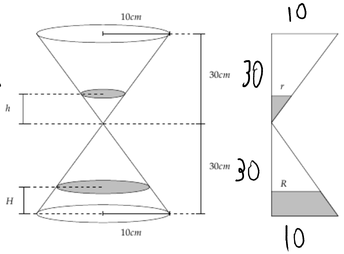
4.11. Num filtro com formato de cone, como na figura 3, um líquido escoa da parte superior para a parte inferior passando por um orifício de dimensões desprezíveis. Num certo instante, a altura H do líquido depositado na parte inferior é $8cm$, a altura h do líquido da parte superior é $10cm$ e h está diminuindo a uma taxa de variação instantânea de $2cm/min$. Calcule a taxa de variacão de H em relação ao tempo nesse instante.

$\frac{10}{R} = \frac{30}{30-H}$

$R = \frac{30-H}{3}$

V_C

V_B



$\frac{10}{r} = \frac{30}{h}$

$r = h/3$

FIGURA 3. Filtro para a questão 11

$$V_C = \frac{\pi . r^2 . h}{3} = \frac{\pi h^3}{27} \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} . 3h^2(t) . \frac{dh(t)}{dt}}$$

$$V_B = \frac{\pi . 10^2 . 30}{3} - \frac{\pi R^2 . (30-H)}{3} = 1000\pi - \frac{\pi (30-H)^3}{27} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dV_B}{dt} = -\frac{\pi}{27} 3.(30-H(t))^2 . \left(-\frac{dH}{dt}(t)\right)}$$

$$\boxed{\frac{dV_C}{dt}(t_0) = -\frac{dV_B}{dt}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$3h^2(t_0) \underbrace{\frac{dh}{dt}(t_0)}_{-2} = -3(30-H(t_0))^2 . \frac{dH}{dt}(t_0) \Rightarrow 200 = 22^2 . \frac{dH}{dt}(t_0) \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dt}(t_0) = \frac{50}{121} cm/s$$

4.10. Uma mangueira está enchendo um tanque de gasolina que tem o formato de um cilindro "deitado" de diâmetro $2m$ e comprimento $3m$. A figura 2 representa uma seçãoo transversal do tanque no instante t. O ângulo θ varia de zero (tanque vazio) a π (tanque cheio). No instante em que a altura h do líquido é de $0.5m$, a vazão é de $0.9m^3/min$. Determine a taxa de variação do ângulo θ nesse instante. Determine também a taxa de variação da altura h do neste mesmo instante.

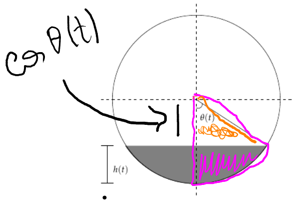


FIGURA 2. Tanque para a questão 10

$$\frac{2\pi}{\pi} = \frac{\theta}{x} \Rightarrow x = \theta/2$$

$$h(t) = 1 - \cos\theta(t) \qquad t \to \theta(t) \to \cos\theta(t)$$

$$\frac{A(t)}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}\theta . \cos\theta}{2} \Rightarrow A(t) = \theta(t) - \operatorname{sen}\theta(t) \cos\theta(t)$$

$$V(t) = A(t) . 3 = 3 . A(t) \Rightarrow \frac{dV}{dt}(t_0) = 3\frac{dA}{dt}(t_0)$$

$$\frac{dV}{dt}(t_0) = 0.9$$

$$h(t_0) = 1/2 \Rightarrow \cos\theta(t_0) = 1/2 \Rightarrow \theta(t_0) = \pi/3$$

$$\operatorname{sen}\theta(t_0) = \sqrt{3}/2$$

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = ?$$

$$\|$$

$$\operatorname{sen}\theta(t_0) . \theta'(t_0)$$

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = 0 - (-\operatorname{sen}\theta(t) . \theta'(t))$$

$$A(t) = \theta(t) - \operatorname{sen}\theta(t)\cos\theta(t) = \theta(t) - \frac{\operatorname{sen}(2\theta(t))}{2}$$

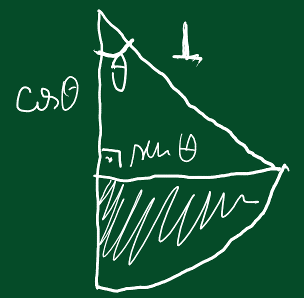
$$\frac{dV}{dt}(t_0) = 3\frac{dA}{dt}(t_0) \Rightarrow 0{,}9 = \cancel{3}\left(\theta'(t_0) - \frac{\cos(2\theta(t_0))}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\theta'(t_0)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} = \theta'(t_0) + \frac{1}{2}\theta'(t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = 1/5}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \sqrt{3}/10.$$



