

Fluxos Inteiros em Grafos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Leila Maciel de Almeida e Silva e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 07 de outubro de 1991.

Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi.

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Fluxos Inteiros em Grafos¹

Leila Maciel de Almeida e Silva²

Departamento de Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP

Banca Examinadora:

- Cláudio Leonardo Lucchesi (Orientador)³
- Arlene Fortunato Machado (Suplente)³
- Arnaldo Mandel⁴
- Jayme Luiz Szwarcfiter⁵

¹Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

²A autora é formada em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Sergipe.

³Professor(a) do Departamento de Ciência da Computação - IMECC-UNICAMP.

⁴Professor do Departamento de Ciência da Computação do IME-USP.

⁵Professor do Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) da UFRJ.

A meu esposo Osmar

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi, pela excelente orientação sem a qual não seria possível a realização deste trabalho;

A meus pais, Léa e José Augusto, pelo apoio e estímulo recebidos;

À CAPES, UNICAMP e FAPESP pelo apoio financeiro concedido;

A todos que contribuíram direta ou indiretamente na realização deste trabalho; em particular, à Profa Yoshiko Wakabayashi, do IME-USP, pela introdução no mundo dos Grafos e à colega Fabíola Gonçalves Pereira de Souza, pelo auxílio, críticas e incentivos recebidos durante o Mestrado.

*“É da natureza da mente humana
deleitar-se na espaçosa liberdade das generalidades,
e não nas limitações das particularidades.”*

Francis Bacon

*“Todos os homens, por natureza,
desejam saber.”*

Aristóteles

Abstract

A study of integer flows in graphs is developed, specifically on Tutte's Conjectures on the existence of k -flows ($k = 3, 4, 5$) that generalize theorems about planar graph colourings.

This work consists of five chapters. The first chapter presents Tutte's Conjectures and a brief historical review of graph colouring. Chapter 2 presents relations among planar graph colouring, integer flows and modular flows. Chapter 3 presents reducible configurations, that is, subgraphs that do not occur in minimal counter-examples for Tutte's Conjectures. Chapter 4 presents well known results on the 5-flow Conjecture: Jaeger's 8-flow theorem, Seymour's 6-flow theorem and the 5-flow theorem for graphs embedded on surfaces of low genus (Younger; Möller-Carstens-Brinkmann). Chapter 5 presents well known results on the 3-flow Conjecture: Jaeger's 4-flow theorem and the 3-flow theorem for planar graphs (Grötzsch; Grünbaum-Aksionov; Steinberg-Younger).

Resumo

Neste trabalho é desenvolvido o estudo de fluxos inteiros em grafos, especificamente as Conjeturas de Tutte sobre a existência de k -fluxos ($k = 3, 4, 5$) que generalizam teoremas sobre coloração de grafos planares.

A dissertação consiste de cinco capítulos. O capítulo 1 apresenta as Conjeturas de Tutte, além de um breve histórico sobre coloração de grafos. O capítulo 2 apresenta relações entre colorações de grafos planares, fluxos inteiros e fluxos modulares. O capítulo 3 apresenta configurações redutíveis, ou seja, subgrafos que não ocorrem em contra-exemplos mínimos para as Conjeturas de Tutte. O capítulo 4 apresenta os seguintes resultados conhecidos sobre a Conjetura dos 5-fluxos: teorema dos 8-fluxos (Jaeger), teorema dos 6-fluxos (Seymour) e teorema dos 5-fluxos para grafos em superfícies de gênero baixo (Younger; Möller-Carstens-Brinkmann). O capítulo 5 apresenta os seguintes resultados conhecidos sobre a Conjetura dos 3-fluxos: teorema dos 4-fluxos (Jaeger) e teorema dos 3-fluxos para grafos planares (Grötzsch; Grünbaum-Aksionov; Steinberg-Younger).

Conteúdo

1	As Conjeturas de Tutte	1
1.1	Coloração de Grafos Planares - Breve histórico	1
1.2	Generalizações para grafos não planares	7
1.3	Conjeturas de Tutte	9
1.4	Conteúdo dos capítulos posteriores e nossas contribuições	10
2	Fluxos Inteiros	12
2.1	Conceitos Elementares	12
2.2	Relação entre coloração de faces e fluxos inteiros	15
2.3	Relação entre fluxos modulares e inteiros	23
3	Reduções	28
3.1	Reduções triviais	29
3.1.1	Redução a grafo 2-conexo	29
3.1.2	Redução a grafo 3-aresta-conexo	29
3.2	Outras Reduções	30
3.2.1	Redução a grafo com cintura grande	31
3.2.2	Redução a grafo regular	34
3.3	Implicação da Conjetura dos 3-fluxos no Teorema dos 6-fluxos	38
4	Resultados sobre a Conjetura dos 5-fluxos	41
4.1	Teorema dos 8-fluxos	41
4.2	Teorema dos 6-fluxos	43
4.3	Teorema dos 5-fluxos para grafos planares	47
4.4	Teorema dos 5-fluxos para grafos em superfícies de gênero baixo	50

5 Resultados sobre a Conjetura dos 3-fluxos	53
5.1 Teorema dos 4-fluxos	54
5.2 Teorema dos 3-fluxos para grafos planares	54
Bibliografia	70
Índice	73

Lista de Figuras

1.1	Dodecaedro 4-colorido.	2
1.2	Exemplo de um grafo com aresta de corte.	2
1.3	Exemplo da necessidade de quatro cores.	3
1.4	Dodecaedro e seu dual, icosaedro.	4
1.5	O Grafo de Petersen.	5
1.6	Um dodecaedro com 4-fluxo e 4-coloração das faces.	8
2.1	Um grafo planar G e um desenho natural de G	16
2.2	Um 3-fluxo p -balanceado para o grafo G	17
2.3	Disposição da aresta α , comum às faces de cores i e j	21
2.4	Ilustração do caso em que G tem pelo menos um laço.	21
2.5	Ilustração do caso em que G tem uma aresta de ligação. Grafo antes e depois da contração de α_0	23
2.6	Ilustração do vértice w no caso em que G só contém laços.	25
2.7	Ilustração do caso em que G tem uma aresta de ligação. Grafo antes e depois da contração de β_0	27
3.1	Circuito C antes e depois da remoção de α_0 e α_2	33
3.2	Grafo antes e depois da junção de α e β	35
3.3	Disposição das arestas α , β e ρ nos cortes δX e δY	36
3.4	Disposição das arestas α , β e ρ nos cortes $\delta(Y_x)$ e $\delta(Y_{\alpha\beta})$	38
4.1	Um exemplo de um grafo G e uma decomposição de Seymour, G' , para G . As linhas cheias em G' representam os subgrafos Eulerianos e as linhas com traços menores, as arestas especiais.	43
4.2	A contração de Seymour para o grafo da figura anterior. As linhas com traços menores representam as arestas especiais.	44
4.3	Um exemplo das disposições de X , Y e Z	46
4.4	Um exemplo da disposição de Y' , Y'' e X	47
4.5	K_5 imerso no toro.	50

4.6	Um 4-fluxo para o grafo de McGhee.	52
5.1	Exemplos de grafos que não admitem 3-orientação: (a) quatro 3-cortes; (b) orientação imposta a um vértice especificado, com dois 3-cortes.	55
5.2	Os grafos G e G_X	57
5.3	Um 6-corte separador com ziguezague.	59
5.4	Um triângulo em G com apenas um vértice de grau 3 e sua imagem em G'	62
5.5	(a) A Configuração de Grötzsch no grafo G e (b) sua imagem em G'	64
5.6	Uma orientação para as arestas em aR	66

Capítulo 1

As Conjeturas de Tutte

Neste capítulo apresentaremos um histórico sobre o estudo de coloração de grafos planares, cuja generalização resultou no surgimento do estudo dos fluxos inteiros.

Além disso, discutiremos brevemente sobre as Conjeturas de Tutte, motivadoras estas do nosso trabalho.

1.1 Coloração de Grafos Planares - Breve histórico

Coloração de grafos planares é uma das mais populares áreas em Teoria dos Grafos e está intrinsecamente associada ao Problema das Quatro Cores, de extrema importância no desenvolvimento daquele ramo da ciência.

A primeira referência escrita sobre o problema remonta ao século passado e consiste numa carta escrita por De Morgan a Hamilton, na qual pedia sua colaboração para a solução de um problema proposto por um de seus alunos, Frederick Guthrie.

O problema, que pode ser enunciado como

Todo grafo planar e sem arestas de corte é 4-colorável

não despertou interesse em Hamilton, mas desafiou, por mais de um século, inúmeros estudiosos na tentativa de sua resolução.

Seja G um grafo e VG conjunto dos vértices de G . Para todo $X \subseteq VG$, um *corte* $\delta_G X$, ou simplesmente δX , é o conjunto de arestas em G que possuem um dos extremos em X e outro em $VG \setminus X$. Um k -*corte* é um corte de tamanho k . Para $k = 1$, chamamos a única aresta do corte de *aresta de corte*.

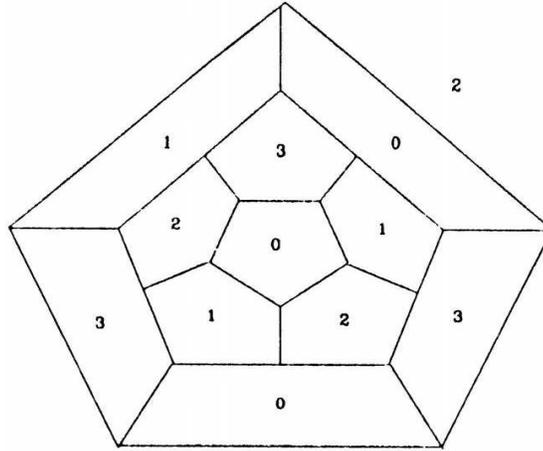


Figura 1.1: Dodecaedro 4-colorido.

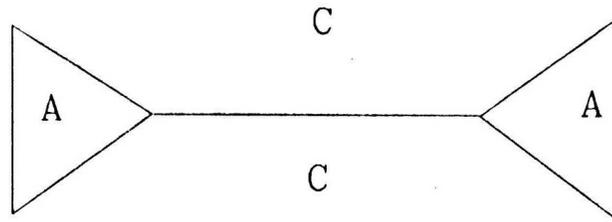


Figura 1.2: Exemplo de um grafo com aresta de corte.

Dizemos que um grafo planar é k -colorável se suas faces podem ser coloridas com k cores de tal forma que as faces adjacentes tenham cores distintas. A figura 1.1 apresenta um dodecaedro 4-colorido. Observe, pois, que é necessário que o

grafo não tenha arestas de corte, pois senão, como ilustrado na figura 1.2, estas teriam faces de cores iguais em ambos os lados.

Em 1860, De Morgan publicou o enunciado original do Problema das Quatro Cores [Mor 1860]:

When a person colours a map, say the counties in a kingdom, it is clear he must have so many different colours that every pair of counties which have some common boundary line - not a mere meeting of two corners - must have different colours. Now, it must have been always known to map-colourers that four different colours are enough.

Em 1880, através de uma carta de Guthrie, tornou-se público que o problema de fato devia-se a seu irmão, Francis Guthrie. A necessidade de quatro cores foi apresentada por De Morgan em sua carta a Hamilton, exibindo a figura 1.3, onde A, B, C e D são nomes de cores.

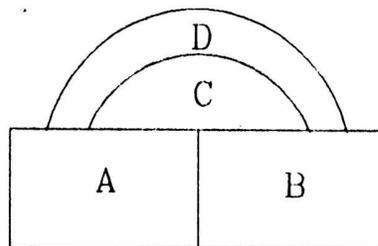


Figura 1.3: Exemplo da necessidade de quatro cores.

Embora De Morgan tenha sugerido o problema em 1852, somente em 1876 ele voltou a ser investigado, destacando-se então o famoso artigo de Cayley [Cay 1879], no qual o matemático apresenta algumas das dificuldades encontradas na tentativa de solucionar o problema.

Inúmeras provas surgiram neste período e em 1879, conheceu-se talvez a mais falaciosa delas, devida a Kempe [Kem 1879]. Entretanto, apesar da sua inveracidade, ela apresentou a idéia de caminhos de cores alternadas, usada posteriormente em inúmeros outros estudos do problema.

A prova apresentada por Kempe foi aceita com grande entusiasmo no meio científico da época. Mas, em 1890, uma publicação de Heawood [Hea 1890] revelou um engano no argumento das cadeias de cores alternadas. Modificando o argumento original, neste mesmo artigo Heawood demonstrou que cinco cores eram suficientes, provando assim o Teorema das Cinco Cores, cujo enunciado segue:

Todo grafo planar e sem arestas de corte é 5-colorável.

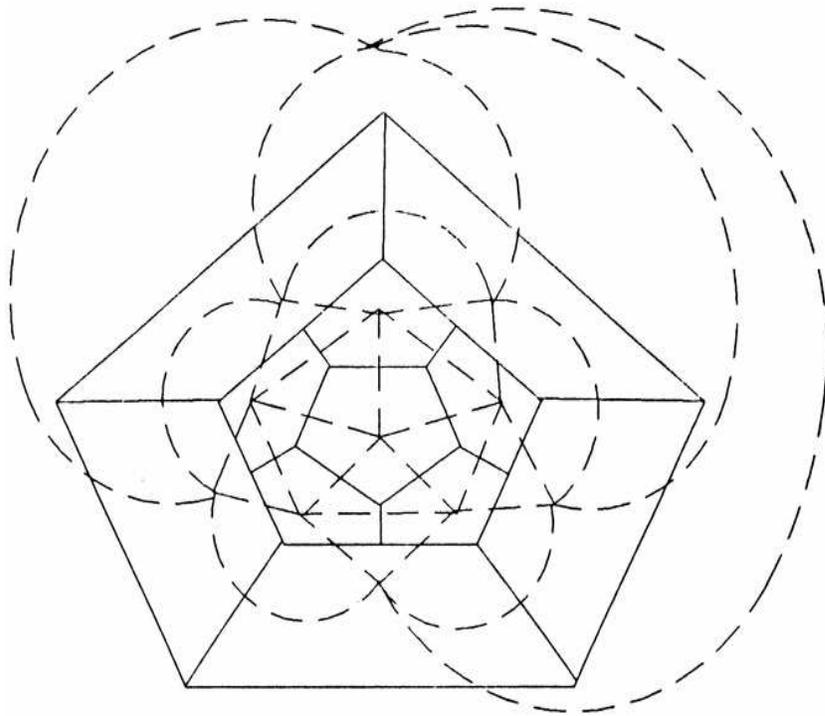


Figura 1.4: Dodecaedro e seu dual, icosaedro.

A descoberta de Heawood, embora não divulgada com entusiasmo no meio científico, levantou novamente o problema original. Nesta época Heffter estudou vizinhanças de regiões, problema inicialmente levantado por De Möbius, motivo da confusão em torno da paternidade de De Möbius em relação ao Problema das Quatro Cores. Numa segunda incursão sobre o problema, Heffter usou a noção de dualidade de vértices e faces em um mapa, cuja origem remonta aos estudos de Euclides sobre o octaedro e dodecaedro.

O conceito de dualidade mostrou-se muito importante em estudos que se seguiram e uma definição mais precisa da idéia é dada abaixo.

Dado um mapa planar G , podemos definir G^* como *dual* de G , fazendo corresponder cada face f de G com um vértice f^* em G^* , onde dois vértices f^* e g^* são ligados em G^* se e somente se as faces f e g correspondentes tiverem uma aresta em comum (figura 1.4). Convém ressaltar que cortes em G correspondem a circuitos em G^* e vice-versa.

A dualidade de grafos foi também explorada por Whitney, apresentando a idéia de *dual geométrico*, a qual relacionou posteriormente a propriedades combinatoriais. Foi também Whitney responsável, mais tarde, pela descoberta de que na formulação dual do Problema das Quatro Cores bastaria considerar os grafos Hamiltonianos planares [Whi 1931].

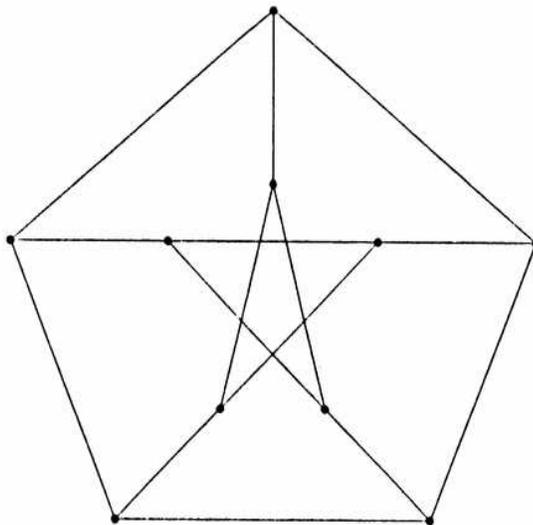


Figura 1.5: O Grafo de Petersen.

Outras tentativas de reformulação do problema foram feitas. Ainda em 1880, Tait [Tai 1880] reduziu a conjectura para o problema de colorabilidade de arestas em mapas cúbicos: mais precisamente, Tait mostrou que bastava considerar o problema para mapas cujos vértices têm grau três e provar que, nesse caso, é possível colorir as arestas do mapa de forma que arestas adjacentes tenham cores

distintas. Tait acreditou, erroneamente, ter encontrado uma prova para o Problema das Quatro Cores, agora sob novo enfoque. Convém observar, entretanto, que não é possível obter uma 3-coloração de arestas para todo mapa cúbico não planar, pois o grafo de Petersen (figura 1.5) é um contra-exemplo conhecido.

Em 1943, Hadwiger [Had 1943] lança sua famosa conjectura, que pode ser enunciada como:

Todo grafo conexo e k -cromático é contraível a um grafo completo de k vértices.

Dizemos que um grafo é k -cromático se ele é vértice k -colorável, mas não vértice $(k - 1)$ -colorável, ou seja, se seus vértices podem ser coloridos com k , mas não com $k - 1$ cores, tal que vértices adjacentes possuam cores distintas.

Uma aresta α de um grafo G é dita *contraída* se ela for eliminada do grafo G e seus extremos forem unificados; o grafo resultante será denotado por $G|\alpha$.

Um grafo H é dito *contraível* a um grafo G , se o grafo resultante de algumas contrações de arestas de H for isomorfo a G . Na realidade, por razões técnicas, iremos acrescentar à definição anterior, a remoção de vértices isolados.

O Problema das Quatro Cores pode ser visto, então, como um caso particular ($k = 5$) da Conjectura de Hadwiger.

Em 1958, surge outro resultado interessante na área, agora devido a Grötzsch [Gro 1958] com a demonstração do Teorema das Três Cores, assim enunciado:

Todo grafo planar, sem arestas de corte e sem 3-cortes, é 3-colorável.

Uma generalização deste teorema foi apresentada em 1963 por Grünbaum [Gru 1963] e também em 1974 por Aksionov [Aks 1974], com o seguinte enunciado:

Todo grafo planar, sem arestas de corte e com não mais que três 3-cortes, é 3-colorável.

Somente em 1977, Appel e Haken [AH 1977], trabalhando em redutibilidade de grafos e *procedimentos de descarga*, conseguiram uma prova computacional para o teorema e a primeira neste estilo em Teoria dos Grafos; foi feito largo emprego de computador, ferramenta esta anteriormente usada por Heesch, Bernhart, Allaire e Swart.

Finalmente, dos mais de 100 anos de estudo de coloração em grafos, ressalta-

mos duas versões (primal e dual) dos três mais importantes resultados, estritamente relacionados ao estudo desenvolvido neste trabalho, que são:

Teorema das Três Cores

*Todo grafo planar, sem arestas de corte e sem 3-cortes, é 3-colorável.
Todo grafo planar, sem laços e sem triângulos, é vértice 3-colorável.*

Teorema das Quatro Cores

*Todo grafo planar sem arestas de corte é 4-colorável.
Todo grafo planar sem laços é vértice 4-colorável.*

Teorema das Cinco Cores

*Todo grafo planar sem arestas de corte é 5-colorável.
Todo grafo planar sem laços é vértice 5-colorável.*

O breve histórico aqui apresentado foi baseado nos livros de Biggs, Lloyd e Wilson [BLW 1976], Ore [Ore 1967], Harary [Har 1969] e Bollobás [Bol 1978], além do artigo de Saaty [Saa 1972].

