MAT-2453 – Cálculo I
Aula 06: Extensões do conceito de Limite

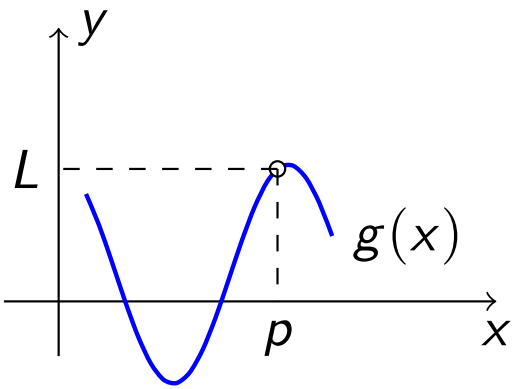
Alexandre Lymberopoulos

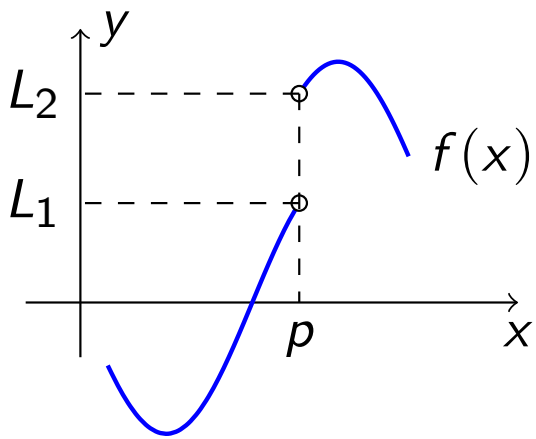
Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

Limites Laterais

- Considere os gráficos das funções abaixo:

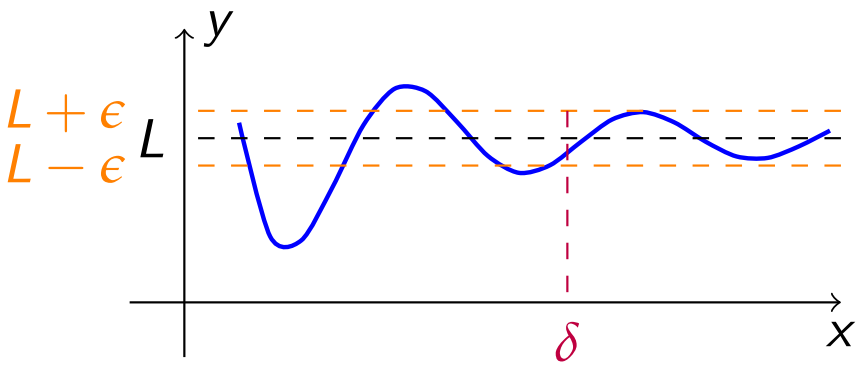




- Como já sabemos, os valores de g e f em p são irrelevantes para o cálculo de limites. Sequer precisam estar definidos.
- Na primeira função $g(x) \to L$, sempre que $x \to p$. Na segunda função vemos que f aproxima de valores distintos quando x aproxima-se de p "pela esquerda" ou "pela direita".
- Neste segundo caso escrevemos $\lim_{x \to p^-} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p^+} f(x) = L_2$, que são os *limites laterais* de f em p.
- O que acontece com $\lim_{x \to p^-} g(x)$ e $\lim_{x \to p^+} g(x)$?
- Conseguimos formular alguma relação entre limite e limites laterais?

Limites no infinito

- Para analisar situações de "longo prazo" em determinados modelos, estudamos o comportamento (tendência) do valor de uma função $f(x)$ para valores "muito grandes" de x.
- Experimente: usando valores cada vez maiores para x observe o comportamento de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4x^2 - 8x + 4}$.
- Observe o gráfico abaixo:



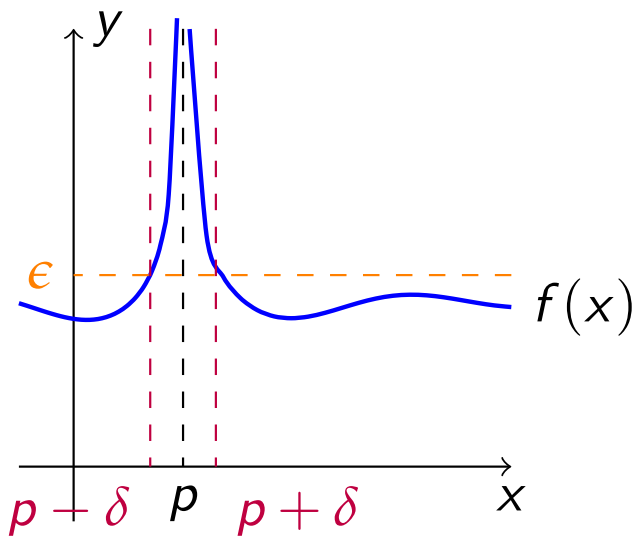
Notação:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