$\theta = 2\pi \to a = \pi$

$\theta = x \to a = ?$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{a = \frac{x}{2}}$$

$$t \to \theta(t) \to \overset{\cos}{\operatorname{sen}}\,\theta(t)$$

$$f(t) = \operatorname{sen}\theta(t)\cdot\cos\theta(t)$$

$$\frac{df}{dt} = f'(t) = \cos\theta(t)\cdot\theta'(t)\cdot\cos\theta(t) + \operatorname{sen}\theta(t)\cdot(-\operatorname{sen}\theta(t))\cdot\theta'(t)$$

$$= \theta'(t)\cdot\underbrace{(\cos^2\theta(t) - \operatorname{sen}^2\theta(t))}_{\cos(2\theta(t))}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta$$

$$\frac{df}{d\theta} = f'(\theta) = \underbrace{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

4.8. Num motor à combustão, uma biela de $7cm$ tem uma de suas extremidades acoplada a uma manivela cujo raio é de $3cm$. Na outra extremidade da biela está um pistão que se move quando a manivela gira (vide 1). Sabendo que a manivela gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 200 rotações por minuto, calcule a velocidade do pistão quando o ângulo de rotação do disco é $\pi/3$ (medido a partir da posição em que o pistão está mais afastado do disco).

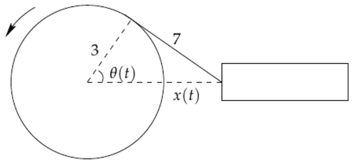


FIGURA 1. Pistão para a questão 8

$$7^2 = x^2(t) + 3^2 - 2x(t).3.\cos\theta(t)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 2x(t)x'(t) - 6.\left(x'(t)\cos\theta(t) - x(t).\text{sen}(\theta(t)).\theta'(t)\right)$$

$$0 = x'(t)\left(2x(t) - 6\cos\theta(t)\right) + 6x(t)\,\text{sen}\,\theta(t).\theta'(t)$$

$$x'(t) = \frac{6x(t)\,\text{sen}\,\theta(t).\theta'(t)}{6\cos\theta(t) - 2x(t)}$$

$$\theta(t_0) = \pi/3$$

$$\text{sen}(\theta(t_0)) = \sqrt{3}/2$$

$$\cos(\theta(t_0)) = 1/2$$

$$x(t_0) = 8$$

$$\theta'(t_0) = 400\pi$$

$$49 = x_0^2 + 9 - 3x_0$$

$$x_0^2 - 3x_0 - 40 = 0$$

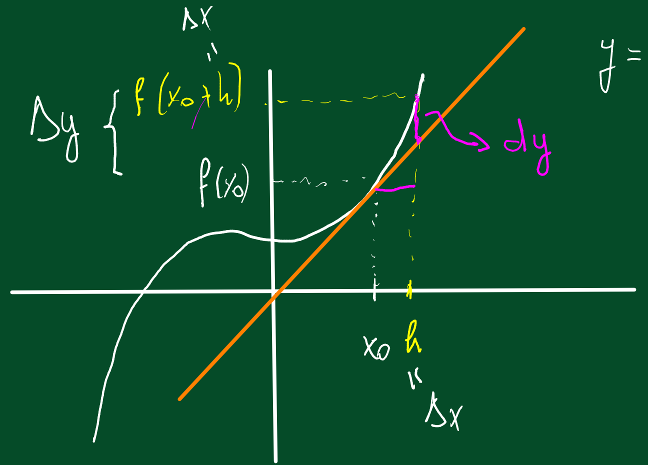
$$\boxed{x_0 = 8}$$

$$x_0 \neq -5$$

Notações p/ derivada

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (*)$$



$y = f(x)$ $\quad dy = df$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

diferencial de f em x_0.

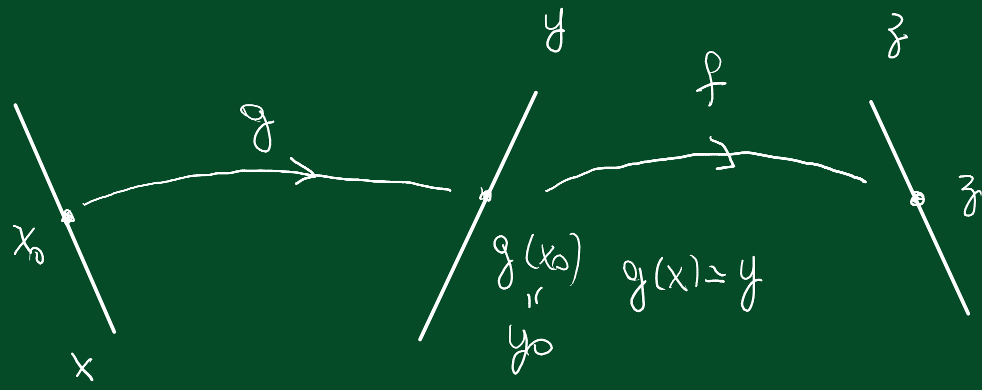
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \Rightarrow df = f'(x_0)\,dx$$

$dx \in \mathbb{R}$

$$(f\circ g)'(x_0) = \underbrace{f'(g(x_0))}_{\frac{df}{dg}(g(x_0))}\cdot g'(x_0)$$

$$\| $$

$$\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$



$z_0 = f(g(x_0)) = f(y_0)$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dy}(y_0)\cdot\frac{dy}{dx}(x_0)$$