Exercício. Suponha que f é derivável na origem e que $f(0) = 0$. Mostre que existe $g(x)$, contínua em $x = 0$, tal que $f(x) = xg(x)$.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g(x) = f(x)/x \ , \text{ se } x \neq 0}$$

g é contínua em $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = g(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = g(0)$$

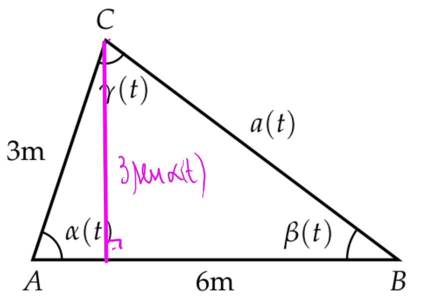
$$\Rightarrow \boxed{f'(0) = g(0)}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/x & , \text{ se } x \neq 0 \\ f'(0) & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 0$

$$f(x) = x \cdot g(x) = \begin{cases} x \cdot \frac{f(x)}{x} = f(x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \cdot f'(0) = 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Exercício. Considere o triângulo ABC, indicado na figura abaixo. No instante t_0 sabe-se



que $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{3}$ e que sua taxa de variação é de 10^{-2}rad/s. Determine, também em t_0, as taxas de variação

a. do lado $a(t)$;
b. do ângulo $\beta(t)$ (você ganha a de $\gamma(t)$ de brinde) e
c. da área do triângulo.

$$t \to a(t) \xrightarrow{(\ )^2} a^2(t)$$

Em t_0:

$$a(t_0)^2 = 9 + 36 - 36 \cdot \frac{1}{2} = 27$$

$$a(t_0) = \sqrt{27}$$

$$\alpha'(t_0) = \frac{1}{100}$$

$$\cos(\alpha(t_0)) = 1/2 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha(t_0)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $A(t) = \underline{\dfrac{6 \cdot 3 \operatorname{sen} \alpha(t)}{2}} = 9 \operatorname{sen} \alpha(t)$

$$A'(t_0) = 9 \cdot \cos \alpha(t_0) \cdot \alpha'(t_0)$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{9}{200}\, m^2/s.$$

a) $a^2(t) = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \alpha(t)$ $\quad a(t) = \sqrt{\ldots}$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot a(t_0) \cdot a'(t_0) = 36 \operatorname{sen}(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0)$$

$$2 \cdot \underbrace{\sqrt{27}}_{3\sqrt{3}} \cdot a'(t_0) = \frac{\cancel{36}^{\,9}}{\cancel{100}_{\,25}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a'(t_0) = \frac{3}{100}\, m/s$$

b) com lei dos cossenos:

$$3^2 = 6^2 + a^2(t) - 2 \cdot 6 \cdot a(t) \cos \beta(t)$$

$$0 = 0 + 2a(t_0)a'(t_0) - 12a'(t_0) \cdot \cos \beta(t_0) + 12 a(t_0) \operatorname{sen} \beta(t_0) \cdot \beta'(t_0)$$

$$0 = \frac{6\sqrt{27}}{100} - \frac{36}{100}\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot \beta'(t_0) \Rightarrow \beta'(t_0) = 0.$$

b) $\dfrac{3}{\operatorname{sen} \beta(t)} = \dfrac{a(t)}{\operatorname{sen} \alpha(t)} \rightsquigarrow$ Em t_0: $\dfrac{3}{\operatorname{sen} \beta(t_0)} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta(t_0) = 1/2 \Rightarrow \cos \beta(t_0) = \sqrt{3}/2$

$$\Downarrow$$

$$3 \operatorname{sen} \alpha(t) = a(t) \operatorname{sen} \beta(t)$$

$$\Downarrow$$

$$3 \underbrace{\cos \alpha(t_0)}_{\checkmark} \cdot \underbrace{\alpha'(t_0)}_{\checkmark} = \underbrace{a'(t_0)}_{\checkmark} \underbrace{\operatorname{sen} \beta(t_0)}_{?} + \underbrace{a(t_0)}_{\checkmark} \cdot \underbrace{\cos \beta(t_0)}_{?} \cdot \underbrace{\beta'(t_0)}_{(*)}$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \beta'(t_0) \Rightarrow \beta'(t_0) = 0 \ \text{rad/s}$$

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) = \pi$$

$$\alpha'(t_0) + \beta'(t_0) + \gamma'(t_0) = 0$$

$$\gamma'(t_0) = -(\alpha'(t_0) + \beta'(t_0)).$$

Exercício. Dizemos que uma raiz a de um polinômio $p(x)$ é *dupla* se $p(x) = (x-a)^2 q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio tal que $q(a) \neq 0$. Mostre que a é uma raiz dupla de um polinômio $p(x)$ se e só se $p(a) = 0$ e $p'(a) = 0$. Você consegue inferir um critério para raízes de qualquer multiplicidade?

•) $p(x) = (x-a)^2 q(x)$, $q(a) \neq 0$

$p(a) = (a-a)^2 \cdot q(a) = 0$

$p'(x) = 2(x-a).1.q(x) + (x-a)^2 . q'(x)$

$p'(a) = 2.(a-a).1.q(a) + (a-a)^2 . q'(a) = 0.$

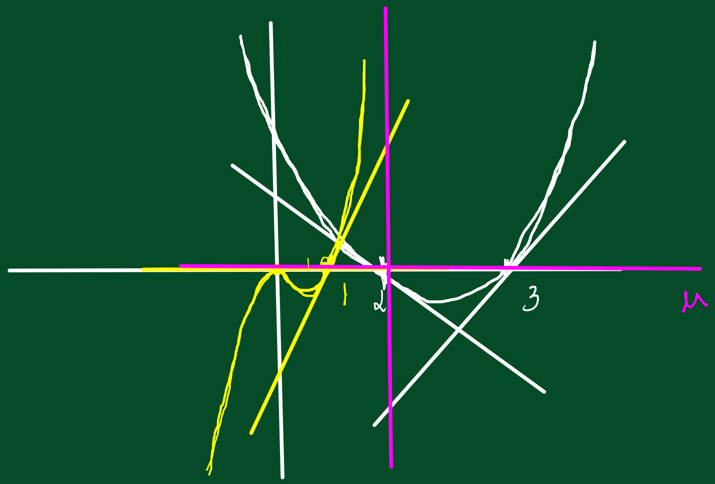
•) $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n$