- Quanto maior for o valor de x mais perto de L o valor de $f(x)$ estará. Dizemos então que o limite de f no inifinito é L.
- A fomulação para $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ é análoga.
- As propriedades operatórias são as mesmas que vimos para limite num ponto.

Limites Infinitos

- Repita o experimento com valores cada vez mais próximos de 1 para a função f do slide anterior.
- Considere o gráfico abaixo:



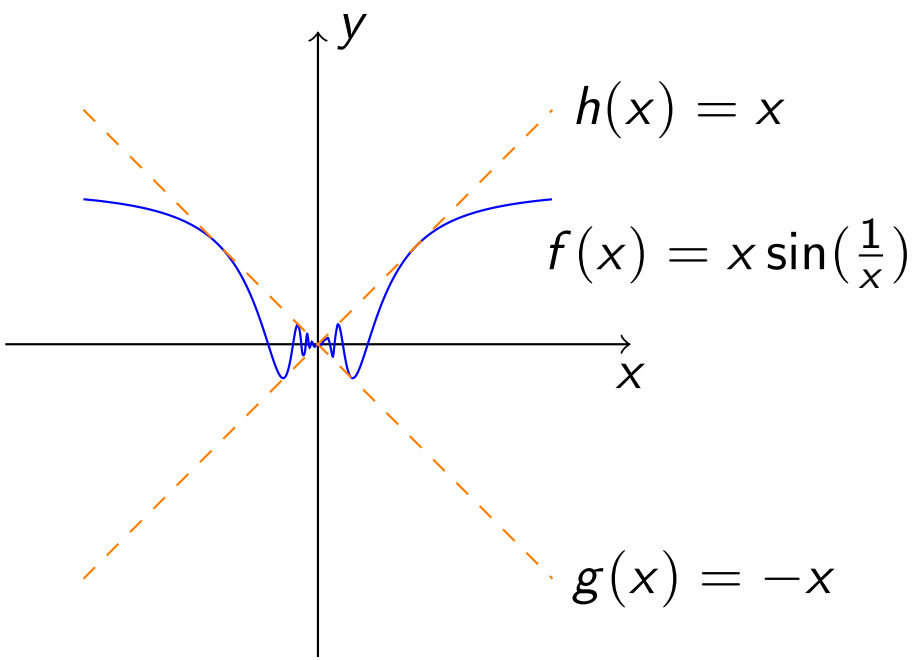
Quanto mais x se aproxima de p "maior" fica valor de $f(x)$. Nesse caso escrevemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty.$$

- De maneira análoga podemos escrever $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$ e combinar esse conceito com limites laterais, e no infinito (veremos na aula).
- Cuidado! Se $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to p} g(x) = -\infty$, quanto vale $\lim_{x \to p} f(x) + g(x)$? Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ e $g(x) = -x$, ou use uma calculadora para testar sua intuição.

Confronto: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

- Use valores bem pequenos de x para estimar $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Em vista do que sabemos sobre limites você poderia usar alguma propriedade operatória dos limites para calculá-lo analiticamente?
- Olhe para os gráficos:



Aqui temos

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x,$$

e $\lim_{x \to 0} -x = \lim_{x \to 0} x = 0.$

- Tente justificar o seguinte: se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ então $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
  O resultado vale se o valor dos limites não for 0?

Antes da Aula

Acesse e responda ao fomulário a seguir, usando seu e-mail USP:

Atividade para Aula 06

Na aula e depois da aula:

- Na aula:
  1. veremos as definições precisas dessa estenções do conceito de limite, desenvolvendo a teoria e trabalhando exemplos mais sofisticados.
  2. vamos estabelecer o enunciado preciso de teorema do confronto e aplicar em exemplos.
- Depois da aula: trabalhar os exercícios das seções 1 e 2 da Lista 1.

Até nosso próximo encontro!

lymber@ime.usp.br