SOBRE A “REGRA DO TOMBO”

ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

Nesta breve discussão vamos retomar a “regra do tombo”, ou seja, como derivar a função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Feito isso vamos estender a regra, incialmente para $n \in \mathbb{Z}$ e depois para $n \in \mathbb{Q}$. A regra para expoentes dados por constantes reais também é válida, e pode ser obtida através de funções exponenciais, assunto da segunda parte do curso.

1. Derivando $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Este é um dos primeiros exemplos de derivação, já é utilizado desde o ensino médio no estudo da cinemática. Por convenção adotamos $0^0 = 1$ (teremos motivos fortes para aceitar essa convenção em breve). Se $n = 0$, então $f(x) = 1$ (constante) é derivável e $f'(x_0) = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. De fato:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0}^{1} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Quando $n \geq 1$ a função não é mais constante e mostramos que função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. Esta é a popularmente conhecida “regra do tombo”:

$$\boxed{f(x) = x^n \implies f'(x_0) = nx_0^{n-1}, \text{para todo natural } n \geq 1.} \tag{1.1}$$

Para tanto, basta calcular diretamente, utilizando a fatoração apresentada no Exercício 10, item a, da Lista 0:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\
&\overset{(*)}{=} nx_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

A última igualdade se justifica pela continuidade das funções polinomiais, o valor do limite em x_0 é o valor do polinônio em x_0. Logo $f'(x_0)$ existe e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Observação 1.1. A fórmula acima também poderia ser obtida utilizando o binômio de Newton para calcular o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}$.

Voltando ao caso $n = 0$, $f(x) = 1$, você poderia pensar em “tombar” o expoente nulo obtendo $f'(x_0) = 0.x_0^{-1} = 0$, certo? Isso funciona bem, exceto na origem! Seria preciso escrever o caso $x_0 = 0$ em separado, não vale a pena.

[1] Note que isto não é uma indeterminação!

2. Derivando $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$

Começamos com $n = -1$, calculando pela definição a derivada da função $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Para todo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Deste modo,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}, \text{ para todo } x_0 \neq 0.} \tag{2.1}$$

Se $n \leq -2$, escrevemos $f(x) = x^n$ como $f(x) = (h \circ g)(x)$, com $h(y) = \dfrac{1}{y}$ e $g(x) = x^{-n}$, para $x \neq 0$. Observe que $-n \geq 2$, permitindo o uso de (1.1). Com (2.1) e a regra da cadeia, temos:

$$f'(x_0) = h'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) = -\frac{1}{x_0^{-2n}}(-n)x_0^{-n-1} = n x_0^{n-1}.$$

Até agora temos que

$$\boxed{f(x) = x^n \implies f'(x_0) = n x_0^{n-1}, \text{para todo } n \in \mathbb{Z},}$$

tomando o devido cuidado: *se $n < 0$, então $x_0 = 0$ não está no domínio de f e portanto não faz sentido falar em $f'(0)$ nesse caso.*

Observação 2.1. Na argumentação acima você também poderia ter escrito, com as mesmas notações, $f(x) = (g \circ h)(x)$, obtendo o resultado. Cuidado: em geral $(g \circ h)(x) \neq (h \circ g)(x)$! (nem é garantido que ambas estejam definidas simultaneamente)

3. Derivando $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Em primeiro lugar é necessário atenção aos domínios das funções:

- n ímpar: o domínio de f é $\mathbb{R}$;
- n par: o domínio de f é $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$;

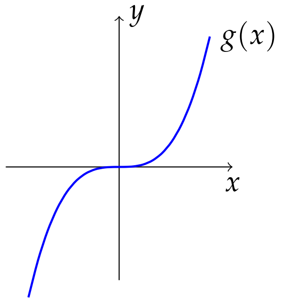
Os casos $n = 0$ e $n = 1$ foram tratados nas seções anteriores, e o primeiro deles não pode ser contemplado na argumentação desta seção. É um bom exercício identificar os momentos em que esse caso precisa ser excluído no que se segue.

No texto *Continuidade e diferenciabilidade da função inversa* (baixe aqui[2]), do prof. Vinicius Morelli Cortes, discute-se condições para que a inversa de uma função derivável seja também derivável. Mais precisamente, ele apresenta o

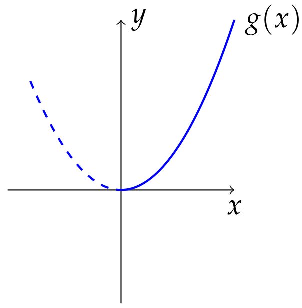
Corolário 3.1. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Se $g\colon I \to \operatorname{Im}(g)$ é uma função derivável e injetora e $p \in I$ é tal que $g'(p) \neq 0$, então g^{-1} é derivável em $q = g(p)$ e $(g^{-1})'(q) = \dfrac{1}{g'(p)}$.*

A função $g(x) = x^n$ atende às hipóteses do corolário acima, com o devido cuidado de restringir seu domínio quando necessário (para n par restringimo-nos a $\mathbb{R}_{\geq 0}$):