hipóteses: $p(a) = 0 \Rightarrow p(a) = b_0 \Rightarrow \boxed{b_0 = 0}$

$p'(a) = 0 \Rightarrow p'(a) = b_1 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0}$

$p'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \dots + nb_n(x-a)^{n-1}$

$$p(x) = (x-a)^2 . \underbrace{\left(b_2 + b_3(x-a) + \dots + b_n(x-a)^{n-2}\right)}_{q(x)}$$



$p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$p(2) = 0 = p(3)$

$p'(x) = 2x - 5$

$p'(2) = -1$

$p'(3) = 1$

$p(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)^1$ $\quad (x-0)^2$

$p(1) = 0 = p(0)$

$p'(x) = 3x^2 - 2x = x(\underbrace{3x-2}_{>0})$ $\quad p''(x) = 6x - 2$

$p'(0) = 0$

$p'(1) = 1$

$a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 = p(x) = x^2 - 5x + 6$

$= a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2$

$$= \underbrace{a_0 - 2a_1 + 4a_2}_{6} + \underbrace{(a_1 - 4a_2)}_{-5}x + \underbrace{a_2}_{1}x^2$$

Exercício. Desafio:

a. Determine uma função f tal que $f'(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$. Você consegue achar mais uma?

b. Determine uma função f tal que $f'(x_0) = \frac{b_2}{x_0^2} + \frac{b_3}{x_0^3} + \ldots + \frac{b_n}{x_0^n}$.

c. Compare a natureza das funções encontradas com as originais. Agora responda: você consegue encontrar uma função da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^n},$$

tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$?

a) $f(x) = k + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$, $k \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = k + \frac{-b_2}{x} - \frac{b_3}{2x^2} - \frac{b_4}{3x^3} + \ldots - \frac{b_n}{(n-1).x^{n-1}}$, $k \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 - \frac{b_1}{x^2} - \frac{2b_2}{x^3} - \ldots - \frac{n b_n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$? $(\dagger\dagger)$

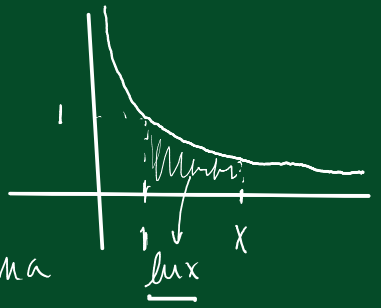
$$\Rightarrow n a_n x^n + \ldots + a_1 x - \frac{b_1}{x} - \frac{2b_2}{x^2} - \ldots - \frac{n b_n}{x^n} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^*?$$

$$\Rightarrow n a_n x^n + \ldots + a_1 x = 1 + \frac{b_1}{x} + \frac{2b_2}{x^2} + \ldots + \frac{n b_n}{x^n} \Rightarrow n a_n x^{2n} + \ldots + a_1 x^{n+1} = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + n b_n$$

$$\Rightarrow n a_n x^{2n} + \ldots + a_1 x^{n+1} - x^n - b_1 x^{n-1} - \ldots - n b_n = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^* \ (\dagger)$$

$(\dagger) \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_n = 0$

o que contradiz $(\dagger\dagger)$



logo f tal que $f'(x) = 1/x$ não é da forma apresentada no enunciado (Veremos que $f(x) = \ln x$).

Derivadas de Ordem Superior:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se f é deriv. em x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

$$x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f': A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, A é o cjto dos pontos onde f é deriv.

$$x \longmapsto f'(x)$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = \cos x$$

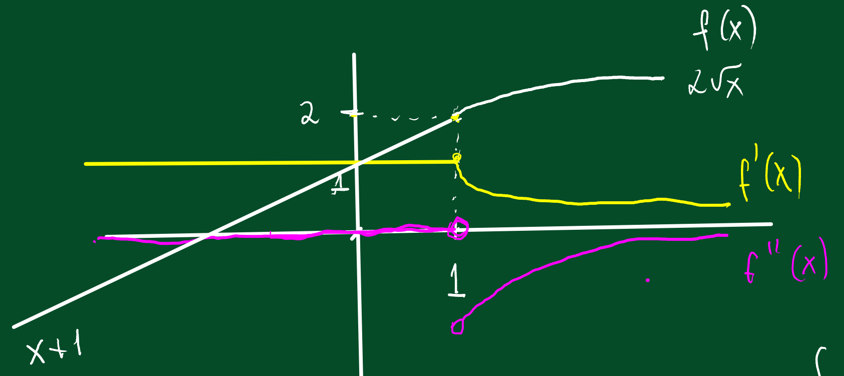
$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

$$f'': B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (f')'(x) = f''(x)$$

$$f''', \quad f'''' = f^{(4)}, \ \ldots$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 1 \\ 2\sqrt{x}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



$x < 1$: $f'(x) = 1$

$x > 1$: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$x = 1$:
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \\ &\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 1/\sqrt{x}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f''(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\left(x^{-1/2}\right)' = \frac{-1}{2} \cdot x^{-3/2}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{x - 1} = 1$$

$$\|$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} \neq$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = 0$$

$f''(1)$ ñ existe!