1.2 Generalizações para grafos não planares

O estudo de coloração não se restringe apenas a grafos planares e a primeira tentativa de generalização desse conceito consistiu no estudo de outras superfícies.

Um outro enfoque surgiu tendo por base a dualidade entre vértices e faces num grafo planar. Assim, tentou-se estender o estudo de coloração a um grafo qualquer, analisando-se a coloração dos vértices de um grafo. Surgiu, então, o conceito de *número cromático*, $\chi(G)$, definido como o menor número de cores necessário para colorir os vértices de um grafo, tal que vértices adjacentes possuam cores distintas.

Foram realizados, também, estudos envolvendo *cliques* de um grafo G , ou seja, um subconjunto X de vértices de G tal que o grafo gerado por ele seja completo, considerando-se G simples. Definimos o *subgrafo de G gerado por X* , $G[X]$, como sendo o subgrafo cujo conjunto de vértices é X e cujo conjunto

de arestas é composto das arestas de G com ambos os extremos em X . Parece trivial, portanto, que $\chi(G) \geq \kappa(G)$, onde $\kappa(G)$ denota o tamanho do maior clique de G . Entretanto, é menos trivial perceber que um grafo com clique pequeno, digamos sem triângulos, possa ter um número cromático muito grande, resultado apresentado por Mycielski [Myc 1955] pela construção de tal grafo.

Além disso, em 1972, Karp demonstrou que determinar se um grafo G é k -colorável, dados G e k , é NP-completo [Kar 1972]. Mais tarde, Garey, Johnson e Stockmeyer, provaram que mesmo que se fixe o k ($k \geq 3$), descobrir se existe uma k -coloração é NP-completo. É deles também o resultado de que mesmo sendo $k = 3$, grafos planares, com grau dos vértices não excedendo quatro, o problema ainda permanece NP-completo [GJS 1979].

Este fato desencorajou o estudo de coloração de vértices, ao mesmo tempo em que despertou o interesse dos pesquisadores para uma outra abordagem, já existente, e que passaremos a descrever.

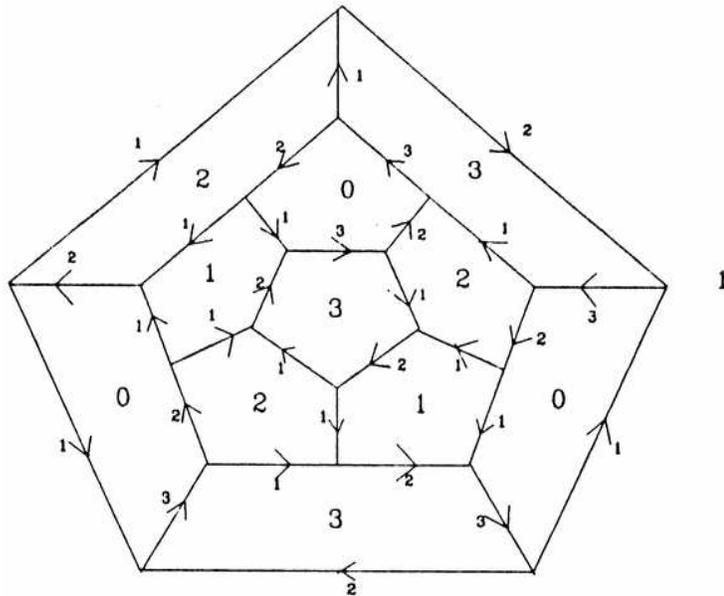


Figura 1.6: Um dodecaedro com 4-fluxo e 4-coloração das faces.

Vamos introduzir o conceito de fluxos inteiros através da figura 1.6. Ela representa um dodecaedro cujas faces estão coloridas com as cores 0, 1, 2 e 3.

Analisando a figura, é possível observar que cada aresta tem um peso a ela associado e uma orientação; o peso de cada aresta é dado pela diferença de cores das faces nela incidentes e sua orientação é de tal forma que a face de cor maior se encontra do seu lado direito.

Note também que todas as arestas possuem pesos no intervalo de 1 a 3 e que os vértices têm a propriedade de *fluxo conservativo*: a soma dos pesos das arestas que entram neles é igual a soma dos pesos das que saem deles. Dizemos, pois, que um *k-fluxo* é uma orientação ponderada das arestas de um grafo, tal que os pesos sejam inteiros no intervalo de 1 a $k - 1$ e valha a propriedade do fluxo conservativo em cada vértice. Em particular, o nosso exemplo mostra um 4-fluxo.

Além disso, é possível afirmar que dada uma *k*-coloração das faces de um grafo planar pode-se construir um *k*-fluxo e vice-versa. Entretanto, a definição de fluxo não está correlacionada à planaridade do grafo, advindo assim, a idéia de estender o estudo para grafos quaisquer. Isto de fato ocorreu e é neste estudo que estará calcado o nosso trabalho, cujos resultados mais importantes em aberto são três conjecturas devidas a Tutte.

1.3 Conjeturas de Tutte

Ao iniciarmos o estudo de fluxos parece natural levantarmos algumas questões:

Será que é possível definir classes de grafos que admitam um *k*-fluxo, dado um *k* fixo? Será que existe um limite de *k*, tal que todos os grafos possuam um *k*-fluxo? Para *k* muito pequeno, sabemos boas caracterizações dessas classes; em particular, para $k = 1$ temos o conjunto dos grafos sem arestas e para $k = 2$ o conjunto dos grafos Eulerianos.

Em 1954, Tutte lançou a Conjetura dos 5-fluxos [Tut 1954]; em 1966, Tutte lançou as Conjeturas dos 3- e 4-fluxos [Tut 1966b]. As Conjeturas dos 3-, 4- e 5-fluxos, abaixo enumeradas, implicam, respectivamente, nos Teoremas das Três, Quatro e Cinco Cores para grafos planares. São elas:

- (i) *Todo grafo sem arestas de corte e sem 3-cortes tem um 3-fluxo.*
- (ii) *Todo grafo sem arestas de corte e que não possui nenhum subgrafo contraível ao grafo de Petersen tem um 4-fluxo.*
- (iii) *Todo grafo sem arestas de corte tem um 5-fluxo.*

Somente em 1979, Jaeger [Jae 1979] provou que todo grafo 2-aresta conexo possui um 8-fluxo, estabelecendo assim o primeiro limite de k que respondesse à segunda questão. Dois anos depois, Seymour [Sey 1981] melhorou este resultado para 6-fluxo, sendo, ainda hoje, aquele que mais se aproxima da Conjetura dos 5-fluxos. Younger [You 1983], apresenta uma prova dos 5-fluxos para grafos planares, sem o uso da fórmula de Euler. Steinberg [Ste 1984] apresenta uma prova dos 5-fluxos para grafos no plano projetivo. Möller, Carstens e Brinkmann [MCB 1988] apresentam uma demonstração dos 5-fluxos para grafos em superfícies de gênero baixo.

Para a Conjetura dos 3-fluxos, o resultado geral que mais se aproxima da Conjetura é o Teorema dos 4-fluxos de Jaeger. Existem ainda o teorema dos 3-fluxos para grafos planares com até três 3-cortes e para grafos no plano projetivo com até um 3-corte de Steinberg e Younger [SY 1989], depois generalizado por Dahab e Younger [DY 1988] para grafos com até três 3-cortes no plano projetivo. Para a Conjetura dos 4-fluxos, quase nada se sabe.

Entretanto, é interessante observar que, determinar se um grafo tem um 3-fluxo é NP-completo, por analogia ao problema de coloração de vértices já mencionado.

Nos próximos capítulos, ao referirmo-nos a essas conjeturas, usaremos as abreviações CJ_3 , CJ_4 e CJ_5 para as conjeturas (i), (ii) e (iii), respectivamente.

1.4 Conteúdo dos capítulos posteriores e nossas contribuições

No segundo capítulo apresentaremos alguns conceitos elementares de fluxos inteiros, bem como demonstraremos relações entre fluxos inteiros e modulares e entre fluxos modulares e coloração de faces num grafo planar. Nossas contribuições nesse capítulo são a introdução do conceito de k -fluxo p -balanceado e a demonstração da relação, para grafos planares, entre k -fluxo p -balanceado e k -fluxo modular.

No terceiro capítulo vamos estudar algumas reduções necessárias para as provas dos teoremas dos capítulos posteriores. Nossa contribuição nesse capítulo é a apresentação de uma demonstração original da implicação da Conjetura dos 3-fluxos no Teorema dos 6-fluxos.

No quarto capítulo demonstraremos resultados importantes sobre a Conjetura dos 5-fluxos, a saber, os já citados Teorema dos 8-fluxos de Jaeger, Teorema dos 6-fluxos de Seymour, Teorema dos 5-fluxos para grafos planares (demonstração sem o uso da fórmula de Euler) de Younger e Teorema dos 5-fluxos para grafos em

superfícies de gênero baixo de Möller, Carstens e Brinkmann. Nossa contribuição nesse capítulo é a apresentação de uma demonstração para o Teorema dos 5-fluxos para grafos planares baseado na demonstração de Younger, mas agora sem o uso de argumentos de coloração, ainda por ele usados.

No quinto capítulo demonstraremos dois resultados sobre a Conjetura dos 3-fluxos, que são os já citados Teorema dos 4-fluxos de Jaeger e o Teorema dos 3-fluxos para grafos planares, um caso particular do Teorema dos 3-fluxos para grafos em superfícies de gênero baixo de Steinberg e Younger. Nossa contribuição nesse capítulo é a simplificação da prova do Teorema dos 3-fluxos para grafos planares, em relação à apresentada por Steinberg e Younger, bem como a generalização deste teorema, pela permissão de mais que três 3-cortes, mediante certas condições.

Capítulo 2

Fluxos Inteiros

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos básicos de fluxos inteiros, bem como estabelecer relações entre fluxos inteiros e modulares e entre fluxos modulares e colorações de faces num grafo planar. Ainda para grafos planares, correlacionaremos fluxos modulares e fluxos inteiros bem particulares, os quais denominaremos de fluxos p -balanceados.

No desenvolvimento deste trabalho considere G como sendo um grafo não orientado com conjunto de arestas aG e conjunto de vértices VG .

2.1 Conceitos Elementares

Uma *orientação k -ponderada parcial* em G é um par (D, φ) , onde D é uma orientação e φ é uma função *peso*, que associa cada aresta de G a um inteiro no intervalo de 0 a $k - 1$.

Dada uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) , chamamos de *suporte* de (D, φ) , $S(D, \varphi)$, o conjunto de arestas $\alpha \in aG$ tal que $\varphi(\alpha) \neq 0$. Assim, uma *orientação k -ponderada (total)* é aquela em que $S(D, \varphi) = aG$.

Dadas uma orientação k' -ponderada parcial (D', φ') e outra orientação k'' -ponderada parcial (D'', φ'') em G , definimos a *soma* de (D', φ') e (D'', φ'') como o par (D, φ) , onde D é uma orientação das arestas de G e φ uma função peso, tais que para $\forall \alpha \in aG$, vale:

- $\varphi(\alpha) := \varphi'(\alpha) + \varphi''(\alpha)$, com orientação em D coincidente com D' ou D'' , se as orientações de α em D' e D'' coincidem;

- $\varphi(\alpha) := \varphi'(\alpha) - \varphi''(\alpha)$, com orientação em D coincidente com D' , se as orientações de α em D' e D'' são opostas e $\varphi'(\alpha) > \varphi''(\alpha)$;
- $\varphi(\alpha) := \varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha)$, com orientação em D coincidente com D'' , se as orientações de α em D' e D'' são opostas e $\varphi''(\alpha) > \varphi'(\alpha)$;
- $\varphi(\alpha) := 0$, com orientação em D arbitrária, se as orientações de α em D' e D'' são opostas e $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha)$.

Proposição 2.1 *A soma de uma orientação k' -ponderada parcial com outra orientação k'' -ponderada parcial é uma orientação k -ponderada parcial, onde $k := (k' + k'') - 1$.*

Dadas uma orientação k' -ponderada parcial (D', φ') e uma constante inteira l , definimos a *multiplicação de uma constante l* por (D', φ') como o par (D, φ) , onde $(D, \varphi) := l \cdot (D', \varphi') := (D', l \cdot \varphi')$.

Proposição 2.2 *A multiplicação de uma constante l por uma orientação k' -ponderada parcial é uma orientação k -ponderada parcial, onde $k := l \cdot (k' - 1) + 1$.*

A *restrição* de uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) a um conjunto $x \subseteq aG$, é um par (D', φ') em que D' é uma orientação das arestas de x , que coincide com D nestas arestas, e φ' é a restrição de φ a x .

Dado um subconjunto x de aG , o *subgrafo de G gerado por x* , $G[x]$, é o subgrafo cujo conjunto de arestas é x e cujo conjunto de vértices é composto dos extremos das arestas em x .

Seja G um grafo, $x \subseteq aG$ e (D, φ) uma orientação k -ponderada parcial em $G[x]$. Uma *extensão* de (D, φ) a aG é um par (D', φ') , onde D' é uma orientação das arestas de aG , que coincide com D em x , e φ' é uma extensão de φ a aG .

Para $\forall X \subseteq VG$, definimos $\delta^+ X$ como sendo o conjunto de arestas que saem de X e $\delta^- X$ como o conjunto de arestas que entram em X . Então, para uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) em G , o *fluxo líquido* de X por (D, φ) é dado por

$$\varphi(X) := \sum_{\alpha \in \delta^+ X} \varphi(\alpha) - \sum_{\alpha \in \delta^- X} \varphi(\alpha).$$

Dizemos que o conjunto X é *equilibrado* ou *equilibrado módulo k* se $\varphi(X) = 0$ ou $\varphi(X) \equiv 0 \pmod{k}$, respectivamente. Estendemos estas definições a um vértice v , quando o conjunto unitário $\{v\}$ for equilibrado ou equilibrado módulo k , respectivamente.

Um *k-fluxo inteiro parcial* em G é uma orientação k -ponderada parcial, onde todo v em VG está equilibrado. Analogamente, um *k-fluxo modular parcial* em G é uma orientação k -ponderada parcial, onde todo v em VG está equilibrado módulo k .

Similarmente às definições anteriores, um *k-fluxo inteiro (total)* em G é uma orientação k -ponderada (total), onde todo v em VG está equilibrado. Define-se, da mesma forma, um *k-fluxo modular (total)*, agora considerando-se o equilíbrio módulo k dos vértices em VG .

Nota: Todo k -fluxo inteiro parcial é um k -fluxo modular parcial de mesmo suporte. Analogamente, todo k -fluxo inteiro (total) é um k -fluxo modular (total).

No desenvolvimento deste trabalho quando nos referirmos a *k-fluxo* e *k-fluxo modular*, subentenda-se *k-fluxo inteiro total* e *k-fluxo modular total*, respectivamente.

Proposição 2.3 *Para toda orientação k -ponderada parcial (D, φ) , vale a seguinte igualdade:*

$$\varphi(X) = \sum_{v \in X} \varphi(v), \quad \forall X \subseteq VG.$$

Prova: Por definição,

$$\sum_{v \in X} \varphi(v) = \sum_{v \in X} \sum_{\alpha \in \delta^+ v} \varphi(\alpha) - \sum_{v \in X} \sum_{\alpha \in \delta^- v} \varphi(\alpha).$$

Como as arestas com ambos os extremos em X são anuladas nesta soma, temos que

$$\sum_{v \in X} \varphi(v) = \sum_{\alpha \in \delta^+ X} \varphi(\alpha) - \sum_{\alpha \in \delta^- X} \varphi(\alpha) = \varphi(X). \quad \square$$

Corolário 2.4 *Se (D, φ) é um k -fluxo parcial, então $\varphi(X) = 0, \forall X \subseteq VG$.*

Corolário 2.5 *Se (D, φ) é um k -fluxo modular parcial, então $\varphi(X) \equiv 0 \pmod{k}, \forall X \subseteq VG$.*

Corolário 2.6 *Seja G com orientação k -ponderada parcial (D, φ) e seja $x \in VG$. Se todos os vértices em $VG - x$ encontram-se equilibrados ou equilibrados módulo k , então x também o está, respectivamente.*

Prova: Seja $Y := VG - x$. Pela Proposição 2.3, temos que

$$\sum_{v \in Y} \varphi(v) + \varphi(x) = \varphi(VG) = 0.$$

Mas, $\sum_{v \in Y} \varphi(v)$ é igual (côngruo) a zero, por hipótese. Daí o resultado. \square

Corolário 2.7 *Sejam α uma aresta com extremos u e v e (D, φ) um k -fluxo modular parcial em G . Seja também $G' := G|\alpha$, o grafo obtido a partir de G pela contração de α . A restrição (D', φ') de (D, φ) a aG' é um k -fluxo modular parcial em G' de suporte $S(D, \varphi) - \alpha$.*

Prova: Seja w o vértice em G' resultante da coalizão dos extremos u e v de α . Claramente todos os vértices em $VG' - w$ encontram-se equilibrados módulo k . Entretanto, pelo Corolário 2.6, w também o está, daí o resultado. \square

Corolário 2.8 *Sejam α uma aresta com extremos u e v e (D', φ') um k -fluxo modular em $G' := G|\alpha$. Existe uma extensão de (D', φ') a aG que é um k -fluxo modular parcial, cujo suporte inclui $S(D', \varphi')$ e em que α é orientada de u para v .*

Prova: Seja a extensão (D, φ) de (D', φ') a aG que orienta a aresta α de u para v , atribuindo a ela um peso entre 0 e $k - 1$, que equilibra módulo k o vértice u . Assim, todos os vértices de $VG - v$ estão equilibrados módulo k . Mas, pelo Corolário 2.6, v também o está, daí o resultado. \square

Nota: Se desejarmos contrair não só uma aresta α , mas sim um conjunto de arestas em aG , os dois resultados anteriores podem ser facilmente estendidos, usando-se técnica de indução no número de arestas.

2.2 Relação entre coloração de faces e fluxos inteiros

Para um inteiro k , uma k -coloração das faces de um grafo planar G é uma função que associa ao conjunto de faces de G , FG , o conjunto $\{0 \dots k - 1\}$ de cores, de tal forma que faces adjacentes possuam cores distintas.

Um *desenho* de um grafo G é uma função p que associa a cada vértice v de G uma seqüência $p_v := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(v)-1})$ das arestas que nele incidem, onde $d(v)$ é o grau do vértice v . Observe que cada laço incidente em v ocorre duas vezes em p_v : numa das ocorrências, o laço *entra* em v , na outra *sai* de v .

Dada uma seqüência $p_v = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(v)-1})$, dizemos que $(\alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d(v)-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})$ é uma *rotação* de p_v ($0 \leq l \leq d(v) - 1$).

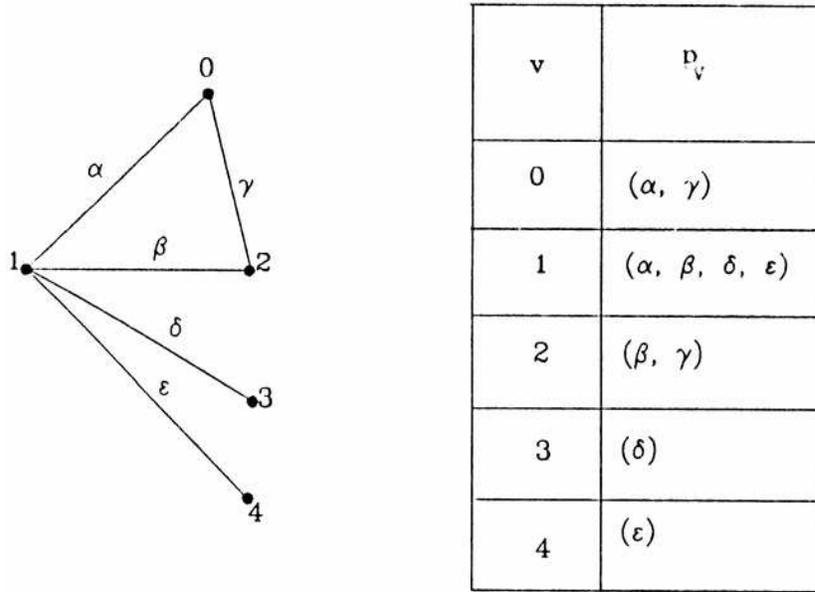


Figura 2.1: Um grafo planar G e um desenho natural de G .