[2] É preciso estar logado no e-disciplinas



(A) Gráfico de $g(x) = x^3$



(B) Gráfico de $g(x) = x^2$

Com essa notação, temos $f(x) = g^{-1}(x)$. Para todo $x_0 \neq 0$ no domínio de f (e portanto em $\operatorname{Im}(g)$, isto é, $x_0 = g(y_0) = y_0^n$ ou ainda $y_0 = x_0^{\frac{1}{n}}$) o corolário 3.1 nos diz que

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{ny_0^{n-1}} = \frac{1}{n}y_0^{1-n} = \frac{1}{n}(x_0)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}(x_0)^{\frac{1}{n}-1},$$

ou seja, vale a "regra do tombo" também nesse caso:

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \implies f'(x_0) = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 1,}$$

com $x_0 \neq 0$ no domínio de f. A argumentação acima não vale para $x_0 = 0$, mas mesmo assim poderia existir $f'(0)$. É preciso verficar pela definição:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}},$$

o qual não existe, para cada natural $n > 1$. Note que, se n é par, só faz sentido o limite lateral pela direta[3], que resulta em $+\infty$; se n é ímpar, os dois laterais fazem sentido, sendo $+\infty$ e $-\infty$ pela esquerda e direita, respectivamente.

Observação 3.1. Uma alternativa[4] a esta abordagem seria usar novamente o Exercício 10 da Lista 0, mas achamos importante ver como podemos usar os resultados teóricos para obter novas fórmulas. Uma terceira alternativa seria imitar a Observação 1.1, calculando o limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Assim você se depara com a expressão $(x_0 + h)^{\frac{1}{n}}$, que se parece com o binômio de Newton, mas o expoente não é natural! Isto motivou o estudo, pelo próprio Newton, do que viria a ser chamada de série binomial:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots, \tag{3.1}$$

onde α é um número real!!! O que seria $\binom{\alpha}{k}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$? Você já viu $\binom{n}{k}$, com naturais $n > k$. Faz sentido falar em fatorial de um número real? Sim, olhe para os coeficientes das potências de x em (3.1), mas isso é assunto para um outro curso.

[3]Alguns textos falam em *derivada lateral*. Pesquise!

[4]Recomendamos fortemente que você tente!

4. Derivando $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$

Escreva $r = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$. Suponha $r \neq 0, \pm 1$ (já tratados anteriormente). Assim, $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$, e ficamos atentos ao domínio desta função: como antes, se n é par o domínio é $\mathbb{R}_{\geq 0}$; se n é ímpar o domínio é $\mathbb{R}$ e, se $m < 0$, a origem não está no domínio. Com tudo que temos até agora, basta escrever $f(x) = (h \circ g)(x)$, onde $g(x) = x^m$ e $h(y) = y^{\frac{1}{n}}$, e, quando $x_0 \neq 0$, aplicar a regra da cadeia:

$$f'(x_0) = h'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) = \frac{1}{n} g(x_0)^{\frac{1}{n}-1} m x_0^{m-1} = \frac{m}{n}(x_0^{\frac{1}{n}-1})^m x_0^{m-1} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m}{n}-1}.$$

Assim,

$$\boxed{f(x) = x^r \implies f'(x_0) = r x_0^{r-1}, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}, \text{ se } x_0 \neq 0,}$$

com $x_0 \neq 0$, no domínio de f. Em $x_0 = 0$, para n ímpar, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^r}{x} = \lim_{x \to 0} x^{r-1},$$

que vale 0 se $r > 1$ (ou seja, $m > n$), donde $f'(0) = 0$. Se $r < 1$, $r \neq 0$ ($m < n$) o limite não existe e portanto f não é derivável em $x_0 = 0$. Se n é par, só o limite pela direita faz sentido, de maneira análoga ao que indicamos na Seção 3. Reforçando: o caso $r = 1$ não cabe nesta argumentação, mas foi tratado anteriormente.

5. Palavras finais

Resta apenas ver o que acontece com um expoente real fixo. Afirmamos que a "regra do tombo" ainda é válida:

$$\boxed{f(x) = x^\alpha \implies f'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } x_0 > 0.}$$

Se $x_0 = 0$, as mesmas restrições para expoentes racionais se aplicam. Para uma demonstração clara da validade dessa afirmação é necessário definir o significado de x^α. Isso pode ser feito como o limite das potências de x por expoentes numa sequência de racionais que converge para α ou como o supremo das potências x^r, $r \in \mathbb{Q}$, tais que $x^r \leq x^\alpha$. Qualquer uma dessas duas definições é muito complicada para se trabalhar na definição de derivada.

Uma alternativa, envolvendo exponenciais e logaritmos, é usar a mudança de base exponencial, $a^b = c^{b \log_c a}$, para escrever $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Mas isso depende da construção do número de Euler e da diferenciabilidade das funções exponenciais e logaritmicas, o que será feito ainda neste curso. Aguardem!