Uma discussão sobre a existência de raízes n-ésimas.

Ivo Terek Couto*

11 de julho de 2015

Neste texto daremos uma demonstração elementar da existência de $\sqrt[n]{a}$, com $n \geq 1$ e $a > 0$, e também de $\sqrt[n]{a}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$ ímpar.

Começaremos provando a existência de $\sqrt{2}$, $\sqrt{a}$ e $\sqrt[3]{a}$, com $a > 0$, para reconhecer padrões, e então faremos as generalizações. Serão usados apenas o Lema de Arquimedes (propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$), o Princípio do Supremo (completude de $\mathbb{R}$) e o binômio de Newton.

Ao longo da redação faremos várias observações motivando o uso do Lema de Arquimedes: algo como "escolha $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{a-b^3}{3b^2+3b+1}$" não é imediato à primeira vista.

Todas as demonstrações tem aproximadamente a mesma "estrutura", e tentamos deixar isto evidente.

Por fim, agradeço à professora Zara Abud por revisar as anotações iniciais que deram origem ao presente texto.

*terek@ime.usp.br

Proposição 1 (Existência de $\sqrt{2}$). *Existe* $b \in \mathbb{R}_{>0}$, *tal que* $b^2 = 2$.

Demonstração: Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. Observe que $\mathcal{A} \neq \varnothing$, pois $0 \in \mathcal{A}$, e que $\mathcal{A}$ é limitado superiormente, por exemplo, por 2. Pelo Princípio do Supremo, existe $b = \sup \mathcal{A} > 0$. Afirmo que deve ser $b^2 = 2$. Pela tricotomia da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$, é suficiente verificarmos que não pode ser $b^2 > 2$ e nem $b^2 < 2$.

- Suponha que $b^2 > 2$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{n} < \frac{b^2 - 2}{2b}, \quad \text{e} \quad b - \frac{1}{n} > 0.$$

Daí:

$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 &= b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} = b^2 + 2b\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &> b^2 + 2b\left(\frac{2 - b^2}{2b}\right) = b^2 + 2 - b^2 = 2,\end{aligned}$$

o que contradiz que $b = \sup \mathcal{A}$, pois teremos que $b - \frac{1}{n}$ é cota superior de $\mathcal{A}$ (com efeito, se $x \in \mathcal{A}$, então $x^2 < 2 < \left(b - \frac{1}{n}\right)^2$ e com isso $x < b - \frac{1}{n}$, usando que $b - \frac{1}{n} > 0$), mas $b - \frac{1}{n} < b$.

Observação 1. *A motivação para a escolha de* n *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 1: Situação no caso $b^2 > 2$.

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} > 2 \iff \frac{2b}{n} < b^2 - 2 \iff \frac{1}{n} < \frac{b^2 - 2}{2b},$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são o que queremos.

- Suponha que $b^2 < 2$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - b^2}{2b + 1}.$$

Então, temos:

$$\begin{aligned}\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 &= b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n} = b^2 + \frac{1}{n}(2b + 1) \\ &< b^2 + \left(\frac{2 - b^2}{2b + 1}\right)(2b + 1) = b^2 + 2 - b^2 = 2,\end{aligned}$$

contradizendo que b é cota superior de $\mathcal{A}$, pois temos que $b + \frac{1}{n} \in \mathcal{A}$ e $b + \frac{1}{n} > b$.

Observação 2. *A motivação para a escolha de* n *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 2: Situação no caso $b^2 < 2$.

$$\left(b+\frac{1}{n}\right)^2 = b^2+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n^2} < b^2+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n} = b^2+\frac{1}{n}(2b+1) \color{red}{<} 2 \iff \frac{1}{n} \color{red}{<} \frac{2-b^2}{2b+1},$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são o que queremos.

Concluímos que $b^2 = 2$. $\square$

Proposição 2 (Existência de $\sqrt{a}$, $a > 0$). *Seja* $a > 0$. *Existe* $b \in \mathbb{R}_{>0}$, *tal que* $b^2 = a$.

Demonstração: Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$. Observe que $\mathcal{A} \neq \varnothing$, pois $0 \in \mathcal{A}$, e que $\mathcal{A}$ é limitado superiormente, por exemplo, por $a+1$. Pelo Princípio do Supremo, existe $b = \sup \mathcal{A} > 0$. Afirmo que deve ser $b^2 = a$. Pela tricotomia da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$, é suficiente verificarmos que não pode ser $b^2 > a$ e nem $b^2 < a$.