Convém ressaltar que um grafo planar (ou melhor dizendo, um mapa planar) tem um desenho, que chamaremos de *natural*, onde a cada vértice do grafo é associada uma seqüência que corresponde à “ordem” de incidência das arestas no vértice, digamos, no sentido horário (figura 2.1).

Dizemos que um k -fluxo (D, φ) é p -balanceado se, para cada vértice v , existe uma rotação $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(v)-1})$ de p_v , tal que para todo j , $0 \leq j < d(v)$, vale que:

$$0 \leq \sum_{i=0}^j s_D(\beta_i) \varphi(\beta_i) < k, \quad (2.1)$$

onde

encontrar uma 3-coloração para as suas faces que corresponda ao 3-fluxo p -balanceado apresentado, como comentado na secção 1.2.

Além disso, observe que tal 3-fluxo p -balanceado tem a propriedade de que, se tomarmos uma outra rotação de p_v , ou seja, se adotarmos nova origem para o cômputo da somatória de (2.1), esta não excederá três em módulo, para todo intervalo considerado. Por exemplo, para a rotação $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ de p_v , $-1 \leq \sum_{i=0}^j s(\alpha_i)\varphi(\alpha_i) \leq 1$, para todo $0 \leq j \leq 4$.

De fato, demonstraremos a seguir que a propriedade acima caracteriza um k -fluxo p -balanceado.

Proposição 2.9 *Um k -fluxo (D, φ) é p -balanceado se e somente se, para todo vértice v , para toda rotação $q := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(v)-1})$ de p_v e para todo j , $0 \leq j < d(v)$, vale a desigualdade:*

$$\left| \sum_{i=0}^j s(\alpha_i)\varphi(\alpha_i) \right| < k. \quad (2.2)$$

Prova: Seja v um vértice de VG . Suponha inicialmente que (D, φ) é p -balanceado, vamos provar a validade de (2.2). Seja $p_v^R := (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(v)-1})$ a rotação de p_v que satisfaz (2.1). Seja l tal que $0 \leq l < d(v)$ e

$$q = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(v)-1}) = (\beta_l, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{d(v)-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{l-1}).$$

Note que caso $l = 0$ então $q = p_v^R$ e (2.2) vale trivialmente. Suponhamos, portanto, que $l > 0$. Seja j no intervalo $0 \leq j < d(v)$. Denotaremos por $S(h)$, $-1 \leq h < d(v)$, a soma $\sum_{i=0}^h s(\beta_i)\varphi(\beta_i)$.

Claramente,

$$\sum_{i=0}^j s(\alpha_i)\varphi(\alpha_i) = \sum_{i=l}^{j+l} s(\beta_{i \bmod d(v)})\varphi(\beta_{i \bmod d(v)}). \quad (2.3)$$

O lado direito de (2.3) é igual a

$$\left\lfloor \frac{j+l}{d(v)} \right\rfloor S[d(v)-1] + S[(j+l) \bmod d(v)] - S(l-1).$$

Além disso, (D, φ) é um k -fluxo e portanto $S[d(v)-1] = 0$.

Logo,

$$\sum_{i=0}^j s(\alpha_i)\varphi(\alpha_i) = S[(j+l) \bmod d(v)] - S(l-1). \quad (2.4)$$

Por hipótese, ambos os termos do lado direito de (2.4) são não negativos e menores do que k . Portanto, (2.2) vale.

Para provar a recíproca, suponhamos que (2.2) vale e vamos provar que (D, φ) é p -balanceado. Seja $p_v = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d(v)-1})$ e seja l no intervalo $0 < l \leq d(v)$, tal que

$$\sum_{i=0}^{l-1} s(\rho_i)\varphi(\rho_i) = \min \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} s(\rho_i)\varphi(\rho_i) \mid 0 < j \leq d(v) \right\}. \quad (2.5)$$

Seja também

$$r := (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(v)-1}) = (\rho_l, \rho_{l+1}, \dots, \rho_{d(v)-1}, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{l-1}). \quad (2.6)$$

Vamos provar que (2.1) vale para r . Para tanto, seja j no intervalo $0 \leq j < d(v)$.

Por hipótese,

$$-k < \sum_{i=0}^j s(\beta_i)\varphi(\beta_i) < k.$$

Resta portanto mostrar que

$$\sum_{i=0}^j s(\beta_i)\varphi(\beta_i) \geq 0. \quad (2.7)$$

Claramente, de (2.6)

$$\sum_{i=0}^j s(\beta_i)\varphi(\beta_i) = \sum_{i=l}^{j+l} s(\rho_{i \bmod d(v)})\varphi(\rho_{i \bmod d(v)}). \quad (2.8)$$

Analogamente ao caso anterior, o lado direito de (2.8) é igual a

$$\sum_{i=0}^{(j+l) \bmod d(v)} s(\rho_i)\varphi(\rho_i) - \sum_{i=0}^{l-1} s(\rho_i)\varphi(\rho_i).$$

Pela escolha de l , esta expressão é não negativa. Assim, (2.7) vale e, conseqüentemente, (2.1) para r . \square

Como mencionamos na secção 1.2 é possível, dada uma k -coloração das faces de um grafo estabelecer um k -fluxo a ela correspondente e vice-versa. Demonstraremos a seguir um resultado equivalente.

Teorema 2.10 *Seja G planar e seja p um desenho natural de G . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G tem uma k -coloração
- (ii) G tem um k -fluxo p -balanceado
- (iii) G tem um k -fluxo modular

Prova:

(i) \Rightarrow (ii): Seja θ uma k -coloração em G . Atribua a cada aresta $\alpha \in aG$ um peso $\varphi(\alpha)$ igual à diferença absoluta dos números das cores de cada “lado” de α . Para obter D , oriente α de tal forma que a face incidente em α com maior cor fique do lado direito. Seja $v \in VG$, seja $q := (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(v)-1})$ uma rotação qualquer de p_v e sejam i e j tais que $0 \leq i \leq j < d(v)$. Sejam também f_i e $f_{(i+1) \bmod d(v)}$ as faces que têm a aresta β_i em comum. Pela definição de (D, φ) , temos que

$$s(\beta_i)\varphi(\beta_i) = \theta(f_{(i+1) \bmod d(v)}) - \theta(f_i).$$

onde

$$s(\beta_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta_i \text{ sai de } v \\ -1 & \text{se } \beta_i \text{ entra em } v \end{cases}$$

Assim, segue que

$$\sum_{i=0}^j s(\beta_i)\varphi(\beta_i) = \theta(f_{(j+1) \bmod d(v)}) - \theta(f_0). \quad (2.9)$$

Portanto, a somatória do lado esquerdo de (2.9) é sempre menor que k em módulo, satisfazendo, assim, (2.2) da caracterização de k -fluxo p -balanceado.

Mas, $\varphi(v)$ é o valor da somatória da equação (2.9) quando $j := d(v) - 1$. Portanto, v é equilibrado. Logo, pela Proposição 2.9, decorre o resultado.

(ii) \Rightarrow (iii): Imediata.

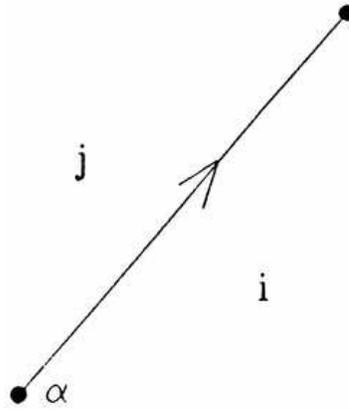


Figura 2.3: Disposição da aresta α , comum às faces de cores i e j .

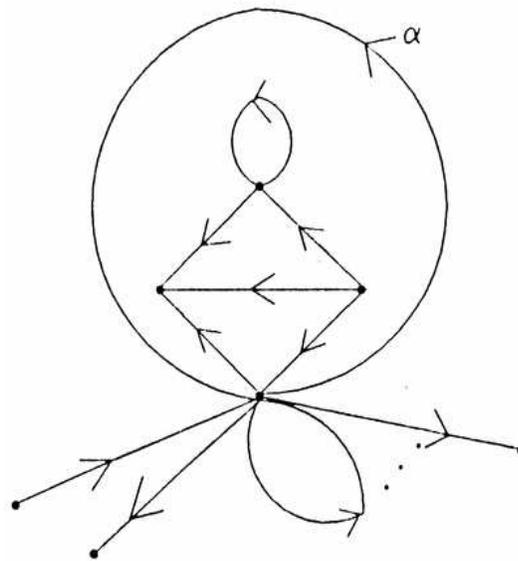


Figura 2.4: Ilustração do caso em que G tem pelo menos um laço.

(iii) \Rightarrow (i): Seja (D, φ) um k -fluxo modular em G . Na realidade demonstraremos que existe uma k -coloração das faces de G que atende à seguinte propriedade: dadas duas faces de cores i e j com aresta comum α , orientada de tal forma que

a face de cor i fique à sua direita (figura 2.3), vale que

$$i \equiv j + \varphi(\alpha) \pmod{k}. \quad (2.10)$$

O caso em que G não tem arestas é trivial.

Vamos considerar agora, o caso em que G tem pelo menos um laço, digamos α (figura 2.4). Removendo-se α , obtemos o grafo G' . Seja (D', φ') a restrição de (D, φ) a aG' . Claramente (D', φ') é um k -fluxo modular em G' . Por hipótese de indução, G' admite uma k -coloração satisfazendo a propriedade (2.10). Transporte a k -coloração obtida para G e apenas para a(s) face(s) no “interior” de α , some, módulo k , $s(\alpha)\varphi(\alpha)$, à coloração herdada por G' , onde

$$s(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se o sentido de } \alpha \text{ for horário} \\ -1, & \text{se o sentido de } \alpha \text{ for anti-horário} \end{cases}.$$

Assim, temos em G uma k -coloração atendendo (2.10).

Considere, agora o caso em que G só tem arestas de ligação. Seja α_0 uma aresta de ligação em G , que digamos, sai de u e entra em v . Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(v)-1}$ as arestas incidentes em v nesta ordem cíclica. Sejam também as faces $f_0, f_1, \dots, f_{d(v)-1}$, delimitadas em v pelos pares de arestas $\alpha_0\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_{d(v)-1}\alpha_0$. Contraia α_0 obtendo G' (figura 2.5).

Pelo Corolário 2.7 em G' , a restrição (D', φ') de (D, φ) a aG' é um k -fluxo modular em G' . Por hipótese de indução, G' tem uma k -coloração θ satisfazendo a propriedade (2.10). Entretanto, em G'

$$\theta(f_{d(v)-1}) \equiv \theta(f_0) + \sum_{i=1}^{d(v)-1} s(\alpha_i)\varphi'(\alpha_i) \pmod{k}, \quad (2.11)$$

onde

$$s(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_i \text{ sai de } v \\ -1 & \text{se } \alpha_i \text{ entra em } v \end{cases}$$

Como em G temos que $\varphi(v) \equiv 0 \pmod{k}$, então

$$\varphi(\alpha_0) \equiv \sum_{i=1}^{d(v)-1} s(\alpha_i)\varphi(\alpha_i) \pmod{k}. \quad (2.12)$$

Mas, as somatórias em (2.11) e (2.12) têm o mesmo valor, logo em G , $\theta(f_{d(v)-1}) \equiv \theta(f_0) + \varphi(\alpha_0) \pmod{k}$. Assim a propriedade (2.10) também é satisfeita para α_0 , além das demais arestas de G . Portanto, a k -coloração encontrada é também uma k -coloração em G que também satisfaz (2.10). \square

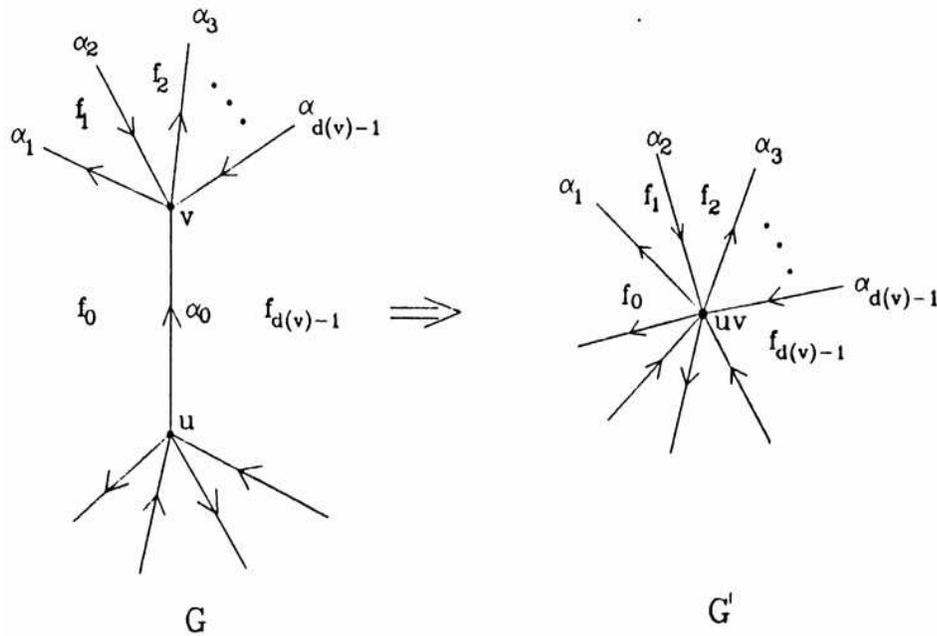


Figura 2.5: Ilustração do caso em que G tem uma aresta de ligação. Grafo antes e depois da contração de α_0 .

2.3 Relação entre fluxos modulares e inteiros

Fluxos modulares e inteiros estão estritamente relacionados, como poderá ser observado no teorema a seguir.

Teorema 2.11 *A todo k -fluxo modular parcial corresponde um k -fluxo inteiro parcial de mesmo suporte.*

Corolário 2.12 *A todo k -fluxo modular corresponde um k -fluxo inteiro.*

Antes de provarmos o teorema, apresentaremos alguns conceitos e resultados a serem usados na sua demonstração.

Dada uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) , dizemos que um vértice v de G é *positivo* se $\varphi(v) > 0$ e *negativo* se $\varphi(v) < 0$; chamamos de *desvio do equilíbrio* de (D, φ) a soma dos fluxos líquidos sobre todos os vértices positivos de G .

Proposição 2.13 *Um k -fluxo modular parcial (D, φ) é um k -fluxo inteiro parcial, de mesmo suporte, se e somente se seu desvio do equilíbrio é zero.*

Prova: Obviamente basta demonstrar a condição de suficiência. Se o desvio do equilíbrio de (D, φ) é zero, então não existem vértices positivos. Mas, $\varphi(VG) = 0$. Logo, pela Proposição 2.3, também não existem vértices negativos, daí o resultado. \square

Dada uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) e uma aresta $\alpha \in S(D, \varphi)$, k -reverter α significa obter uma nova orientação k -ponderada (D', φ') , onde para $\forall \beta \in S(D, \varphi) - \alpha$, $\varphi'(\beta) := \varphi(\beta)$, com orientações coincidentes em D e D' e $\varphi'(\alpha) := k - \varphi(\alpha)$, com orientação em D' oposta à orientação em D .

A demonstração do resultado a seguir é imediata.

Proposição 2.14 *Seja (D, φ) uma orientação k -ponderada e α uma aresta de seu suporte, orientada digamos, de u para v . Seja (D', φ') a orientação k -ponderada obtida pela k -reversão de α . Então,*

$$\varphi'(u) = \varphi(u) - k \text{ e } \varphi'(v) = \varphi(v) + k.$$

Agora estamos em condições de provar o Teorema 2.11.

Prova do Teorema: Seja (D, φ) um k -fluxo modular parcial em G . A prova será por indução no desvio do equilíbrio de (D, φ) .

Se o desvio do equilíbrio de (D, φ) é zero, então, pela Proposição 2.13, (D, φ) é também um k -fluxo parcial.

Suponha, então, que o desvio do equilíbrio de (D, φ) é positivo. Neste caso, existe em G um vértice positivo u . Seja X o conjunto de todos os vértices atingíveis a partir de u , por caminhos orientados P , tais que $aP \subseteq S(D, \varphi)$. Por construção, $\delta^+ X \cap S(D, \varphi) = \emptyset$ e portanto $\varphi(X) \leq 0$. Como $u \in X$, pela Proposição 2.3 temos que existe um vértice negativo v em X . Revertendo as arestas do caminho P entre u e v , claramente temos, pela Proposição 2.14, que o fluxo líquido dos vértices internos de P permanecem inalterados. Além disso, os fluxos líquidos de u e v permanecem equilibrados módulo k . Entretanto, o fluxo líquido de u baixou de k com a k -reversão das arestas de P . Portanto, agora temos um k -fluxo modular parcial (D', φ') , com mesmo suporte de (D, φ) e cujo

desvio do equilíbrio é menor. Logo, por hipótese de indução, temos um k -fluxo parcial em G , com mesmo suporte que o k -fluxo modular parcial original. \square

Na seção 2.2 vimos que existe equivalência, num grafo planar, entre k -fluxos modulares e k -fluxos p -balanceados. Apresentaremos, agora, um resultado que expressa diretamente essa equivalência, sem a utilização de coloração de faces como passagem intermediária.

Teorema 2.15 *Seja G planar. Então, a todo k -fluxo modular em G , corresponde um k -fluxo p -balanceado, obtido pela k -reversão de algumas das arestas de G .*

Prova: Por indução no número de arestas de G .

Seja (D, φ) um k -fluxo modular em G .

O caso em que G não tem arestas é trivial.

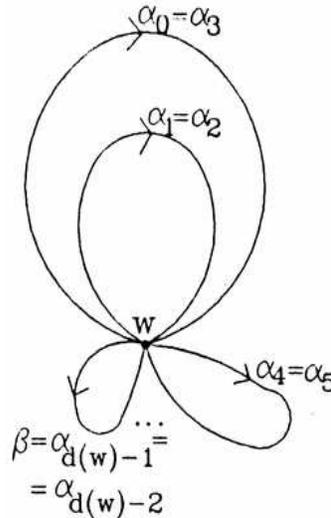


Figura 2.6: Ilustração do vértice w no caso em que G só contém laços.

Considere, inicialmente o caso em que G só contém laços. Seja w um vértice em G e β um laço incidente em w cujo “interior” não contenha outros laços (figura 2.6). Sejam p um desenho em G e

$$q := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(w)-3}, \alpha_{d(w)-2} = \beta, \alpha_{d(w)-1} = \beta)$$

uma rotação de p_w . Remova β de G obtendo G' . Claramente a restrição (D', φ') de (D, φ) a aG' é um k -fluxo modular. Seja p' o desenho que coincide com p em todos os vértices, exceto w , onde $p'_w = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(w)-3})$. Por hipótese de indução, existe uma k -reversão (E', λ') de (D', φ') que é p' -balanceada e portanto existe uma rotação $q' = (\alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d(w)-3}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})$ de p'_w que satisfaz (2.1). Definimos, então, a extensão (E, λ) de (E', λ') a aG , mantendo, para o laço β , a orientação dada por D e o peso dado por $\varphi(\beta)$. É claro que (E, λ) é um k -fluxo em G e também uma k -reversão de (D, φ) . Seja

$$\begin{aligned} q'' &:= (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(w)-1}) \\ &= (\alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d(w)-3}, \alpha_{d(w)-2} = \beta, \alpha_{d(w)-1} = \beta, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}) \end{aligned}$$

a rotação de p_w que coincide, à exceção do laço β , com q' . Se (E, λ) não é p -balanceado, então,

$$\sum_{i=0}^{d(w)-2-l} s(\beta_i) \lambda(\beta_i) = \sum_{i=l}^{d(w)-2} s(\alpha_i) \lambda(\alpha_i) \quad (2.13)$$

é menor que 0 ou maior que $k - 1$. Mas, neste caso, k -revertendo β temos um k -fluxo p -balanceado em G . É fácil notar que $d(w) - 2 - l$ é o único ponto que necessita ser analisado no lado esquerdo da equação (2.13).

