

MAT-2453 – CÁLCULO I

AULA 05: LIMITES

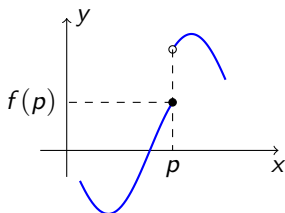
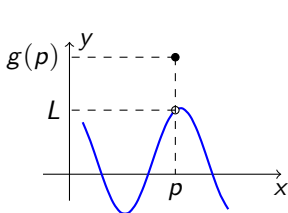
Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME-USP — Departamento de Matemática

NOÇÕES INTUITIVAS

- Considere os gráficos das funções abaixo:



- As duas funções estão definidas em p , e nenhuma das duas é contínua em p ;
- No primeiro caso, independentemente de como x se aproxima de p , notamos que $g(x)$ aproxima-se de L , que deveria ser o valor de g em p se ela fosse contínua ali.
- No segundo caso não existe um valor único do qual $f(x)$ se aproxima, quando x aproxima-se de p . Então não existe um valor que f deveria assumir em p para ser contínua nesse ponto.

UM POUCO MAIS DE INTUIÇÃO...

- As mesmas considerações valem no caso em que as funções não estivessem definidas em p .
- Desse modo, se $f(x)$ se aproxima de um valor $L \in \mathbb{R}$, quando x se aproxima de p , dizemos que f *tem limite* L em p e escrevemos $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.
- Observe que para o cálculo de limites não importa o valor de f no ponto em questão¹, mas sim os valores de f em pontos arbitrariamente próximo (mas sempre distintos) do ponto de interesse.
- Na segunda função vemos que f aproxima de valores distintos quando x aproxima-se de p “pela esquerda” ou “pela direita”.

¹à função nem precisa estar definida nesse ponto

EXPERIMENTANDO

- 1 Seja $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, definida no maior domínio possível.
- Existe $f(2)$? Faz sentido falar em continuidade de f em $x_0 = 2$?
 - Calcule² $f(1.9)$ e $f(1.99)$ e depois $f(2.1)$ e $f(2.01)$. O que você pode inferir?
 - Você consegue dar um palpite para o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
 - Encontre uma expressão equivalente para $f(x)$ e faça seu gráfico, confirmando sua intuição.
- 2 Repita os mesmos passos acima para $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$.
- 3 Qual a diferença entre as duas situações anteriores?
- 4 Se estivesse definido um valor para $f(2)$ em cada um dos casos acima, sua análise seria diferente do que você fez?

²Pode usar uma calculadora.

AO INFINITO E ALÉM (EM x , POR ENQUANTO)

- Queremos estudar o comportamento (tendência) do valor de uma função $f(x)$ para valores “muito grandes” de x .
- Isto é útil para analisar situações de “longo prazo” em determinados modelos.
- Observe o gráfico abaixo:

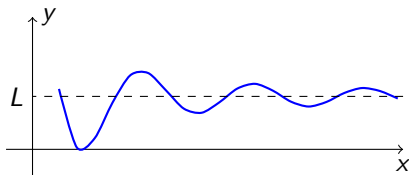


FIGURE: Situação limite “no infinito”.

- Quanto maior for o valor de x mais perto de L o valor de $f(x)$ estará. Nesse caso dizemos que o limite de f no infinito é L .
- Notação: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
- Analogamente temos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

- veremos a definição precisa de limite de uma função num ponto.
- vamos comparar os conceitos de limite e continuidade num ponto onde ambos fazem sentido.
- vamos desenvolver algumas ferramentas para o cálculo de alguns limites “simples”.
- vamos estudar os limites quando x tende a p somente pela “esquerda” ou pela “direita”.
- veremos a definição precisa de limite no infinito e suas propriedades.
- vamos estudar o que acontece quando a função assume um valor arbitrariamente grande (positivo ou negativo) quando x se aproxima de p , por exemplo.

Até nosso próximo encontro!

lymber@ime.usp.br