- Suponha que $b^2 > a$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{n} < \frac{b^2 - a}{2b}, \quad \text{e} \quad b - \frac{1}{n} > 0.$$

Daí:

$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 &= b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} = b^2 + 2b\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &> b^2 + 2b\left(\frac{a - b^2}{2b}\right) = b^2 + a - b^2 = a,\end{aligned}$$

o que contradiz que $b = \sup \mathcal{A}$, pois teremos que $b - \frac{1}{n}$ é cota superior de $\mathcal{A}$ (com efeito, se $x \in \mathcal{A}$, então $x^2 < a < \left(b - \frac{1}{n}\right)^2$ e com isso $x < b - \frac{1}{n}$, usando que $b - \frac{1}{n} > 0$), mas $b - \frac{1}{n} < b$.

Observação 3. *A motivação para a escolha de* n *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 3: Situação no caso $b^2 > a$.

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{2b}{n} > a \iff \frac{2b}{n} < b^2 - a \iff \frac{1}{n} < \frac{b^2 - a}{2b},$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são o que queremos.

- Suponha que $b^2 < a$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{n} < \frac{a - b^2}{2b+1}.$$

Então, temos:

$$\begin{aligned}\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 &= b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n} = b^2 + \frac{1}{n}(2b+1) \\ &< b^2 + \left(\frac{a - b^2}{2b+1}\right)(2b+1) = b^2 + a - b^2 = a,\end{aligned}$$

contradizendo que b é cota superior de $\mathcal{A}$, pois temos que $b + \frac{1}{n} \in \mathcal{A}$ e $b + \frac{1}{n} > b$.

Observação 4. *A motivação para a escolha de n é dada pelo seguinte cálculo:*

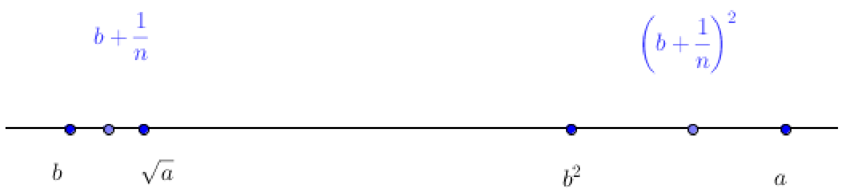

Figura 4: Situação no caso $b^2 < a$.

$$\left(b+\frac{1}{n}\right)^2 = b^2+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n^2} < b^2+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n} = b^2+\frac{1}{n}(2b+1) \color{red}{<} a \iff \frac{1}{n} \color{red}{<} \frac{a-b^2}{2b+1},$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são o que queremos.

Concluímos que $b^2 = a$.

Observação 5. *Note que o argumento é exatamente o mesmo feito na demonstração da Proposição 1 - não há nada de especial no número 2 aqui. O único fato relevante utilizado é que $2 > 0$.*

□

Proposição 3. *Seja* $a > 0$. *Existe* $b \in \mathbb{R}_{>0}$, *tal que* $b^3 = a$.

Demonstração: Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < a\}$. Observe que $\mathcal{A} \neq \varnothing$, pois $0 \in \mathcal{A}$, e que $\mathcal{A}$ é limitado superiormente, por exemplo, por $a+1$. Pelo Princípio do Supremo, existe $b = \sup \mathcal{A} > 0$. Afirmo que deve ser $b^3 = a$. Pela tricotomia da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$, é suficiente verificarmos que não pode ser $b^3 > a$ e nem $b^3 < a$.

- Suponha que $b^3 > a$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{n} < \frac{b^3 - a}{3b^2 + 1}, \quad \text{e} \quad b - \frac{1}{n} > 0.$$

Daí:

$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 &= b^3 - \frac{3b^2}{n} + \frac{3b}{n^2} - \frac{1}{n^3} \geq b^3 - \frac{3b^2}{n} - \frac{1}{n} \\ &= b^3 + (3b^2+1)\left(-\frac{1}{n}\right) > b^3 + (3b^2+1)\left(\frac{a - b^3}{3b^2+1}\right) = b^3 + a - b^3 = a,\end{aligned}$$

o que contradiz que $b = \sup \mathcal{A}$, pois teremos que $b - \frac{1}{n}$ é cota superior de $\mathcal{A}$ (com efeito, se $x \in \mathcal{A}$, então $x^3 < a < \left(b - \frac{1}{n}\right)^3$ e com isso $x < b - \frac{1}{n}$, usando que $b - \frac{1}{n} > 0$), mas $b - \frac{1}{n} < b$.