Considere, agora, o caso em que G tem pelo menos uma aresta de ligação, digamos β_0 , orientada de u para v (figura 2.7). Sejam p um desenho em G , $p_u := (\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d(u)-1})$ e $p_v := (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(v)-1})$. Contraia β_0 obtendo G' . Seja p' o desenho que coincide com p em todos os vértices, à exceção do vértice uv , resultante da coalizão de u e v , onde

$$p'_{uv} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d(u)-1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{d(v)-1}).$$

Pelo Corolário 2.7, a restrição (D', φ') de (D, φ) a aG' é um k -fluxo modular em G' . Por hipótese de indução, existe em G' uma k -reversão (E', λ') de (D', φ') que é p' -balanceada. Mas,

$$\sum_{i=1}^{d(v)-1} s_{E'}(\beta_i) \lambda'(\beta_i) \equiv \sum_{i=1}^{d(v)-1} s_D(\beta_i) \varphi(\beta_i) \equiv \varphi(\beta_0) \pmod{k}.$$

Entretanto, a somatória mais à esquerda é, em módulo, menor que k . Assim, seu valor é $\varphi(\beta_0)$ ou $\varphi(\beta_0) - k$. Definimos, então, a extensão (E, λ) de (E', λ') a aG , mantendo-se, no primeiro caso, o peso e a orientação de β_0 dados por (D, φ) e, no segundo caso, k -revertendo-se β_0 .

Obviamente, (E, λ) é uma k -reversão de (D, φ) e certamente é p -balanceada para todo vértice em $VG - \{u, v\}$. Seja então,

$$r := (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d(v)-1}) = (\beta_l, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{d(v)-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{l-1})$$

uma rotação de p_v e seja j no intervalo $0 \leq j < d(v)$. Como (E, λ) é um k -fluxo,

$$\left| \sum_{i=0}^j s_E(\rho_i) \lambda(\rho_i) \right| = \left| \sum_{j+1}^{d(v)-1} s_E(\rho_i) \lambda(\rho_i) \right|. \quad (2.14)$$

Entretanto, pela Proposição 2.9, sabemos que se $0 \leq j < d(v) - l$, como (E', λ') é p' -balanceado, o lado esquerdo de (2.14) é menor que k . Por outro lado, se $d(v) - l \leq j < d(v)$, o lado direito de (2.14) é também menor que k , por raciocínio similar. Assim, segue que (2.2) vale para toda rotação r e para todo j no intervalo $0 \leq j < d(v)$. Analogamente, fazemos o mesmo raciocínio para u , decorrendo o resultado. \square

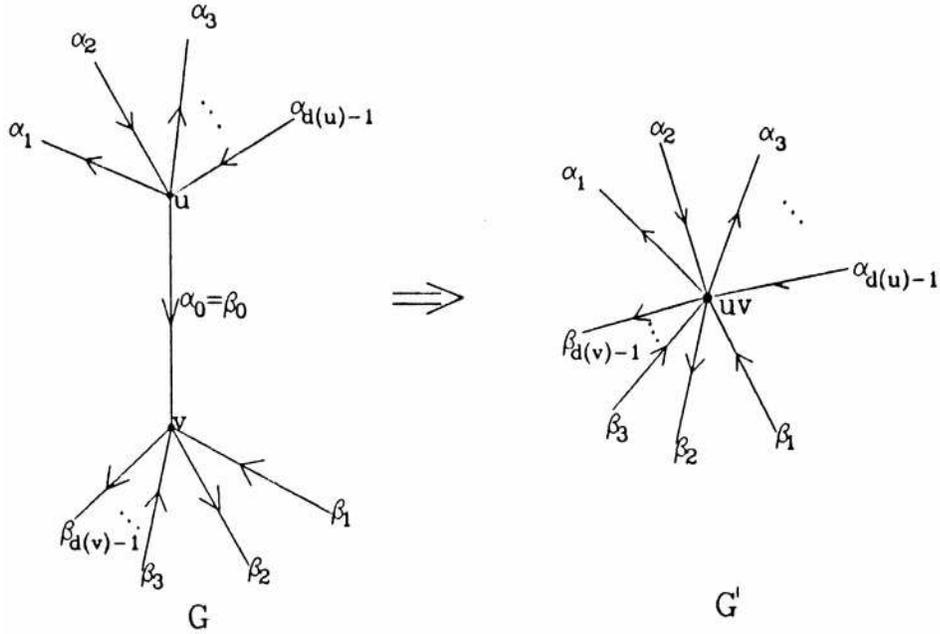


Figura 2.7: Ilustração do caso em que G tem uma aresta de ligação. Grafo antes e depois da contração de β_0 .

Capítulo 3

Reduções

Neste capítulo vamos desenvolver algumas reduções que simplificarão os grafos a serem considerados nas demonstrações dos capítulos subseqüentes.

As reduções que apresentaremos têm duas características importantes:

- sua aplicação diminui o tamanho do grafo, permitindo a utilização de hipótese de indução e a conseqüente obtenção de k -fluxo ($k = 3, 4$ ou 5 , conforme o caso);
- o k -fluxo assim obtido pode ser facilmente estendido ao grafo original.

Assim, se um grafo G possui uma propriedade que permita sua redução com relação a uma das três Conjeturas de Tutte, e G é um contra-exemplo para esta mesma conjetura, então certamente G não é um contra-exemplo mínimo.

Por exemplo, considere G com laços. Suponha que, se removermos os laços de G , o grafo G' assim obtido possui um k -fluxo. Então, um k -fluxo (D, φ) em G pode ser facilmente obtido fazendo $\varphi(\alpha) = 1$ para os laços removidos, adotando-se orientação arbitrária. Portanto, grafos com laços não são contra-exemplos mínimos para nenhuma das conjeturas. Logo, podemos limitar nossa análise aos grafos sem laços.

Além disso, convém observar que a contração de arestas não cria novos subgrafos contraíveis a Petersen e nem cria cortes novos, preservando, portanto, as hipóteses das Conjeturas de Tutte. A remoção de arestas, por outro lado, não cria subgrafos novos contraíveis a Petersen, mas pode criar cortes indesejáveis. Por isso, quando removermos arestas, far-se-á necessária a análise do surgimento de cortes que venham a invalidar a hipótese da conjetura em enfoque.

3.1 Reduções triviais

3.1.1 Redução a grafo 2-conexo

Redução 3.1 *Todo contra-exemplo mínimo para as Conjeturas de Tutte é 2-conexo.*

Prova: Suponha por absurdo que G é um contra-exemplo mínimo, não 2-conexo, das Conjeturas de Tutte. Assim, podemos considerar que G pode ser dividido em blocos. Sabemos que cada corte num bloco é um corte do grafo. Logo, cada bloco é livre de cortes proibidos pelas conjeturas. Além disso, toda contração de um bloco é uma contração do grafo original; assim, se o grafo original não é contraível ao grafo de Petersen, tampouco o são seus blocos. Portanto, cada bloco também satisfaz a hipótese da conjetura em questão. Como cada bloco de G não é um contra-exemplo, cada um deles possui um k -fluxo ($k = 3, 4$ ou 5). Entretanto, a união dos k -fluxos de cada bloco é um k -fluxo em G . Logo, G também não é um contra-exemplo mínimo. \square

3.1.2 Redução a grafo 3-aresta-conexo

Redução 3.2 *Todo contra-exemplo mínimo para as Conjeturas de Tutte é 3-aresta-conexo.*

Prova: Suponha por absurdo que G é um contra-exemplo mínimo para as Conjeturas de Tutte e G é não 3-aresta-conexo. Seja δX um 2-corte em G com arestas α e β . Contraia α obtendo G' . Convém lembrar que contração de arestas preserva as hipóteses das conjeturas. Como G' não é um contra-exemplo, então possui um k -fluxo, ($k = 3, 4$ ou 5). Expand a α e atribua a ela mesmo peso de β e orientação oposta a β em relação a X , fazendo assim $\varphi(X) = 0$. Todos os vértices de G estão equilibrados, à exceção talvez dos extremos de α . Entretanto, pela Proposição 2.3, aplicada a X e a $VG \setminus X$, temos que estes extremos também estão equilibrados e portanto G tem um k -fluxo, contradição. \square

3.2 Outras Reduções

Apresentaremos agora algumas definições e resultados a serem utilizados nas demonstrações de futuras reduções.

Dados dois conjuntos de vértices X e Y , definimos $\lambda(X, Y)$ como o conjunto de arestas com um extremo em X e outro em Y .

Para $X \subseteq VG$, denotamos por \overline{X} o complemento de X em relação a VG .

Chamamos as quatro interseções de cada um dos conjuntos X e \overline{X} com cada um dos conjuntos Y e \overline{Y} de *quadrantes de X e Y* .

Dizemos que X e Y se *cruzam* se todos os seus quadrantes forem não nulos.

Proposição 3.3 *Sejam X e Y dois conjuntos de vértices. Então, a seguinte equação é válida:*

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})| + 2|\lambda(X \cap \overline{Y}, \overline{X} \cap Y)| = |\delta X| + |\delta Y|.$$

Corolário 3.4 *Se $|\delta X| \equiv |\delta Y| \pmod{2}$, então $|\delta(X \cap Y)| \equiv |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})| \pmod{2}$.*

Corolário 3.5 *Se $|\delta Z| \equiv 1 \pmod{2}$, então para toda partição $\{X, Y\}$ de Z , $|\delta X|$ e $|\delta Y|$ têm paridades opostas.*

Lema 3.6 *Sejam X e Y dois conjuntos de vértices que se cruzam num grafo conexo G . Se δX e δY são ambos 3-cortes, então para um dos quadrantes W de X e Y , δW é um 2-corte.*

Prova: Pelo Corolário 3.5, com Y no papel de Z , $|\delta(X \cap Y)| \not\equiv |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})|$. Ajuste a notação, trocando X por \overline{X} se necessário, de tal forma que $|\delta(X \cap Y)|$ seja par. Pelo Corolário 3.4 temos que $|\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})|$ também é par. Mas, pela Proposição 3.3, concluímos que

$$\min\{|\delta(X \cap Y)|, |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})|\} \leq \max\{|\delta X|, |\delta Y|\} = 3.$$

Logo, o menor deles é um 2-corte, já que os conjuntos X e Y se cruzam e G é conexo. \square

3.2.1 Redução a grafo com cintura grande

A *cintura* de um grafo é o comprimento de um circuito de comprimento mínimo.

Redução 3.7 *Todo contra-exemplo mínimo para as Conjeturas dos k -fluxos ($k = 3, 4$ ou 5) tem cintura $\gamma \geq k$.*

Prova: Seja G um contra-exemplo mínimo para as Conjeturas dos k -fluxos e suponha, por absurdo, que existe em G um circuito C de tamanho menor que k . Contraia todas as arestas de C , obtendo um novo grafo G' . Como G' não é um contra-exemplo, então possui um k -fluxo e portanto um k -fluxo modular também. Pelo Corolário 2.8, temos em G um k -fluxo modular parcial (D, φ) , com C um circuito orientado e tal que $S(D, \varphi) \supseteq aG \setminus aC$. Como o número de arestas no circuito é menor que k , claramente existe um peso i no intervalo de 0 a $k - 1$ que não comparece nas arestas de C . Subtraia, módulo k , o valor i do peso de cada aresta em C . Com esta operação, os vértices continuam equilibrados módulo k e todas as arestas têm pesos no intervalo de 1 a $k - 1$. Logo, G tem um k -fluxo modular e portanto, pelo Corolário 2.12, tem um k -fluxo, contradição. \square

Redução 3.8 *Todo contra-exemplo mínimo para as Conjeturas dos k -fluxos ($k = 4$ ou 5), tem cintura γ dada por:*

- (i) $\gamma \geq 5$, se $k = 4$;
- (ii) $\gamma \geq 7$, se $k = 5$.

Para provarmos esta redução, necessitamos inicialmente do Lema 3.9, demonstrado a seguir.

Dado um circuito $C = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_{n-1}, \alpha_{n-1}, v_n = v_0)$ dizemos que as arestas α_i e $\alpha_{(i+2) \bmod n}$, $0 \leq i \leq n - 1$, são *quase adjacentes*.

Lema 3.9 *Se G não tem 1-cortes e possui um circuito C com l arestas, $l \geq 4$, então ou é possível remover duas arestas quase adjacentes sem gerar 1-cortes ou C inclui um 2-corte.*

Prova: Seja $C = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_{n-1}, \alpha_{n-1}, v_n = v_0)$, $n \geq 4$. Tomemos duas arestas quase adjacentes em C , digamos α_0 e α_2 . Suponha que não possamos removê-las, pois o novo grafo assim obtido teria um 1-corte δX . Em G , $\{\alpha_0, \alpha_2\} \cap \delta X \neq \emptyset$, pois G não tem 1-cortes. Assim, $|\delta X| \leq 3$, com igualdade somente se $\{\alpha_0, \alpha_2\} \subseteq \delta X$. Por outro lado, a interseção de cortes com circuitos é sempre par e portanto $|\delta C \cap \delta X| = 2$. Se precisamente uma dentre α_0 e α_2 pertence a δX , então $\delta X \subseteq C$ e neste caso $|\delta X| = 2$: C inclui um 2-corte.

Podemos portanto supor que ambas as arestas α_0 e α_2 pertencem a δX , $|\delta X| = 3$ e α_0 e α_2 são as únicas arestas de δX em C . Tomemos agora duas outras arestas quase adjacentes, α_1 e α_3 , para a remoção. Se também não for possível removê-las, por raciocínio análogo, temos um outro 3-corte δY , tal que α_1 e α_3 são as únicas arestas de δY em C . Sem perda de generalidade, podemos supor que v_0 e v_3 pertencem a X , v_1 e v_2 não pertencem a X ; analogamente, podemos supor que v_0 e v_1 pertencem a Y e v_2 e v_3 não pertencem a Y . Logo, X e Y se cruzam. Pelo Lema 3.6, G tem um 2-corte que é composto de duas das arestas de $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Portanto, C inclui um 2-corte. \square

Agora estamos em condições de provar a Redução 3.8, anteriormente citada.

Prova: Vamos inicialmente mostrar que G cintura $\gamma \geq k + 1$.

Suponha por absurdo que $\gamma < k + 1$. Pela Redução 3.7, existe em G um circuito $C = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_{k-1}, \alpha_{k-1}, v_k = v_0)$. Pela Redução 3.2, G é 3-aresta-conexo e portanto livre de 2-cortes. Logo, pelo Lema 3.9, podemos remover duas arestas quase adjacentes, digamos α_0 e α_2 , sem gerar 1-cortes, obtendo assim o grafo G' . Como G' não é um contra-exemplo para CJ_k , então G' possui um k -fluxo modular (D', φ') . Seja (D'', φ'') a extensão de (D', φ') a aG fazendo $\varphi''(\alpha_0) = \varphi''(\alpha_2) = 0$ e orientando α_0 e α_2 arbitrariamente. Claramente (D'', φ'') é um k -fluxo modular parcial em G . Mas, pela Proposição 2.14, existe uma k -reversão (D, φ) de (D'', φ'') que torna C um circuito orientado. Assim, como duas das arestas têm peso zero, existe um peso i no intervalo de 0 a $k - 1$ que não comparece nas demais arestas de C . Subtraindo, módulo k , o valor i do peso das arestas de C , chegamos a um k -fluxo modular em G , contradição. De fato, $\gamma \geq k + 1$.

Com este resultado provamos o limite de cintura estabelecido para CJ_4 e obtemos $\gamma \geq 6$ para CJ_5 . Estenderemos este último limite a 7, por absurdo.

Seja $C = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, v_5, \alpha_5, v_6 = v_0)$ um circuito em G . Como G é 3-aresta-conexo, portanto, pelo Lema 3.9, podemos remover duas arestas quase adjacentes, digamos α_0 e α_2 , obtendo assim o grafo G_1 . Adicione a G_1 uma aresta ρ ligando v_0 a v_3 , formando um circuito K de tamanho quatro e obtendo um novo grafo G_2 (figura 3.1). O grafo G_2 é livre de 1-cortes, pois a aresta ρ faz parte de um circuito.

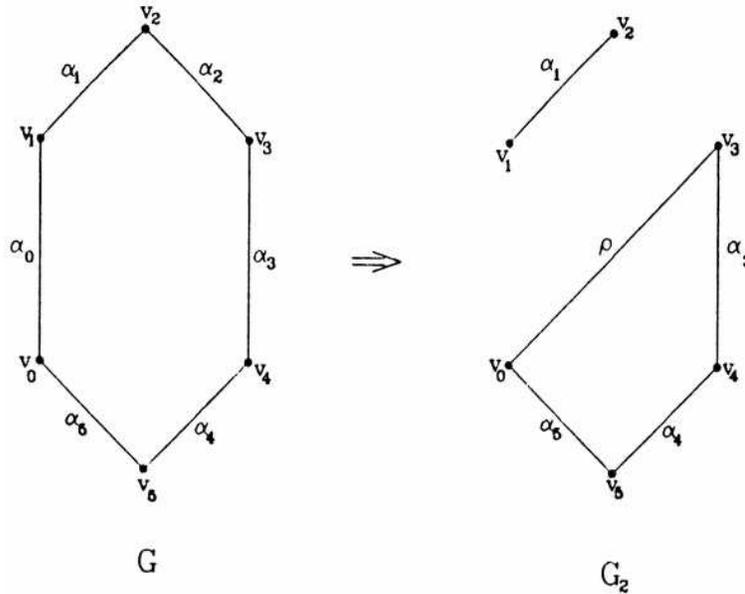


Figura 3.1: Circuito C antes e depois da remoção de α_0 e α_2 .

Proposição 3.10 *Existe um 5-fluxo modular parcial em G_2 cujo suporte inclui $aG_2 \setminus aK$, onde K é um circuito orientado e duas de suas arestas têm o mesmo peso.*

Prova: Pelo Lema 3.9, podemos considerar dois casos para G_2 :

Caso 1: Podemos remover duas arestas de K sem gerar 1-cortes.

Neste caso, seja G_3 o grafo obtido a partir de G_2 pela remoção de duas arestas de K . Assim, G_3 não possui 1-cortes e também não é contra-exemplo para CJ_5 . Portanto, G_3 tem um 5-fluxo modular e conseqüentemente, G_2 tem um 5-fluxo modular parcial (D, φ) , com duas das arestas de K de peso zero e com $aG_2 \setminus aK \subseteq S(D, \varphi)$. Além disso, pela Proposição 2.14, existe uma k -reversão de (D, φ) , que torna K orientado.

Caso 2: K inclui um 2-corte.

Neste caso, contraia uma das arestas do 2-corte obtendo G_4 . O grafo G_4 é obviamente livre de 1-cortes. Como G_4 não é contra-exemplo para CJ_5 , possui um 5-fluxo modular, o qual pode ser facilmente estendido a G_2 , por raciocínio análogo à Redução 3.2. Assim, as arestas do 2-corte, em G_2 , têm mesmo peso e orientações opostas. Além disso, podemos k -reverter, se necessário, as demais arestas de K de forma que K fique orientado. \square

Com base na Proposição 3.10 obtemos, então, um novo 5-fluxo modular parcial (D'', φ'') em G_2 , adicionando uma constante, módulo k , ao peso das arestas de K de forma que o peso de ρ torne-se zero. Além disso, k -reverta α_1 , se necessário, de forma que o sentido de sua orientação coincida com o das arestas de K .

Então, a restrição (D', φ') de (D'', φ'') a aG_1 é um 5-fluxo modular parcial em G_1 , cujo suporte inclui $aG_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. Seja, portanto, (D, φ) a extensão de (D', φ') a aG , fazendo $\varphi(\alpha_0) = \varphi(\alpha_2) = 0$ e orientando α_0 e α_2 no mesmo sentido das demais arestas de C . Claramente (D, φ) é um 5-fluxo modular parcial, cujo suporte inclui $aG \setminus aC$, com C um circuito orientado. Além disso, se uma das arestas de pesos iguais em G_2 era ρ , C tem agora três arestas de peso zero. Caso contrário, duas de suas arestas têm peso zero e outras duas pesos iguais.

Assim, existe um peso i no intervalo de 0 a 4 que não comparece nas arestas de C . Subtraindo, módulo k , o valor i do peso de cada aresta de C , temos um 5-fluxo modular em G , contradição. \square

3.2.2 Redução a grafo regular

Nesta secção vamos apenas considerar as conjecturas CJ_3 e CJ_5 e iremos demonstrar que basta considerar grafos 5-regulares para a primeira e 3-regulares para a segunda.

