = 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}, \quad x > 0$$

$$\cos x \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \boxed{\cos x \underset{\geq}{\leq} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{\geq}{\leq} \frac{1}{\cos x}, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0^+} \overbrace{\frac{-\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}}^{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} = 0.$$

$$(*): \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x}}_{\to 0} \overset{\geq}{\leq} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x} \overset{\geq}{\leq} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x}$$

$$\searrow \overbrace{\underbrace{\frac{1 - \cos x}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}}^{\to 0}$$