Observação 6. *A motivação para a escolha de* n *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 5: Situação no caso $b^3 > a$.

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 = b^3 - \frac{3b^2}{n} + \frac{3b}{n^2} - \frac{1}{n^3} > b^3 - \frac{3b^2}{n} - \frac{1}{n} = b^3 - \frac{1}{n}(3b^2+1) \color{red}{>} a \iff \frac{1}{n} \color{red}{<} \frac{b^3 - a}{3b^2+1},$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são o que queremos.

- Suponha que $b^3 < a$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{n} < \frac{a - b^3}{3b^2 + 3b + 1}.$$

Então, temos:

$$\begin{aligned}\left(b + \frac{1}{n}\right)^3 &= b^3 + \frac{3b^2}{n} + \frac{3b}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq b^3 + \frac{3b^2}{n} + \frac{3b}{n} + \frac{1}{n} = b^3 + \frac{1}{n}(3b^2 + 3b + 1) \\ &< b^3 + \left(\frac{a - b^3}{3b^2 + 3b + 1}\right)(3b^2 + 3b + 1) = b^3 + a - b^3 = a,\end{aligned}$$

contradizendo que b é cota superior de $\mathcal{A}$, pois temos que $b + \frac{1}{n} \in \mathcal{A}$ e $b + \frac{1}{n} > b$.

Observação 7. *A motivação para a escolha de* n *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 6: Situação no caso $b^3 < a$.

$$\begin{aligned}\left(b+\frac{1}{n}\right)^3 &= b^3+\frac{3b^2}{n}+\frac{3b}{n^2}+\frac{1}{n^3} \leq b^3+\frac{3b^2}{n}+\frac{3b}{n}+\frac{1}{n} \\ &= b^3+\frac{1}{n}(3b^2+3b+1) < a \iff \frac{1}{n} < \frac{a-b^3}{3b^2+3b+1},\end{aligned}$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são o que queremos.

Concluímos que $b^3 = a$. $\square$

Algumas desigualdades:

- Para $n = 2$:
$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > b^2 - \frac{1}{n}(2b).$$

- Para $n = 3$:
$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 &= b^3 - \frac{3b^2}{n} + \frac{3b}{n^2} - \frac{1}{n^3} > b^3 - \frac{3b^2}{n} - \frac{1}{n^3} \\ &\geq b^3 - \frac{3b^2}{n} - \frac{1}{n} = b^3 - \frac{1}{n}(3b^2 + 1)\end{aligned}$$

- Para $n = 4$:
$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^4 &= b^4 - \frac{4b^3}{n} + \frac{6b^2}{n^2} - \frac{4b}{n^3} + \frac{1}{n^4} > b^4 - \frac{4b^3}{n} - \frac{4b}{n^3} \\ &\geq b^4 - \frac{4b^3}{n} - \frac{4b}{n} = b^4 - \frac{1}{n}(4b^3 + 4b)\end{aligned}$$

- Para $n = 5$:
$$\begin{aligned}\left(b - \frac{1}{n}\right)^5 &= b^5 - \frac{5b^4}{n} + \frac{10b^3}{n^2} - \frac{10b^2}{n^3} + \frac{5b}{n^4} - \frac{1}{n^5} > b^5 - \frac{5b^4}{n} - \frac{10b^2}{n^3} - \frac{1}{n^5} \\ &\geq b^5 - \frac{5b^4}{n} - \frac{10b^2}{n} - \frac{1}{n} = b^5 - \frac{1}{n}(5b^4 + 10b^2 + 1)\end{aligned}$$

A ideia para verificarmos as desigualdades acima se resumiu a eliminar os termos positivos, e usar que:

$$n > 1 \implies n^m > n \implies \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n} \implies -\frac{1}{n^m} > -\frac{1}{n}, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Por fim, agrupando termos pares e ímpares temos:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} = b^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} = b^n + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} b^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i-1} b^{n-(2i-1)},$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ é a *função piso*.

Proposição 4 (Existência de $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$)**.** *Sejam* $a > 0$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$*. Existe* $b \in \mathbb{R}_{>0}$ *tal que* $b^n = a$.