Sejam α e β duas arestas de G , $\{u, v\}$ e $\{u, w\}$, respectivamente, seus extremos. Seja $H := G - \{\alpha, \beta\} + \{\alpha\beta\}$, onde $\alpha\beta$ é uma nova aresta, cujos extremos são v e w : H é o grafo obtido a partir de G pela *junção* de α e β (figura 3.2).

Proposição 3.11 *A todo k -fluxo modular parcial em H corresponde um k -fluxo modular parcial em G .*

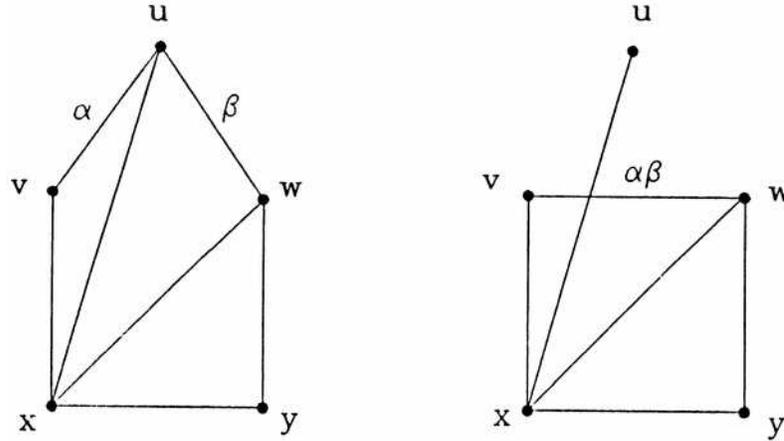


Figura 3.2: Grafo antes e depois da junção de α e β .

Proposição 3.12 *Sejam α e β duas arestas incidentes em um vértice v de G e seja $X \subseteq VG$. Seja também H o grafo obtido a partir de G , fazendo-se a junção de α e β . Se G é livre de l -cortes, então para todo l -corte δX de H , o conjunto $\delta X \cup \{\alpha, \beta\}$ é um $(l+2)$ -corte em G .*

Prova: Sejam $\{v, a\}$ e $\{v, b\}$ os extremos de α e β , respectivamente. Seja também $\delta_H X$ um l -corte em H . Então, podemos supor que no máximo um dos vértices dentre a, b e v pertence ao conjunto X , complementando X se for o caso. Entretanto, se nenhum desses vértices pertence a X , então $\delta_G X$ é um l -corte, contradição. Portanto, $|X \cap \{a, b, v\}| = 1$. Se ou a ou b pertence a X , então $|\delta_H X| = |\delta_G X|$, contradição. Logo, de fato, $v \in X$ e $\delta_G X = \{\alpha, \beta\} \cup \delta_H X$. \square

O objetivo das duas demonstrações a seguir é mostrar que para grafos não m -regulares ($m = 3$ para a CJ_5 ou $m = 5$ para a CJ_3), é sempre possível realizar a operação de junção em duas arestas incidentes num de seus vértices, cujo grau seja distinto de m , sem contudo contrariar a hipótese da conjectura em questão. Dessa forma obtemos um grafo com menor número de arestas, que admite um k -fluxo; pela Proposição 3.11, existe um k -fluxo para o grafo original. Portanto, este último não se constitui num contra-exemplo mínimo para a conjectura considerada.

Redução 3.13 *Todo contra-exemplo mínimo para CJ_5 é 3-regular.*

Prova: Seja G um contra-exemplo mínimo e suponha por absurdo que exista um $v \in VG$ tal que $d(v) \neq 3$. Pelas Reduções 3.1 e 3.2, podemos considerar que G é 2-conexo e 3-aresta-conexo. Assim, $d(v) \geq 4$. Sejam α e β duas arestas de δv , $\{v, a\}$ e $\{v, b\}$, respectivamente, seus extremos. Seja H o grafo obtido a partir de G pela junção de α e β . Se H for livre de 1-cortes, então H admite um 5-fluxo; neste caso, pela Proposição 3.11, G também, contradição. Podemos então supor que H tem um 1-corte. Pela Proposição 3.12, existe um 3-corte δX em G , contendo α e β . Seja ρ uma outra aresta de δv , $\{v, r\}$ seus extremos. Seja R o grafo obtido a partir de G pela junção de ρ e β . Novamente, podemos supor que R tem um 1-corte e portanto G tem um 3-corte, δY , contendo β e ρ . Se $\alpha \in \delta Y$, então $\delta Y \subset \delta v$, pois $d(v) \geq 4$; nesse caso v é um vértice de corte, contrariando a suposição de 2-conexidade. Logo, $\alpha \notin \delta Y$. Analogamente, $\rho \notin \delta X$. Complementando X e(ou) Y se necessário, adote que $v \in X \cap Y$. Assim, temos que $a \in \overline{X} \cap Y, b \in \overline{X} \cap \overline{Y}$ e $r \in X \cap \overline{Y}$ (figura 3.3).

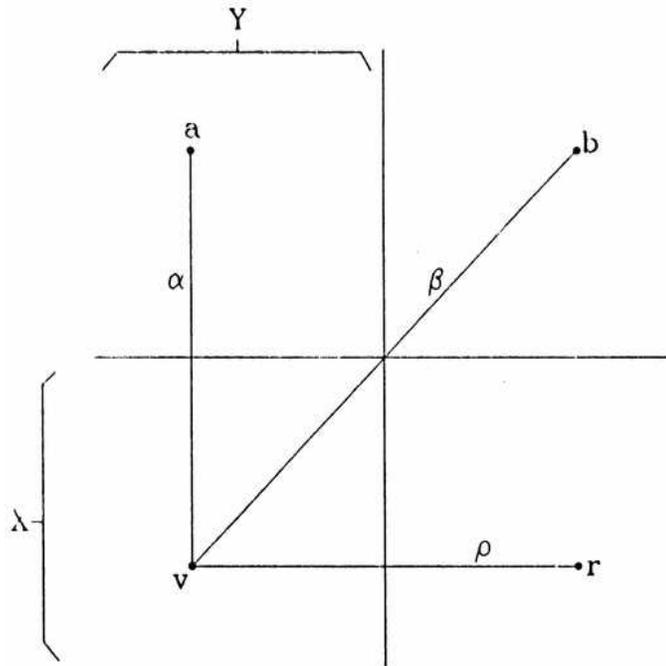


Figura 3.3: Disposição das arestas α , β e ρ nos corte δX e δY .

Logo, X e Y se cruzam e pelo Lema 3.6, existe um 2-corte em G , contrariando

a 3-aresta-conexidade. Portanto, ou H ou R é livre de 1-cortes. Logo, G admite um 5-fluxo, contradição. \square

Observação: Em princípio, poder-se-ia pensar numa redução para a CJ_4 análoga à Redução 3.13. Entretanto, não sabemos se é possível fazer uma junção de arestas evitando que o novo grafo tenha subgrafos contraíveis ao grafo de Petersen.

Redução 3.14 *Todo contra-exemplo mínimo para CJ_3 é 5-regular.*

Prova: A demonstração é em parte análoga à anterior. Seja G um contra-exemplo mínimo e seja $v \in VG$ tal que $d(v) \neq 5$. Suponha, por absurdo, que não seja possível fazer a operação de junção em arestas incidentes em v , pois contrariaria as hipóteses da CJ_3 . Pela Redução 3.2, podemos considerar que G é 3-aresta-conexo. Mas, por hipótese, não existem 3-cortes em G . Logo, podemos supor que G é 4-aresta-conexo. Portanto, $d(v) = 4$ ou $d(v) \geq 6$.

Seja X a coleção dos subconjuntos x de δv tal que exista um 5-corte $\delta(Y_x)$ com $x \subseteq \delta(Y_x)$. Tome x maximal em X . Se $x = \delta v$, então $\delta v \subset \delta(Y_x)$ pois $|\delta v| \neq 5$. Assim, necessariamente $d(v) = 4$. Entretanto, neste caso, $\delta(Y_x) \setminus \delta v$ é um 1-corte, contradição. Logo, podemos supor $x \subset \delta v$.

Seja, então, $\alpha \in \delta v \setminus x$; seja $\beta \in x$, se $x \neq \emptyset$ ou $\beta \in \delta v - \alpha$, caso contrário. Pela hipótese de absurdo, não podemos fazer a junção de α e β ; pela Proposição 3.12, existe um 5-corte, $\delta(Y_{\alpha\beta})$, contendo α e β . Assim, $\{\alpha, \beta\} \in X$. Pela maximalidade de x , $x \neq \emptyset$. Portanto, de fato $\beta \in x$. Entretanto, novamente pela maximalidade de x , temos que existe uma aresta ρ tal que $\rho \in \delta(Y_x)$ e $\rho \notin \delta(Y_{\alpha\beta})$, (figura 3.4).

Por raciocínio análogo à demonstração anterior, os conjuntos de vértices Y_x e $Y_{\alpha\beta}$ se cruzam, com a aresta β ligando $Y_x \cap Y_{\alpha\beta}$ a $\overline{Y}_x \cap \overline{Y}_{\alpha\beta}$. Então, pelo Lema 3.15, enunciado a seguir, $|\delta(Y_x \cap Y_{\alpha\beta})| = 5$. Além disso, $\delta(Y_x \cap Y_{\alpha\beta})$ inclui os conjuntos $\delta(Y_x) \cap \delta v$ e $\delta(Y_{\alpha\beta}) \cap \delta v$. Portanto, $x \cup \{\alpha\} \in X$, contrariando assim a maximalidade de x .

Lema 3.15 *Seja G 4-aresta-conexo e sejam X e Y dois conjuntos de vértices que se cruzam. Se δX e δY são ambos 5-cortes com uma aresta ligando $X \cap Y$ a $\overline{X} \cap \overline{Y}$, então $\delta(X \cap Y)$ e $\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})$ são também 5-cortes em G .*

Prova: Pela Proposição 3.3, tomando \overline{X} no lugar de X , temos

$$|\delta(\overline{X} \cap Y)| + |\delta(X \cap \overline{Y})| \leq 8.$$

Mas, G é 4-aresta-conexo, portanto $|\delta(\overline{X} \cap Y)| = 4 = |\delta(X \cap \overline{Y})|$. Pelos Corolários 3.5 e 3.4, $|\delta(X \cap Y)|$ e $|\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})|$ são ambos ímpares. De novo pela 4-aresta-conexidade de G , temos que

$$|\delta(X \cap Y)| \geq 5 \text{ e } |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})| \geq 5. \quad (3.1)$$

Entretanto, pela Proposição 3.3 decorre que

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})| \leq 10.$$

Deste seguem as igualdades em (3.1). $\square \square$

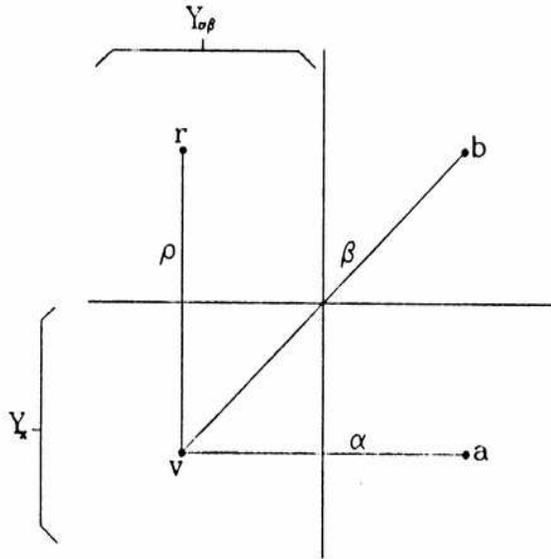


Figura 3.4: Disposição das arestas α, β e ρ nos cortes $\delta(Y_x)$ e $\delta(Y_{\alpha\beta})$.

3.3 Implicação da Conjetura dos 3-fluxos no Teorema dos 6-fluxos

Nesta secção demonstraremos o Teorema dos 6-fluxos, levando-se em conta a validade da CJ_3 .

Valendo-nos do raciocínio da Redução 3.2, podemos considerar que G é 3-aresta-conexo e por raciocínio análogo à Redução 3.13, podemos supor, também,

que G é 3-regular.

Redução 3.16 *Na hipótese da validade de CJ_3 , todo grafo cúbico e 3-aresta-conexo admite um 6-fluxo.*

Prova: Seja α uma aresta em aG . Pelo Corolário 3.19, enunciado a seguir, temos que G possui um emparelhamento perfeito t que contém α e não inclui nenhum 3-corte de G .

Contraia inicialmente \bar{t} , complemento de t em relação às arestas de G , obtendo um novo grafo G' sem 1-cortes nem 3-cortes. Supondo a validade de CJ_3 , temos um 3-fluxo modular para G' . Pelo Corolário 2.8, G tem um 3-fluxo modular parcial cujo suporte inclui t e pelo Teorema 2.11, G tem um 3-fluxo parcial (D', φ') com este mesmo suporte.

Por outro lado, $G[\bar{t}]$ é Euleriano e portanto G admite um 2-fluxo parcial (D'', φ'') , cujo suporte é \bar{t} .

Assim, pelas Proposições 2.2 e 2.1, $(D', \varphi') + 3 \cdot (D'', \varphi'')$ é um 6-fluxo em G , já que toda aresta de G está na união dos suportes de (D', φ') e (D'', φ'') .

Para $\forall X \subseteq VG$ chamamos de $\mathcal{I}(G - X)$ o conjunto de componentes ímpares de $G - X$. Uma componente é dita *ímpar* se ela possui um número ímpar de vértices.

Teorema 3.17 (Tutte) *O grafo G tem um emparelhamento perfeito se e somente se $\forall X \subset VG$, $|\mathcal{I}(G - X)| \leq |X|$ ([Tut 1947], veja também [BM 1976, pg. 76]).*

Corolário 3.18 *Seja G cúbico, 2-aresta-conexo e seja $\alpha \in aG$. Então, existe um emparelhamento perfeito t em G , contendo α .*

Prova: Seja $\alpha \in aG$ com extremos u e v . Seja $H := G - \{u, v\}$. Vamos mostrar que H contém um emparelhamento perfeito t_H e portanto $t_H + \alpha$ é um emparelhamento perfeito em G que contém α .

Sejam $X \subseteq VH$, $Y := X \cup \{u, v\}$ e $K \in \mathcal{I}(G - Y)$. Seja também n , o número de arestas em G entre $\mathcal{I}(G - Y)$ e Y . Como G é cúbico, $\delta(VK)$ é ímpar e portanto $|\delta(VK)| \geq 3$. Claramente, $n \geq 3 \cdot |\mathcal{I}(G - Y)|$. Por outro lado, α tem dois extremos em Y e portanto, $n \leq 3 \cdot |Y| - 2$, donde concluímos que $|\mathcal{I}(G - Y)| < |Y|$. Além disso, como $|VG|$ é par, temos que $|\mathcal{I}(G - Y)|$ e $|Y|$ têm a mesma paridade e portanto, $|\mathcal{I}(G - Y)| \leq |Y| - 2$. Mas, $|\mathcal{I}(H - X)| = |\mathcal{I}(G - Y)| \leq |Y| - 2 = |X|$. Portanto, pelo Teorema

3.17, existe um emparelhamento perfeito t_H . \square

Para $X \subseteq VG$, dizemos que um corte δX , não nulo, é *separador* se $|aG[X]| \geq 1$ e $|aG[\overline{X}]| \geq 1$.

Corolário 3.19 *Seja G 3-aresta-conexo, cúbico e seja $\alpha \in aG$. Então, existe em G um emparelhamento perfeito t que contém α e não inclui nenhum 3-corte de G .*

Prova: Por indução no número de arestas de G . Suponha inicialmente que G inclui somente 3-cortes não separadores. Pelo Corolário 3.18, já sabemos que G possui um emparelhamento perfeito t contendo α . Como t só cobre uma das arestas de cada vértice, então t não inclui nenhum 3-corte de G .

Suponha, agora, que G inclui um 3-corte separador, δX e sem perda de generalidade, suponha que $\alpha \in \delta X \cup aG[X]$. Contraia todas as arestas de $aG[\overline{X}]$ obtendo o grafo G' . Por hipótese de indução, G' tem um emparelhamento perfeito t' que contém α e não inclui nenhum 3-corte de G' . Logo, uma das arestas, digamos α' , incidente no vértice resultante da contração de $aG[\overline{X}]$, está coberta por t' . Coloque α' no papel de α e agora aplique o mesmo raciocínio para G'' , o grafo obtido a partir de G contraindo $aG[X]$ ao invés de $aG[\overline{X}]$. Encontramos, assim, um emparelhamento perfeito t'' em G'' que contém α' e não inclui nenhum 3-corte de G'' . Convém lembrar aqui que G é 3-aresta-conexo e pelo Lema 3.6, sabemos que não há cruzamentos entre conjuntos de vértices de dois 3-cortes de G . Logo, unindo t' e t'' , temos um emparelhamento perfeito t em G que contém α e que não inclui nenhum 3-corte. $\square \square$

Capítulo 4

Resultados sobre a Conjetura dos 5-fluxos

Na secção 1.2 vimos que existe uma correlação entre k -colorações de faces num grafo planar e k -fluxos. Assim, o Teorema das Cinco Cores nos dá uma demonstração da CJ_5 para o caso planar:

Teorema 4.1 (das cinco cores) *Todo grafo planar sem arestas de corte é 5-colorável.*

Neste capítulo iremos demonstrar o Teorema dos 8-fluxos [Jae 1979] e o Teorema dos 6-fluxos [Sey 1981], ambos para grafos sem arestas de corte. Daremos também uma demonstração do Teorema dos 5-fluxos para grafos planares e sem arestas de corte, sem usar a fórmula de Euler [You 1983]. Além disso, demonstraremos o Teorema dos 5-fluxos para grafos de gênero baixo e sem arestas de corte [MCB 1988], valendo-nos fortemente do uso da fórmula de Euler.

4.1 Teorema dos 8-fluxos

Nesta secção demonstraremos que todo grafo sem aresta de corte admite um 8-fluxo [Jae 1979].

Uma *partição* \mathcal{P} de G é um conjunto de n subgrafos B_1, B_2, \dots, B_n , dois a dois disjuntos, tal que $VG = VB_1 \cup VB_2 \cup \dots \cup VB_n$.

Para qualquer partição \mathcal{P} de G , denotamos por $a(\mathcal{P})$ o conjunto de arestas com os extremos em elementos distintos de \mathcal{P} .

Teorema 4.2 (Nash-Williams) *Para todo grafo G conexo com pelo menos dois vértices e toda coleção disjunta máxima T^* de árvores geradoras, tem-se*

$$|T^*| = \min \left\lfloor \frac{|a(\mathcal{P})|}{|\mathcal{P}| - 1} \right\rfloor, \quad (4.1)$$

onde o mínimo é tomado sobre todas as partições \mathcal{P} de VG com dois ou mais blocos [NW 1961]; veja também [FL 1988, pg. 77].

Uma coleção A de árvores geradoras em um grafo G é dita m -disjunta, $m \geq 1$, se toda aresta em aG pertence a no máximo m árvores de A . Para $m = 1$, dizemos simplesmente que a coleção é *disjunta*.

Lema 4.3 *Seja G um grafo k -aresta-conexo e l um inteiro positivo. O grafo G admite uma coleção l -disjunta de $\lfloor kl/2 \rfloor$ árvores geradoras.*

Prova: Seja G' o grafo obtido a partir de G pela substituição de cada aresta por l cópias. Claramente G' é kl -aresta-conexo. Seja \mathcal{P} uma partição de G com n blocos, $n \geq 2$. Em G' , $|a(\mathcal{P})| \geq kln/2$. Assim pelo Teorema 4.2, decorre que G' tem pelo menos $\lfloor kl/2 \rfloor$ árvores geradoras, duas a duas disjuntas. Portanto, G tem uma coleção l -disjunta com pelo menos $\lfloor kl/2 \rfloor$ árvores. \square

Lema 4.4 *Seja T uma árvore geradora de um grafo G . Então existe um 2-fluxo parcial (D, φ) , cujo suporte inclui $aG \setminus aT$.*

Prova: Para cada aresta α de $aG \setminus aT$, existe em T um (único) caminho ligando os extremos de α . Assim, existe em G um circuito C_α com apenas a aresta α em $aG \setminus aT$. Orientando o circuito C_α , obtemos um 2-fluxo parcial, $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$, cujo suporte contém α . Somando, módulo 2, todos os fluxos $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$, para cada aresta $\alpha \in aG \setminus aT$, obtemos um 2-fluxo modular parcial cujo suporte inclui $aG \setminus aT$. Pelo Teorema 2.11, G admite um 2-fluxo parcial, (D, φ) , cujo suporte inclui $aG \setminus aT$. \square

Teorema 4.5 (Jaeger) *Todo grafo sem arestas de corte admite um 8-fluxo.*

Prova: Seja G um grafo sem arestas de corte. Por raciocínio análogo à Redução 3.2 podemos considerar que G é 3-aresta-conexo. Pelo Lema 4.3 temos, em G , uma coleção 2-disjunta de três árvores geradoras T_1 , T_2 e T_3 . Pelo Lema 4.4, existem em G três 2-fluxos parciais (D_i, φ_i) cujos suportes incluem $aG \setminus aT_i$, ($i = 1, 2, 3$).

