A FUNÇÃO DE THOMAE

Exercício 2.2.d da Lista 1: Determine os pontos de continuidade da função $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0,1) \text{ é irracional,} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \in (0,1) \text{ na forma irredutível.} \end{cases}$$

Esta função é chamada de função de Thomae.

Solução: Dado $x_0 \in (0,1)$ arbitrário, vamos mostrar que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0. \tag{1}$$

Isto implicará imediatamente, pela expressão de f e pela definição de continuidade, que f é contínua em todos os irracionais de $(0,1)$, e não é contínua em nenhum racional de $(0,1)$.

Mostremos, então, (1) usando a definição de limite. Fixe $\varepsilon > 0$. Nosso objetivo é encontrar um número real $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $x \in (0,1)$ satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$|f(x) - 0| < \varepsilon,$$

ou simplesmente (lembrando que $f(x) \geq 0$)

$$f(x) < \varepsilon. \tag{2}$$

Observe que $f(x) = 0$ para todo $x \in (0,1)$ irracional; logo, para tais pontos, a desigualdade (2) é trivialmente satisfeita. Devemos analisar, portanto, o que ocorre nos racionais de $(0,1)$. Se $x = \frac{p}{q} \in (0,1)$, na forma irredutível, então $f(x) = \frac{1}{q}$ e a desigualdade (2) se escreve como

$$\frac{1}{q} < \varepsilon. \tag{3}$$

Para quais racionais $\frac{p}{q}$ a desigualdade (3) *não* é satisfeita? Estes pontos devem satisfazer

$$\frac{1}{q} \geq \varepsilon,$$

ou seja,

$$q \leq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Vamos mostrar, a seguir, que apenas um número finito de racionais do intervalo $(0,1)$ pode satisfazer (4).

Seja N um número natural tal que $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Seja A o conjunto dos racionais em $(0,1)$ que satisfazem (4), isto é,

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in (0,1) : \frac{p}{q} \text{ é irredutível e } q \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Observe que se $\frac{p}{q} \in A$, então $q \leq \frac{1}{\varepsilon} \leq N$, isto é, q é um número inteiro entre 1 e N. Em outras palavras,

$$q \in \{1, 2, \ldots, N-1, N\}.$$

Observe também que

$$\frac{p}{q} \in (0,1) \implies 0 < \frac{p}{q} < 1 \implies 0 < p < q \leq N.$$

Logo, p também é um número inteiro entre 1 e N.[1] Assim,

$$p \in \{1, 2, \ldots, N-1, N\}.$$

Quantas frações diferentes podemos obter com N opções para o numerador e para o denominador? Certamente, menos do que N^2 frações. Provamos, portanto, que o conjunto A é finito (A tem, no máximo, N^2 elementos).

[1] Na realidade, p é estritamente menor do que q e, em particular, é menor ou igual a $N-1$; mas nossa estimativa grosseira é suficiente.

Nosso próximo passo é construir o número real δ procurado. Observe que, a princípio, x_0 pode pertencer a A. No entanto, como queremos calcular o limite de f quando x tende a x_0, o comportamento de f em x_0 é irrelevante. Deste modo, vamos considerar o conjunto

$$B = A \setminus \{x_0\} = \{x \in A : x \neq x_0\}.$$

Como A é finito, B também é. Agora, temos dois casos a considerar:

1º caso: B é vazio.

Neste caso, a desigualdade (4) só é satisfeita, possivelmente, em x_0. Isto significa que (3) é verdadeira para todo racional $x \in (0,1), x \neq x_0$, e qualquer $\delta > 0$ faz o serviço.

2º caso: B não é vazio.

Podemos listar os elementos de B e escrever

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

onde $m \leq N^2$ é o número de elementos de B e cada elemento é listado uma única vez (isto é, $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$). Para cada $1 \leq i \leq m$, seja

$$\delta_i = |b_i - x_0|.$$

É importante observar que $\delta_i > 0$, uma vez que $x_0 \notin B$ e, assim, $x_0 \neq b_i$. Construímos um número finito de números reais estritamente positivos: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$. Certamente existe o menor deles: vamos chamá-lo de δ. Mais precisamente,

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m) > 0.$$

Vamos encerrar a demonstração provando que este δ satisfaz as propriedades desejadas. Recordamos que devemos provar que se $x \in (0,1)$ é tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

então

$$f(x) < \varepsilon.$$

Seja, então, $x \in (0,1)$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$. Se x é irracional, então $f(x) = 0$ e a desigualdade acima é satisfeita. Por outro lado, suponha que $x = \frac{p}{q}$ na forma irredutível. Como $0 < |x - x_0|$, sabemos que $x \neq x_0$. E, como $|x - x_0| < \delta$, também sabemos que x não pode ser $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Assim, $x \notin A$, ou seja, $q > \frac{1}{\varepsilon}$. Esta desigualdade equivale a

$$f(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon,$$

como queríamos.

Conclusão: f é contínua em $x_0 \in (0,1)$ se, e somente se, x_0 é irracional.

De fato, se x_0 é irracional, então temos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0),$$

ou seja, f é contínua em x_0. Por outro lado, se $x_0 = \frac{p}{q}$ na forma irredutível, então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 < \frac{1}{q} = f(x_0)$$

e, portanto, f não é contínua em x_0.