Demonstração: Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^n < a\}$. Observe que $\mathcal{A} \neq \varnothing$, pois $0 \in \mathcal{A}$, e que $\mathcal{A}$ é limitado superiormente, por exemplo, por $a+1$. Pelo Princípio do Supremo, existe $b = \sup \mathcal{A} > 0$. Afirmo que $b^n = a$. Pela tricotomia da relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{R}$, é suficiente verificarmos que não pode ser $b^n > a$ e nem $b^n < a$.

- Suponha que $b^n > a$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{k} < \frac{b^n - a}{C}, \quad \text{e} \quad b - \frac{1}{k} > 0,$$

onde $C = \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i-1} b^{n-(2i-1)}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\left(b - \frac{1}{k}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} \frac{(-1)^i}{k^i} \\
&= b^n + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} b^{n-2i} \frac{1}{k^{2i}} - \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i-1} b^{n-(2i-1)} \frac{1}{k^{2i-1}} \\
&> b^n - \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i-1} b^{n-(2i-1)} \frac{1}{k^{2i-1}} \\
&\geq b^n - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{2i-1} b^{n-(2i-1)} \\
&= b^n - \frac{1}{k} C > b^n - \left(\frac{a - b^n}{C}\right) C \\
&= b^n - b^n + a = a,
\end{aligned}$$

o que contradiz que $b = \sup \mathcal{A}$, pois $b - \frac{1}{k}$ é cota superior de $\mathcal{A}$ (com efeito, se $x \in \mathcal{A}$, então $x^n < a < \left(b - \frac{1}{k}\right)^n$, e daí $x < b - \frac{1}{k}$, usando que $b - \frac{1}{k} > 0$), mas $b - \frac{1}{k} > b$.

Observação 8. *A motivação para a escolha de* k *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 7: Situação no caso $b^n > a$.

$$\begin{aligned}
\left(b-\frac{1}{k}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}\frac{(-1)^i}{k^i}\\
&= b^n + \sum_{i=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}b^{n-2i}\frac{1}{k^{2i}} - \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}\binom{n}{2i-1}b^{n-(2i-1)}\frac{1}{k^{2i-1}}\\
&> b^n - \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}\binom{n}{2i-1}b^{n-(2i-1)}\frac{1}{k^{2i-1}} \geq b^n - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}\binom{n}{2i-1}b^{n-(2i-1)}\\
&\color{red}{>} a \iff \frac{1}{k} \color{red}{<} \frac{b^n-a}{\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}\binom{n}{2i-1}b^{n-(2i-1)}},
\end{aligned}$$

onde as desigualdades indicadas em vermelho são as que queremos.

- Suponha que $b^n < a$. Pelo Lema de Arquimedes, existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que:

$$\frac{1}{k} < \frac{a-b^n}{C},$$

onde $C = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}$. Com isto, temos:

$$\begin{aligned}
\left(b+\frac{1}{k}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}\frac{1}{k^i} = b^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}\frac{1}{k^i}\\
&\leq b^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}\frac{1}{k} = b^n + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}\\
&= b^n + \frac{1}{k}C < b^n + \left(\frac{a-b^n}{C}\right)C\\
&= b^n + a - b^n = a,
\end{aligned}$$

e portanto $b+\frac{1}{k} \in \mathcal{A}$, contradizendo que b é cota superior de $\mathcal{A}$, pois $b+\frac{1}{k} > b$.

Observação 9. *A motivação para a escolha de* k *é dada pelo seguinte cálculo:*

Figura 8: Situação no caso $b^n < a$.

$$\left(b+\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{b^{n-i}}{k^i} \leq b^n + \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i} \color{red}{<} a \iff \frac{1}{k} \color{red}{<} \frac{a-b^n}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}}$$

Concluímos que $b^n = a$.

$\square$

Proposição 5 (Existência de $\sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ímpar). *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, *ímpar. Existe* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $b^n = a$.

Demonstração: Se $a = 0$, o resultado é trivial e basta tomar $b = 0$. Se $a > 0$, o resultado já foi provado. Se $a < 0$, então $-a > 0$, e pela Proposição 4 existe $b^* \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $(b^*)^n = -a$. Como n é ímpar, temos que $(-1)^n = -1$. Assim:

$$(b^*)^n = -a \implies a = -(b^*)^n = (-1)^n (b^*)^n = (-b^*)^n,$$

de modo que $b := -b^*$ verifica $b^n = a$. $\square$