Considere $(D, \varphi) := (D_1, \varphi_1) + 2 \cdot (D_2, \varphi_2) + 4 \cdot (D_3, \varphi_3)$. Pela Proposições 2.1 e 2.2, (D, φ) é um 8-fluxo parcial em G . Mas, como a coleção de árvores geradoras é 2-disjunta, toda aresta de G pertence à união dos suportes dos três 2-fluxos parciais. Logo, de fato, (D, φ) é um 8-fluxo em G . \square

4.2 Teorema dos 6-fluxos

Teorema 4.6 (Seymour) *Todo grafo sem arestas de corte admite um 6-fluxo* [Sey 1981].

Prova: Antes de provarmos o teorema introduziremos algumas definições.

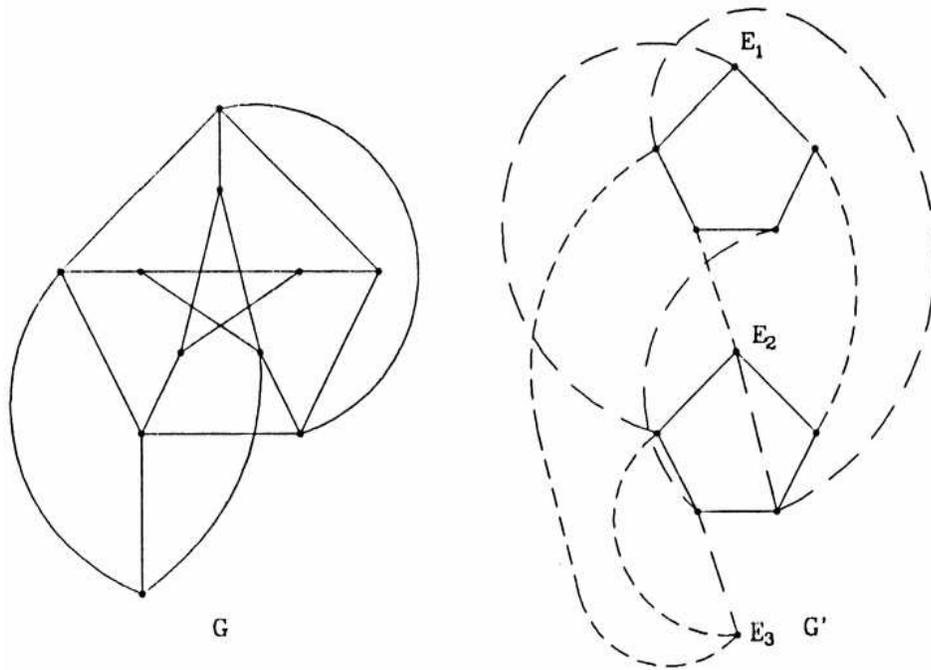


Figura 4.1: Um exemplo de um grafo G e uma decomposição de Seymour, G' , para G . As linhas cheias em G' representam os subgrafos Eulerianos e as linhas com traços menores, as arestas especiais.

Uma *decomposição parcial de Seymour* de um grafo G é uma seqüência $E := (E_1, E_2, \dots, E_r)$ de subgrafos de G , com as seguintes propriedades:

(i) para todo i , $2 \leq i \leq r$, existem pelo menos duas arestas, cujos extremos pertencem um a VE_i e o outro a $\bigcup_{j < i} VE_j$. Dentre estas arestas, escolhem-se duas, que chamaremos de *especiais*.

(ii) os subgrafos em E são conexos, Eulerianos e dois a dois disjuntos. Um grafo é *Euleriano* se todos os seus vértices têm grau par.

Uma *decomposição total de Seymour*, ou simplesmente *decomposição de Seymour*, de um grafo G , é uma decomposição parcial de Seymour em que $\bigcup VE_i = VG$ (figura 4.1).

Observe que a ordem dos subgrafos Eulerianos na seqüência E é importante. Se permutarmos E_2 com E_3 na figura 4.1, não teremos uma decomposição de Seymour, pois a propriedade (i) estará contrariada.

Dada uma decomposição de Seymour de um grafo G , define-se a *contração de Seymour* como o grafo obtido pela contração das arestas dos subgrafos Eulerianos presentes na decomposição de Seymour (figura 4.2).

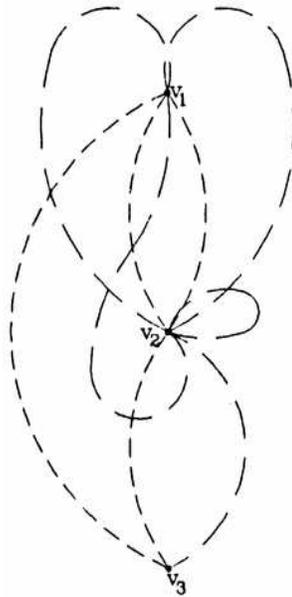


Figura 4.2: A contração de Seymour para o grafo da figura anterior. As linhas com traços menores representam as arestas especiais.

Um grafo é *de Seymour* se admite uma decomposição de Seymour em que os elementos da seqüência são grafos-vértice. É claro que toda contração de Seymour é um grafo de Seymour.

Seja G um grafo sem arestas de corte. A demonstração do Teorema inicia eliminando o caso em que G não é 3-aresta-conexo, por raciocínio análogo à Redução 3.2.

A seguir, dado que G é 3-aresta-conexo, demonstra-se, no Lema 4.8, que G tem uma decomposição de Seymour D . Seja S a contração de Seymour correspondente. No lema 4.7, demonstra-se que S admite um 3-fluxo modular.

Pelo Corolário 2.8, o grafo G admite um 3-fluxo modular parcial cujo suporte inclui $aG \setminus \bigcup aE_i$. Entretanto, pelo Teorema 2.11, temos um 3-fluxo parcial (D', φ') em G , de mesmo suporte.

Por outro lado, sabemos que também existe em G um 2-fluxo parcial (D'', φ'') , cujo suporte é $\bigcup aE_i$. Então, pelas Proposições 2.1 e 2.2 temos que $(D, \varphi) := (D', \varphi') + 3 \cdot (D'', \varphi'')$ é um 6-fluxo parcial em G . Mas, toda aresta de G está na união dos suportes dos dois fluxos parciais. Portanto, de fato, (D, φ) é um 6-fluxo em G .

A demonstração do Teorema está assim reduzida às demonstrações dos Lemas 4.7 e 4.8.

Lema 4.7 *Todo grafo de Seymour admite um 3-fluxo modular.*

Prova: Seja S um grafo de Seymour. Seja também $E := (E_1, E_2, \dots, E_r)$ uma decomposição de Seymour de S tal que para todo i , E_i é um grafo-vértice; seja v_i o seu vértice, sejam α'_i e α''_i as arestas especiais que ligam v_i a vértices anteriores. Obteremos um 3-fluxo modular (D, φ) para S tal que $\varphi = 1$.

Inicialmente, oriente arbitrariamente todas as arestas não especiais de S . A orientação de α'_i e α''_i será dada pela aplicação do algoritmo a seguir, onde o fluxo líquido de cada v_i é calculado no grafo $S - \{\alpha'_i, \alpha''_i\}$.

para $i := r$ descendo até 2 faça:

1. Se $\varphi(v_i) \equiv 0 \pmod{3}$, então oriente α'_i entrando em v_i e α''_i saindo de v_i ;
2. Se $\varphi(v_i) \equiv 1 \pmod{3}$, então oriente ambas, α'_i e α''_i , saindo de v_i ;
3. Se $\varphi(v_i) \equiv 2 \pmod{3}$, então oriente ambas, α'_i e α''_i , entrando em v_i .

Assim, após a orientação de α'_i e de α''_i vale que o conjunto $\{v_r, v_{r-1}, \dots, v_i\}$ está equilibrado módulo 3. Portanto, ao final do algoritmo todos os vértices, à exceção talvez de v_1 , estão equilibrados módulo 3. Mas, pelo Corolário 2.6, v_1 também o está, daí o resultado. \square

Lema 4.8 *Todo grafo 3-aresta-conexo admite uma decomposição de Seymour.*

Prova: Seja G um grafo 3-aresta-conexo e seja $E := (E_1, E_2, \dots, E_s)$, $s \geq 0$, uma decomposição parcial de Seymour de G , maximal. Mostraremos, por absurdo, que E é total. Suponha, pelo contrário, que $X := VG \setminus \bigcup VE_i$ é não vazio. Pela maximalidade de E , podemos supor que $s > 0$, pois caso contrário, podemos tomar um grafo-vértice como E_1 .

Seja $H := G[X]$ e seja \mathcal{Y} o conjunto dos Y tais que $\emptyset \neq Y \subseteq X$ e $|\delta_H Y| \leq 1$. É óbvio que $\mathcal{Y} \neq \emptyset$, pois $X \in \mathcal{Y}$. Seja pois Y um elemento minimal de \mathcal{Y} . Seja $z := \delta_G Y \cap \delta_G X$ e seja Z o conjunto dos extremos das arestas de z em Y (figura 4.3). Então,

$$|\delta_H Y| + |z| = |\delta_G Y|;$$

como G é 3-aresta-conexo, segue que $|z| \geq 2$.

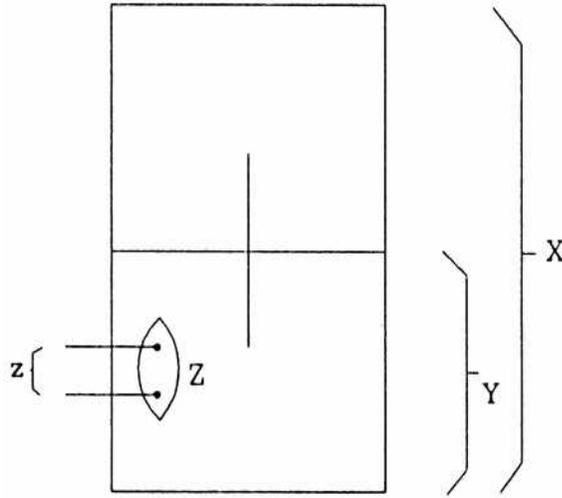


Figura 4.3: Um exemplo das disposições de X , Y e Z .

Assim, temos dois casos a considerar:

Caso 1: Z é unitário

Neste caso, seja v o único vértice de Z . Claramente todas as arestas de z incidem em v ; portanto, podemos fazer $E_{s+1} := G[v]$, contradizendo a maximalidade de E .

Caso 2: $|Z| > 1$

Neste caso, sejam u e v dois vértices de Z . Se existirem dois caminhos P_1 e P_2 de u a v em $G[Y]$, disjuntos nas arestas, então podemos fazer $E_{s+1} := G[VP_1 \cup VP_2]$, contradizendo a maximalidade de E .

Se tais caminhos não existirem, então, pelo Teorema de Menger [Men 1927] (veja também [BM 1976, pg. 204]), Y tem uma partição $\{Y', Y''\}$ tal que $v \in Y'$, $u \in Y''$ e $|\delta_{G[Y]}Y'| = |\delta_{G[Y]}Y''| \leq 1$ (figura 4.4).

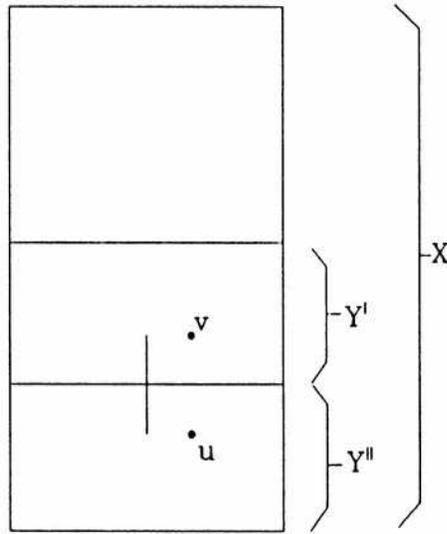


Figura 4.4: Um exemplo da disposição de Y' , Y'' e X .

Além disso, $|\delta_H Y| \leq 1$. Assim, ou $\delta_{G[Y]}Y' = \delta_H Y'$ ou $\delta_{G[Y]}Y'' = \delta_H Y''$. Portanto, um dentre Y' e Y'' pertence a \mathcal{Y} , contrariando a minimalidade de Y . $\square \square$

4.3 Teorema dos 5-fluxos para grafos planares

Como mencionamos na secção 1.2, existe uma correlação estrita entre k -fluxos e k -coloração de faces num grafo planar. Portanto, desde que o Teorema das Cinco Cores foi demonstrado por Heawood em 1890 [Hea 1890], o Teorema dos 5-fluxos também tem uma demonstração naturalmente imediata, a qual depende fortemente do uso da fórmula de Euler.

Nosso intuito ao apresentar a demonstração a seguir, é dar uma prova do Teorema dos 5-fluxos que use apenas conceitos de fluxos e independa do uso da fórmula de Euler, visando, assim, uma possibilidade de extensão do raciocínio exposto para casos mais gerais.

Convém ressaltar que uma primeira tentativa nesse sentido deve-se a Younger [You 1983], o qual, entretanto, ainda valeu-se parcialmente de argumentos de coloração de faces em grafos planares.

Teorema 4.9 (Younger) *Todo grafo planar e sem arestas de corte admite um 5-fluxo.*

Prova: Seja G planar e sem arestas de corte. Por raciocínio análogo às Reduções 3.2 e 3.13 podemos considerar que G é 3-aresta-conexo e 3-regular. Assim, fazendo um raciocínio análogo ao Lema 4.8, podemos encontrar uma decomposição S de Seymour de G . Seja $E := (E_1, E_2, \dots, E_r)$ a seqüência de subgrafos Eulerianos de S . Observe que como G é planar e 3-regular, cada elemento de E é um vértice ou um circuito. Entretanto, para provar este teorema, necessitamos ainda que a decomposição de Seymour encontrada tenha a característica de que cada E_i não contenha vértices em seu interior. (Cada E_i divide o plano em duas regiões, uma interior e outra exterior. A região exterior é aquela em que se encontra E_{i-1} . Para E_1 , a escolha entre interior e exterior é arbitrária.) Essa propriedade é garantida pela Proposição a seguir:

Proposição 4.10 *Seja C um circuito em G contendo dois vértices especificados u e v . Então, existe um circuito C' em G que não contém nenhum vértice no seu interior, que passa por u e v e que não contém nenhum vértice no exterior de C .*

Prova: Por indução no número de vértices no interior de C . Se C não contém nenhum vértice no seu interior então a prova está completa. Caso contrário, expresse C como a união de dois arcos A e B , com exatamente u e v como vértices comuns. Seja w um vértice no interior de C . Dado que G é 3-aresta-conexo, então existem três caminhos de w a vértices de C , dois a dois disjuntos nas arestas. Pela planaridade de G , podemos tomar os três caminhos de forma que nenhum deles passa por vértices no exterior de C . Como G é 3-regular, os três caminhos são dois a dois disjuntos nos vértices, exceto na origem w . Então, podemos considerar que pelo menos dois deles, P_1 e P_2 , têm seus terminos, r e s , no mesmo arco, digamos A . Substitua em C o segmento do arco A entre r e s pelos caminhos P_1 e P_2 , obtendo assim um novo circuito, com menos vértices no

seu interior do que C , que passa por u e v e não tem nenhum vértice no exterior de C . O resultado segue por indução. \square

Assim, para cada E_i , $1 \leq i \leq r$, seja X_i o subgrafo formado pelos vértices e arestas de E_i e pelas cordas possivelmente existentes no interior de E_i . Seja G' o grafo obtido a partir de G pela contração dos aX_i . Claramente G' é um grafo planar de Seymour. Pelo Lema 4.7, G' tem um 3-fluxo modular e pelo Teorema 2.15, um 3-fluxo p -balanceado. Entretanto, pelo Lema 4.11, G tem um 3-fluxo parcial (D, φ) cujo suporte inclui $aG \setminus \bigcup aX_i$ e onde as arestas de cada E_i encontram-se todas orientadas no sentido anti-horário.

Se contrairmos agora as arestas de E_i e as arestas no seu exterior, teremos um grafo planar G_i , com um vértice e n laços. Seja (D'_i, φ'_i) um 2-fluxo p_i -balanceado em G_i . Pelo Lema 4.11, existe, em X_i , um 2-fluxo parcial (D''_i, φ''_i) , cujo suporte inclui as cordas do interior de E_i e onde as arestas de E_i encontram-se todas orientadas no sentido anti-horário.

Finalmente, seja (F_i, λ_i) o 2-fluxo parcial cujo suporte são as arestas de E_i , todas orientadas no sentido anti-horário.

Assim, $(D, \varphi) + \sum_{i=1}^r (D''_i, \varphi''_i) + \sum_{i=1}^r (F_i, \lambda_i)$ é um 5-fluxo em G .

Lema 4.11 *Seja G um grafo planar e com grau dos vértices não excedendo 3. Sejam C uma face (circuito) de G , G' o grafo obtido a partir de G pela contração das arestas de C e (D', φ') um k -fluxo p -balanceado em G' . Então, existe um k -fluxo parcial (D, φ) cujo suporte inclui o de (D', φ') e tal que C é um circuito orientado por D no sentido anti-horário.*

Prova: Seja v o vértice de G resultante da contração das arestas de C . Por definição de fluxo balanceado, as arestas de G' incidentes em v podem ser enumeradas, no sentido horário, $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d(v)-1})$ de tal forma que

$$0 \leq \sum_{i=0}^j s(\beta_i) \varphi'(\beta_i) < k.$$

Seja C_j a secção de C entre os extremos de β_j e $\beta_{(j+1) \bmod d(v)}$, $0 \leq j < d(v)$, orientada no sentido anti-horário. Obtenha a extensão φ de φ' atribuindo a cada aresta de C_j o valor $\sum_{i=0}^j s(\beta_i) \varphi'(\beta_i)$. $\square \square$

4.4 Teorema dos 5-fluxos para grafos em superfícies de gênero baixo

Nesta secção vamos considerar superfícies fechadas, orientadas e não-orientadas.

Dizemos que uma superfície é *fechada* se ela não possui fronteiras nem bordos. Como exemplos de superfícies fechadas e não fechadas podemos citar a esfera e a fita de Möbius, respectivamente.

Uma superfície é dita *orientada* se ela não contém uma fita de Möbius e *não-orientada* caso contrário. Como exemplos de superfícies fechadas orientadas e não-orientadas podemos citar o toro e o plano projetivo, respectivamente [Zee].

Uma superfície é dita de *gênerus* g se é topologicamente homeomorfa à esfera com g alças e/ou *cross-caps*. Assim o toro é uma superfície de gênero um.

Um grafo é dito de *gênerus orientado* ou de *gênerus não-orientado* g , se pode ser imerso, sem cruzamento de suas arestas, numa superfície orientada ou não-orientada de gênero g , respectivamente, mas não em uma de gênero $g - 1$. O K_5 , conhecidamente não planar, é um exemplo de grafo orientado de gênero 1, pois pode ser desenhado no toro, sem que hajam cruzamentos de suas arestas (figura 4.5).

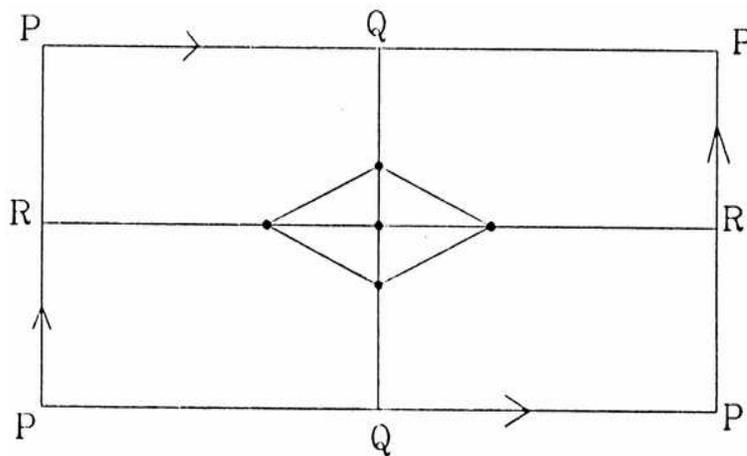


Figura 4.5: K_5 imerso no toro.

Suporemos, nesta secção, grafos 3-aresta-conexos, 3-regulares e com cintura maior ou igual a sete e provaremos que um contra-exemplo para CJ_5 , fixando-se o gênero do grafo, tem número de vértices limitado por $28(g - 1)$ para superfícies

orientadas e $14(g - 2)$ para superfícies não-orientadas. Além disso, demonstraremos a validade de CJ_5 para grafos em superfícies orientadas de gênero menor ou igual a dois e não-orientadas de gênero menor ou igual a quatro.

Lema 4.12 *Seja G um grafo conexo, 3-regular, de cintura $\gamma \geq 7$ e imerso em uma superfície \mathcal{S} de gênero g . Então, vale que:*

- (a) $|VG| \leq 28(g - 1)$, se \mathcal{S} é orientada;
- (b) $|VG| \leq 14(g - 2)$, se \mathcal{S} é não-orientada.

Prova: Seja FG o conjunto de todas as faces f de G . Como $\gamma \geq 7$,

$$2 \cdot |aG| = \sum_{i=7}^{\infty} i f_i \geq 7 \cdot |FG| \quad (4.2)$$

onde f_i é o número de todas as faces com i arestas. Por outro lado, como G é 3-regular, temos que

$$3 \cdot |VG| = 2 \cdot |aG|. \quad (4.3)$$

As fórmulas de Euler para grafos em superfícies orientadas e não-orientadas são, respectivamente,

$$|VG| + |FG| - |aG| = 2(1 - g) \quad (4.4)$$

e

$$|VG| + |FG| - |aG| = 2 - g. \quad (4.5)$$

Assim, aplicando (4.2) e (4.3) nas fórmulas (4.4) e (4.5), concluímos a prova. \square

Teorema 4.13 *Todo grafo sem arestas de corte e com gênero orientado menor do que ou igual a 1 ou não-orientado menor do que ou igual a dois admite um 5-fluxo.*

Prova: Imediata por aplicação do Lema 4.12. \square

Teorema 4.14 (Möller, Carstens e Brinkmann) *Todo grafo sem arestas de corte e com gênero orientado menor do que ou igual a dois e não-orientado menor do que ou igual a quatro admite um 5-fluxo.*

Prova: Para demonstrar o teorema, vamos considerar grafos 3-regulares, 3-aresta-conexos e com cintura ≥ 7 . Pelo Lema 4.12, sabemos que basta verificar todos os grafos com no máximo 28 vértices. Tutte demonstrou [Tut 1966a, pg. 74-75] que $|VG| > 22$, necessariamente, para grafos com cintura ≥ 7 . Além disso, $|VG|$ é par. Então, na realidade, basta considerar grafos com $24 \leq |VG| \leq 28$. No caso de 24 vértices, à parte de isomorfismos, existe somente um grafo com as propriedades citadas, o grafo de McGhee. Este resultado também foi apresentado por Tutte [Tut 1966a, pg. 77-81]. Entretanto, o grafo de McGhee admite um 4-fluxo, como pode ser observado na figura 4.6. Para grafos com 26 e 28 vértices, o problema foi solucionado com o auxílio de computador, cujos detalhes de implementação e algoritmos pode ser encontrados em [Bri 1986], referência esta cujo acesso não nos foi possível. \square

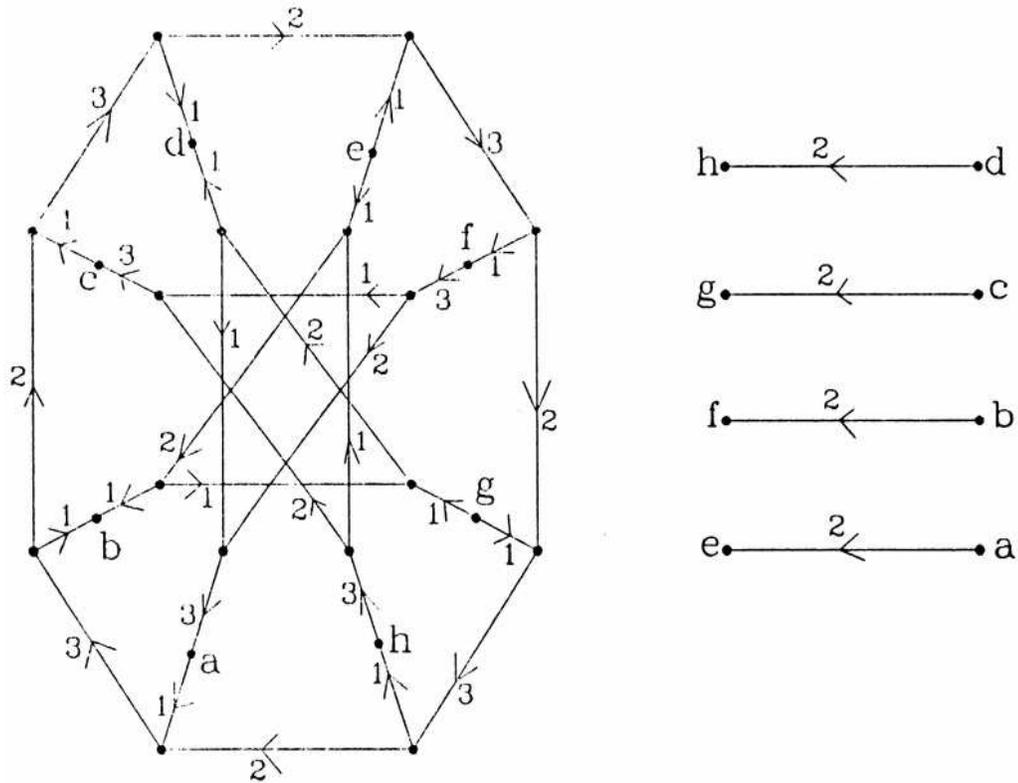


Figura 4.6: Um 4-fluxo para o grafo de McGhee.

Capítulo 5

Resultados sobre a Conjetura dos 3-fluxos

Na secção 1.2 vimos que existe uma correlação entre k -colorações de faces num grafo planar e k -fluxos. Assim, o Teorema de Grötzsch [Gro 1958] nos dá uma demonstração da CJ_3 para o caso planar:

Teorema 5.1 (Grötzsch) *Todo grafo planar, sem arestas de corte e sem 3-cortes, é 3-colorável.*

Na verdade, a extensão de Grünbaum-Aksionov [Gru 1963]-[Aks 1974] fornece uma afirmação mais forte que a CJ_3 para o caso planar:

Teorema 5.2 (Grünbaum-Aksionov) *Todo grafo planar, sem arestas de corte e com não mais que três 3-cortes, é 3-colorável.*

Usando uma abordagem de fluxos, Steinberg e Younger [SY 1989] provaram a CJ_3 não só para o plano, mas também para o plano projetivo real, admitindo neste caso, até um 3-corte. Dahab e Younger [DY 1988] estenderam este resultado, admitindo até três 3-cortes.

Neste capítulo iremos demonstrar o Teorema dos 4-fluxos de Jaeger [Jae 1979], para grafos sem 1-cortes nem 3-cortes. Além disso, demonstraremos uma extensão do Teorema 5.2, baseada na demonstração de Steinberg e Younger [SY 1989].

5.1 Teorema dos 4-fluxos

Teorema 5.3 (Jaeger) *Todo grafo sem arestas de corte e sem 3-cortes admite um 4-fluxo.*

Prova: A demonstração é análoga à do Teorema 4.5. Seja G um grafo sem 1-cortes nem 3-cortes. Por raciocínio análogo à Redução 3.2, podemos considerar que G é 3-aresta-conexo. Mas, por hipótese G é livre de 3-cortes. Logo, podemos supor que G é 4-aresta-conexo. Pelo Lema 4.3, temos que G possui duas árvores geradoras T_1 e T_2 , disjuntas nas arestas. Pelo Lema 4.4 existe em G dois 2-fluxos parciais (D_1, φ_1) e (D_2, φ_2) , cujos suportes incluem $aG \setminus aT_1$ e $aG \setminus aT_2$, respectivamente. Considere então $(D, \varphi) := (D_1, \varphi_1) + 2 \cdot (D_2, \varphi_2)$. Pelas Proposições 2.1 e 2.2, (D, φ) é um 4-fluxo parcial em G . Mas, toda aresta de G pertence à união dos suportes dos dois 2-fluxos parciais. Portanto, de fato, (D, φ) é um 4-fluxo em G . \square

5.2 Teorema dos 3-fluxos para grafos planares

Chamamos de uma *3-orientação* D em um grafo G , um 3-fluxo modular (D, φ) , tal que $\varphi = 1$.

Para $X, Y \subseteq VG$, dizemos que um corte δX *fragmenta* o conjunto Y , se X e \overline{X} ambos interceptam Y .

Dizemos que um vértice v em VG é *especificado* se δv for um corte minimal e se as orientações das arestas de δv forem fixadas, tal que v esteja equilibrado módulo 3.

Teorema 5.4 *Seja G um grafo planar, sem arestas de corte e $S \subseteq VG$. Se todo 3-corte em G fragmenta S e se vale uma das hipóteses abaixo, então G tem uma 3-orientação (que estende a orientação do vértice especificado, se existir):*

- ou (i) $|S| \leq 3$;*
- ou (ii) $|S| \leq 2$ e existe um vértice especificado de grau 4 em S ;*
- ou (iii) $|S| = 1$ e o único elemento de S é um vértice especificado de grau 5.*

Convém observar que a permissão de 3-cortes em G , válida para as hipóteses (i) e (ii) do teorema, fortalece o resultado da CJ_3 para grafos planares que atendam às referidas hipóteses. A limitação da cardinalidade do conjunto S nessas hipóteses segue da necessidade de evitarmos os grafos exibidos na figura 5.1 (a) e (b), para os quais não é possível obter uma 3-orientação. Observe que o grafo (a) requer $|S| = 4$ e o grafo (b) requer $|S| = 3$ com o vértice especificado de grau 4 em S .

A limitação da cardinalidade de S a 1 na hipótese (iii) implica na inexistência de 3-cortes em grafos que atendam à esta hipótese. Na realidade, com uma demonstração um pouco mais elaborada para o teorema, poderíamos permitir a existência de um 3-corte nesta hipótese, dentro de certas condições.

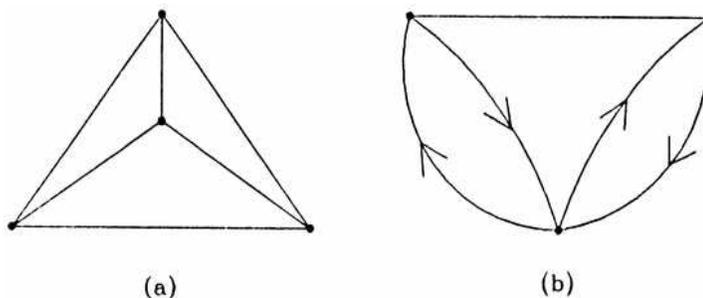


Figura 5.1: Exemplos de grafos que não admitem 3-orientação: (a) quatro 3-cortes; (b) orientação imposta a um vértice especificado, com dois 3-cortes.

Prova do Teorema: Por indução no número de arestas de G . A afirmação é trivialmente verdadeira se G for livre de arestas.

Seja então um grafo G satisfazendo uma das hipóteses do teorema e com pelo menos uma aresta. A prova está baseada em sucessivas reduções aplicadas a G , até a obtenção da Configuração de Grötzsch (figura 5.5 (a), pg. 64). Em algumas dessas reduções, valer-nos-emos de reduções apresentadas anteriormente à redução em questão. Denotaremos por l o vértice especificado de G , se ocorre uma das hipóteses (ii) ou (iii).

R1. *Redução a grafo conexo.*

A aplicação da hipótese de indução, em cada componente conexa K de G , com $S \cap VK$ no lugar de S , é trivial neste caso. \diamond

Lembre que, dada uma aresta α de G , $G|\alpha$ denota o grafo obtido a partir de G pela contração da aresta α . Estendemos, da maneira natural, essas contrações para um conjunto x de arestas ao invés de apenas uma aresta. É conveniente exigir que $G[x]$ seja conexo. Nesse caso, o conjunto X dos extremos das arestas

de x é unificado num único vértice, digamos w . Definimos $S|x$, a *contração* do conjunto S por x , como segue:

$$S|x := \begin{cases} S & \text{se } S \cap X = \emptyset \\ (S \setminus X) \cup \{w\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que todo 3-corte em $G|x$ fragmenta $S|x$.

R2. *Redução a grafo 3-aresta-conexo.*

Esta redução é análoga à Redução 3.2. Basta apenas observar que se ocorre a hipótese (ii) ou (iii), para todo 2-corte em G existe uma aresta α do 2-corte tal que $\alpha \notin l$, pois δl é minimal. Assim, a hipótese de indução é aplicada a $G|\alpha$ e $S|\alpha$ no papel de G e S . \diamond

R3. *Redução a grafo simples.*

O caso em que G contém laços é trivialmente resolúvel.

Suponha então que G contém duas arestas paralelas α e β , ligando dois de seus vértices, u e v .

Considere inicialmente o caso em que não há vértice especificado, ou, se houver, que nem u nem v sejam o vértice especificado. Sejam $G' := G|\{\alpha, \beta\}$ e $S' := S|\{\alpha, \beta\}$. Como a contração de arestas não cria cortes novos, claramente G' com S' atendem à mesma hipótese que G com S e a minimalidade de δl , se ocorre a hipótese (ii) ou (iii), é preservada. Por hipótese de indução, G' tem uma 3-orientação D' . Seja D a extensão de D' a aG , onde as orientações de α e β são determinadas de acordo com o fluxo líquido φ do vértice u , calculado no grafo $G - \{\alpha, \beta\}$. Assim, se $\varphi \equiv 0 \pmod{3}$, α e β são orientadas em sentidos opostos; se $\varphi \equiv 1 \pmod{3}$, α e β são orientadas saindo do vértice u e se $\varphi \equiv 2 \pmod{3}$, α e β são orientadas entrando no vértice u . Logo, D é uma 3-orientação para G .

Considere, agora, o caso em que ou u ou v , digamos u , é o vértice especificado.

Suponha inicialmente que α e β têm orientações opostas. Sejam então $G' := G - \{\alpha, \beta\}$ e $S' := S \cup \{v\}$. O vértice u em G' tem grau 2 ou 3, portanto estamos agora na hipótese (i). Todo 3-corte em G' e não em G separa u e v e portanto fragmenta S' . Para podermos aplicar a hipótese de indução a G' , resta mostrar que este é livre de 1-cortes, ou, de forma equivalente, que nenhum 3-corte δX em G contém α e β . Suponha o contrário. No caso da hipótese (iii), G é livre de 3-cortes. No caso da hipótese (ii), ajuste a notação, permutando X com \bar{X} se

necessário, de forma que $u \in X$. O corte δX fragmenta S e portanto u é o único vértice de S em X . Entretanto, o corte $\delta(X \setminus \{u\})$ em G é ímpar, menor do que ou igual a 3 e não fragmenta S , contradição. De fato, G' é livre de 1-cortes. Assim, G' com S' atende à hipótese (i) e por indução, tem uma 3-orientação D' . Reverta todas as orientações de D' , se necessário, de forma a coincidir com a orientação especificada para u em G , nas arestas $\delta u \setminus \{\alpha, \beta\}$. Seja D a extensão de D' a aG , dando, para as arestas α e β , as orientações previamente especificadas.

Resta agora considerar o caso em que α e β são orientadas num mesmo sentido. Neste caso, sejam $G' := G - \alpha$ e $S' := S \cup \{v\}$. Se ocorre a hipótese (ii) em G , ocorre a hipótese (i) em G' . Se ocorre a hipótese (iii) em G , revertamos a orientação de β , transformando u num vértice especificado de grau 4 em G' e portanto estamos na hipótese (ii): neste caso, a remoção de uma aresta paralela de δl preserva sua minimalidade. Em ambos os casos, G' é livre de 1-cortes pois os 2-cortes em G já foram reduzidos. Todo 3-corte em G' e não em G separa u e v e portanto fragmenta S' . Assim, G' com S' atende a uma das hipóteses (i) ou (ii) e por indução, tem uma 3-orientação D' . Reverta todas as orientações de D' , se necessário, de forma a coincidir com as orientações especificadas para u em G , nas arestas $\delta u \setminus \{\alpha, \beta\}$. Reverta ainda a orientação de β em D' e estenda D' a aG , dando a orientação especificada para α em G . \diamond

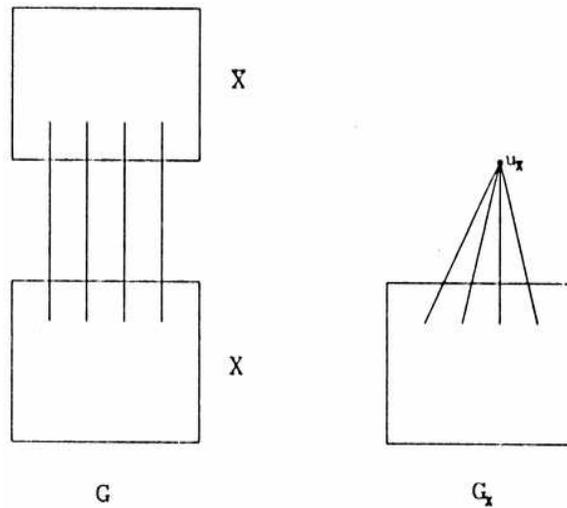


Figura 5.2: Os grafos G e G_X .

Dado um conjunto X de vértices tal que $G[\overline{X}]$ é conexo, a *contração* G_X de G por $aG[\overline{X}]$ é o grafo $G|aG[\overline{X}]$. Denotaremos por S_X o conjunto $S|aG[\overline{X}]$.

Denotaremos também por $u_{\overline{X}}$ o vértice resultante da contração das arestas em $aG[\overline{X}]$ (figura 5.2).

R4. *Redução a grafo livre de: (a) 3- e 4-cortes separadores; (b) 5-cortes separadores que não fragmentam S .*

Em G , seja δX um corte separador nos casos (a) ou (b). Permute X com \overline{X} tal que $|\overline{X} \cap S| \leq 1$ na hipótese (i) e $l \in X$ nas hipóteses (ii) ou (iii). Em todas as três hipóteses, $|\overline{X} \cap S| \leq 1$. Mais ainda, no caso (b), $|\overline{X} \cap S| = 0$.

Dado que G é 3-aresta-conexo, todo k -corte, $3 \leq k \leq 5$, é minimal. Em particular, δX é minimal e portanto $G[X]$ e $G[\overline{X}]$ são ambos conexos.

O grafo G_X é também 3-aresta-conexo. Portanto, no caso das hipóteses (ii) e (iii), a minimalidade de δl é preservada. Assim, G_X com S_X atende à mesma hipótese que G com S e por indução tem uma 3-orientação D_X .

Resta agora obter uma 3-orientação $D_{\overline{X}}$ para $G_{\overline{X}}$ que coincida com D_X nas arestas de $\delta X = \delta u_X$. No caso $|\delta X| = 3$, a hipótese de indução pode ser imediatamente aplicada a $G_{\overline{X}}$ e $S_{\overline{X}}$, revertendo então, se necessário, a orientação $D_{\overline{X}}$ obtida.

Podemos então supor que $|\delta X| = 4$ ou $|\delta X| = 5$. Neste caso, u_X torna-se o vértice especificado de grau 4 ou 5, com suas arestas orientadas como em D_X . Novamente, δu_X é minimal em $G_{\overline{X}}$ pois $G_{\overline{X}}$ é 3-aresta-conexo. Logo, $G_{\overline{X}}$ com $S_{\overline{X}} \cup \{u_X\}$ atende à hipótese (ii) ou (iii) e por indução tem uma 3-orientação $D_{\overline{X}}$. A união de D_X e $D_{\overline{X}}$ é uma 3-orientação em G . \diamond

Um *ziguezague* Z é um caminho $(u_0, \alpha_1, u_1, \alpha_2, u_2, \alpha_3, u_3)$ tal que:

- no mapa planar de G , α_1 e α_2 são consecutivas em u_1 e α_2 e α_3 são consecutivas em u_2 ;
- u_1 e u_2 são ambos vértices de grau distinto de quatro.

Um *6-corte separador com ziguezague* é um 6-corte separador onde três de suas arestas formam um ziguezague (figura 5.3).

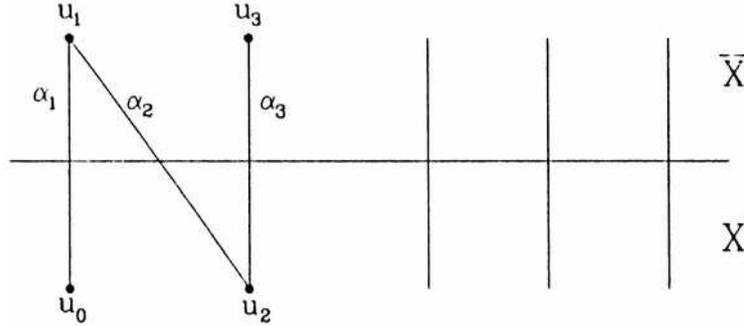


Figura 5.3: Um 6-corte separador com ziguezague.

R5. *Redução a grafo livre de 6-cortes separadores com ziguezague que não fragmentam S .*

Seja δX um 6-corte separador com ziguezague que não fragmenta S . Vamos inicialmente provar que $G[X]$ e $G[\bar{X}]$ são ambos conexos. Suponha que, pelo contrário, $G[X]$ não é conexo; sejam K_1 e K_2 duas componentes conexas de $G[X]$. Como G é 3-aresta-conexo,

$$|\delta(VK_1)|, |\delta(VK_2)| \geq 3. \quad (5.1)$$

Mas $\delta(VK_1)$ e $\delta(VK_2)$ são disjuntos e subconjuntos de δX . Portanto, vale a igualdade em (5.1) e K_1 e K_2 são as duas únicas componentes conexas de $G[X]$. Por outro lado, δX é separador e portanto $aG[X] \neq \emptyset$. Logo, aK_1 ou aK_2 , digamos, aK_1 , é não vazia. Ademais, as três arestas de $\delta(VK_2)$ pertencem a $aG[VG \setminus VK_1]$. Assim, $\delta(VK_1)$ é um 3-corte separador, já reduzido anteriormente. Assim, $G[X]$ é conexo. Analogamente, $G[\bar{X}]$ também é conexo. Portanto, podemos contrair G a G_X e a $G_{\bar{X}}$.

Permute X com \bar{X} , se necessário, tal que $\bar{X} \cap S = \emptyset$. Claramente, se ocorre uma das hipóteses (ii) ou (iii), $l \in X$. O grafo G_X é 3-aresta-conexo e portanto δl , se ocorre a hipótese (ii) ou (iii), é minimal. Assim, G_X com S_X atende à mesma hipótese que G com S e por indução tem uma 3-orientação D_X .

Seja $(u_0, \alpha_1, u_1, \alpha_2, u_2, \alpha_3, u_3)$ o ziguezague de δX . Reverta o ziguezague, se necessário, de forma que $\{u_0, u_2\} \subseteq X$ (figura 5.3). Observe que em $G_{\bar{X}}$ as arestas α_1 e α_2 são paralelas. Sejam $G'_{\bar{X}} := G_{\bar{X}} - \alpha_1$ e $G''_{\bar{X}} := G_{\bar{X}} - \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Como

G é 3-aresta-conexo e $\overline{X} \cap S = \emptyset$, $G_{\overline{X}}$ é 4-aresta-conexo. O grafo $G_{\overline{X}}$ não contém 4-cortes separadores, pois estes já foram reduzidos em G . Ademais, pela definição de zigzague, o grau de u_1 é distinto de 4. Logo, em $G_{\overline{X}}$ não existem 4-cortes que contenham α_1 . Portanto, $G'_{\overline{X}}$ é 4-aresta-conexo e $G''_{\overline{X}}$ é 3-aresta-conexo. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: As arestas α_1 e α_2 têm a mesma orientação em D_X .

Neste caso, reverta a orientação de α_2 , fazendo u_X o vértice especificado de grau 5 em $G'_{\overline{X}}$. Como $G'_{\overline{X}}$ é 4-aresta-conexo, o corte em $G'_{\overline{X}}$ de u_X é minimal e $G'_{\overline{X}}$, com $\{u_X\}$ no lugar de S , satisfaz à hipótese (iii). Por indução, temos uma 3-orientação $D'_{\overline{X}}$ para $G'_{\overline{X}}$. Reverta a orientação de α_2 em $D'_{\overline{X}}$ e estenda $D'_{\overline{X}}$ a $aG_{\overline{X}}$, obtendo $D_{\overline{X}}$, dando a α_1 a mesma orientação que em D_X .

Caso 2: As arestas α_1 e α_2 têm orientações opostas em D_X .

Neste caso, fazemos u_X o vértice especificado de grau 4 em $G''_{\overline{X}}$. Como $G''_{\overline{X}}$ é 3-aresta-conexo, o corte em $G''_{\overline{X}}$ de u_X é minimal e $G''_{\overline{X}}$ é livre de 1-cortes. Ademais, como $G_{\overline{X}}$ é 4-aresta-conexo, todo 3-corte em $G''_{\overline{X}}$ separa u_1 de u_X . Então $G''_{\overline{X}}$, com $\{u_1, u_X\}$ no lugar de S , satisfaz à hipótese (ii). Por indução, $G''_{\overline{X}}$ tem uma 3-orientação $D''_{\overline{X}}$. Estenda $D''_{\overline{X}}$ a $aG_{\overline{X}}$, obtendo $D_{\overline{X}}$, dando a α_1 e a α_2 a mesma orientação que em D_X .

Em ambos os casos obtivemos uma 3-orientação $D_{\overline{X}}$ para $G_{\overline{X}}$ que concorda com D_X nas arestas de δX . A união de D_X e $D_{\overline{X}}$ é uma 3-orientação em G . \diamond

O grafo G é 5-regular exceto em S se, para todo vértice v em $VG \setminus \{l\}$,

$$d(v) = \begin{cases} 5 & \text{se } v \in VG \setminus S \\ 3 & \text{se } v \in S \setminus \{l\}. \end{cases}$$

R6. Redução a grafo 5-regular exceto em S .

Seja v um vértice de G , distinto de l e tal que $d(v) \neq 5$ se $v \notin S$ e $d(v) \neq 3$ se $v \in S \setminus \{l\}$. Sejam α e β duas arestas consecutivas no mapa planar de G , incidentes em v . Sejam a e b os extremos de α e β , respectivamente, distintos de v . Seja G' o grafo obtido a partir de G pela junção de α e β . Seja $S' := S \cup \{a\}$ se $|S| = 1$ e $v \in S$; caso contrário seja $S' := S$.

O grafo G' é livre de 1-cortes. Suponha que, pelo contrário, $\delta_{G'} X$ é um 1-corte em G' . Como G é livre de 1-cortes, pela Proposição 3.12, δX é um 3-corte em G que contém α e β . Por reduções anteriores, G é simples e livre de 3-cortes

separadores. Logo, $\delta X = \delta v$ e portanto $d(v) = 3$. Necessariamente, $v \in S \setminus \{l\}$, em contradição à hipótese desta redução.

O grafo G' é livre de 3-cortes que não fragmentam S' . Suponha que, pelo contrário, $\delta_{G'}X$ é um 3-corte em G' que não fragmenta S' . Como S' é um superconjunto de S , $\delta_{G'}X$ não fragmenta S . Além disso, G é livre de 3-cortes que não fragmentam S ; portanto, segue que $\delta_G X$ é um 5-corte que não fragmenta S e contém α e β . Por reduções anteriores, G é simples e livre de 5-cortes separadores que não fragmentam S . Logo, $\delta X = \delta v$ e portanto $d(v) = 5$. Pela hipótese desta redução, $v \in S$. Como δX não fragmenta S , então $|S| = 1$. Neste caso, $a \in S'$ e portanto δX fragmenta S' , contradição.

No caso de ocorrer a hipótese (ii) ou (iii), δl é minimal em G' . Suponha que, pelo contrário, $\delta_{G'}X$ é um corte não vazio em G' que é subconjunto próprio de δl . Então, podemos supor que $|\delta_{G'}X| \leq 2$. Mas G' é livre de 1-cortes. Logo, $\delta_{G'}X$ é um 2-corte. Por redução anterior, G é 3-aresta-conexo. Logo, $\delta_G X$ é um 4-corte que contém α e β . Novamente por reduções anteriores, G é simples e livre de 4-cortes separadores. Logo, $\delta X = \delta v$. Assim, v e l , vértices distintos, têm duas arestas incidentes em comum, uma contradição à simplicidade de G .

Podemos então aplicar hipótese de indução com G' e S' no papel de G e de S , obtendo uma 3-orientação D' para G' . Pela Proposição 3.11, G também tem uma 3-orientação. \diamond

R7. *Redução a grafo livre de faces triangulares contendo vértices de grau 3.*

Seja $T := (u_0, \alpha_1, u_1, \alpha_2, u_2, \alpha_3, u_0)$ uma face triangular em G contendo vértices de grau 3. Neste caso, estamos em uma das hipóteses (i) ou (ii). A face triangular T tem no máximo um vértice de grau 3. Suponha que, pelo contrário, T tem pelo menos dois vértices de grau 3, digamos u_0 e u_1 . Neste caso, como G é simples, $\delta\{u_0, u_1\}$ é um 4-corte separador e portanto já reduzido, contradição.

Seja então u_0 o vértice de grau 3 de T . No caso de ocorrer a hipótese (ii), o vértice especificado de grau 4, l , não pertence a VT ; caso contrário, considerando $u_1 = l$, temos que $\delta\{u_0, u_1\}$ é um 5-corte que não fragmenta S , e separador, pois G é simples, portanto já reduzido.

Logo, podemos supor que os vértices u_1 e u_2 de T são ambos de grau 5. Seja ainda β a aresta incidente em u_0 e não pertencente a aT (figura 5.4).

Seja G' o grafo obtido a partir de G , contraindo-se α_3 e removendo-se α_1 e α_2 (figura 5.4). Sejam $S' := (S \setminus \{u_0\}) \cup \{u_1\}$ e w o vértice resultante da contração de α_3 . Como a contração de arestas não cria cortes novos, todo k -corte em G' , e não em G , corresponde a um $(k + 2)$ -corte em G , contendo as arestas α_1 e α_2 .

Por outro lado, G é 3-aresta-conexo, livre de m -cortes separadores, $m \leq 4$, e u_1 é um vértice de grau 5 em G . Portanto, G' é livre de 1- e 2-cortes. Dessa forma, a minimalidade de δl , se ocorre a hipótese (ii), é preservada em G' .

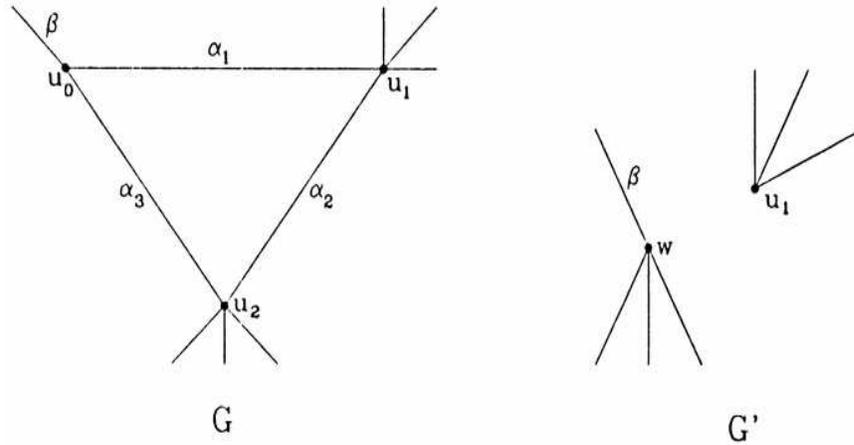


Figura 5.4: Um triângulo em G com apenas um vértice de grau 3 e sua imagem em G' .

O grafo G' é também livre de 3-cortes separadores que não fragmentam S' . Suponha que, pelo contrário, existe em G' um 3-corte $\delta_{G'}X$ que não fragmenta S' . Se o corte $\delta_{G'}X$ não separa u_1 de w , então $\delta_G X$ é um 3-corte em G que também não fragmenta S , contradição. De fato, o corte $\delta_{G'}X$ necessariamente separa u_1 de w . Sem perda de generalidade, considere que $u_1 \in X$ e $w \in \overline{X}$. Entretanto, em G , $\delta_G(X \cup \{u_0\})$ é um 6-corte separador com zig-zague que não fragmenta S ou um 4-corte separador, ambos já reduzidos.

Assim, G' com S' atende à mesma hipótese que G com S e por hipótese de indução tem uma 3-orientação D' . Estenda D' a aG , orientando α_1 e α_3 com a mesma orientação de β em relação a u_0 e orientando α_2 com orientação oposta à de α_1 em relação a u_1 . \diamond

Uma *Configuração de Grötzsch*¹ é um subgrafo R de G , consistindo de quatro faces triangulares que compartilham um vértice em comum de grau 5. Cada vértice de R é de grau cinco e se ocorre a hipótese (iii), estes vértices são distintos de l , (figura 5.5 (a)). Chamaremos as arestas de $G \setminus R$ com um dos extremos em R de *arestas incidentes* em R .

R8. *Redução a grafo livre da configuração de Grötzsch.*

Seja R uma configuração de Grötzsch em G . Seja $\{p, q, r, s, t, v\}$ o conjunto de vértices de R , disposto conforme a figura 5.5 (a). Seja G' o grafo obtido a partir de G da seguinte forma: fracione q em dois vértices, q' e q'' , tal que β_1 e β_2 incidam, ambas, em q' ; remova as arestas (r, s) , (s, v) e (v, t) - arestas do ziguezague Z ; contraia $G[\{p, q'', r, v\}]$ a um único vértice y ; contraia (s, t) a um único vértice z (figura 5.5 (b)). Claramente G' é planar.

Os cortes em G' que não correspondem a cortes de mesmo tamanho em G são exatamente aqueles que fragmentam o conjunto $\{q', y, z\}$. Chamaremos de cortes *esquerdos* aqueles que separam q' de y e z ; de cortes *direitos* aqueles que separam z de y e q' e de cortes *centrais* aqueles que separam y de z e q' .

Proposição 5.5 *O grafo G' é livre de: (a) 1-cortes; (b) 2-cortes que não fragmentam S e (c) 3-cortes que não fragmentam S .*

Prova: Em G' , todo 1-corte esquerdo é a imagem de um 3-corte separador em G , contendo as arestas β_1 e β_2 , e portanto já reduzido. Todo 2-corte esquerdo é a imagem de um 4-corte separador em G , já reduzido. Todo 3-corte esquerdo que não fragmenta S é a imagem de um 5-corte separador em G que também não fragmenta S e portanto já reduzido.

Todo 1-corte direito é a imagem de um 4-corte separador em G , já reduzido. Todo 2-corte direito que não fragmenta S é a imagem de um 5-corte separador em G que também não fragmenta S e portanto já reduzido. Todo 3-corte direito que não fragmenta S é a imagem de um 6-corte separador com ziguezague Z , em G , que também não fragmenta S e portanto já reduzido.

Finalmente, considere em G' um k -corte central, $\delta X'$, $k \leq 3$, tal que $y \in X'$. Em G , sejam $X := (X' - \{y\}) \cup \{p, r\}$ e $W := X \cup \{v\}$. Observemos que $|\delta X| \leq 8$ e $|\delta W| \leq 9$. Note também que tanto $\delta X \setminus \delta_{G'} X'$ e $\delta W \setminus \delta_{G'} X'$ consistem de arestas em aR .

¹Grötzsch expressou sua configuração e teorema em termos duais.

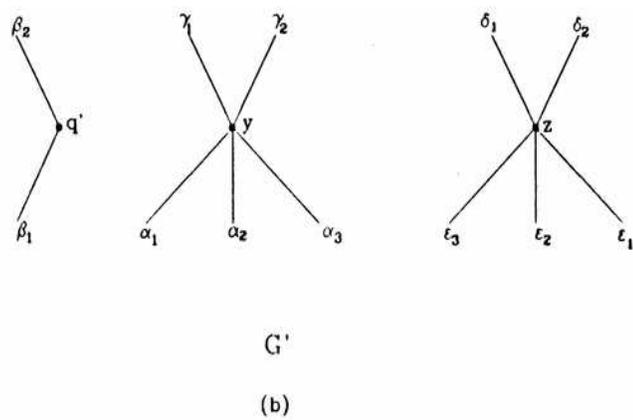
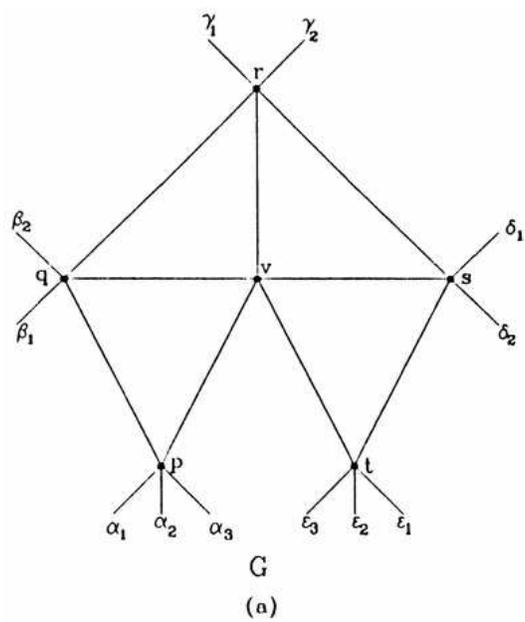


Figura 5.5: (a) A Configuração de Grötzsch no grafo G e (b) sua imagem em G' .

Proposição 5.6 *Seja δY um corte separador em G tal que $|\delta Y| \leq 9$. Sejam também u e v dois vértices de grau 5 em Y , onde incidem, em cada um deles, pelo menos uma aresta de δY . Então, existe em $G[Y]$ um caminho ligando u a v .*

Prova: Por contradição. Suponhamos que, pelo contrário, não existe um caminho em $G[Y]$ ligando u a v . Portanto, Y pode ser dividido em duas partes, Y_1 e Y_2 , tais que $u \in Y_1$ e $v \in Y_2$ e $\{\delta Y_1, \delta Y_2\}$ é uma partição de δY . Como G é 3-aresta-conexo e $|\delta Y| \leq 9$, então, $3 \leq \min\{|\delta Y_1|, |\delta Y_2|\} \leq 4$. Mas, u e v são vértices de grau 5, então, δY_1 ou δY_2 é um 3- ou 4-corte separador em G , já reduzido. \square

Assim, pela Proposição 5.6, existe em $G[X]$ um caminho com extremos p e r ; a união deste caminho com o caminho (p, v, r) é um ciclo K em G . Por raciocínio análogo, existe também em $G[\overline{W}]$ um caminho com extremos q e s ; a união deste caminho com o caminho (q, v, s) é um ciclo L em G . Claramente os ciclos K e L só têm o vértice v em comum. Além disso, os vértices q e s em L são separados por K . Logo, temos em G um cruzamento de arestas, contrariando a condição de planaridade. De fato, não existem k -cortes centrais em G' , $k \leq 3$. \square

Assim, pela Proposição 5.5 temos que G' é livre de 1-cortes e também de 3-cortes que não fragmentam S .

Observe também que, se ocorre uma das hipóteses (ii) ou (iii), a minimalidade de δl em G' é preservada. Caso contrário, podemos supor por absurdo que existe em G' um corte não vazio δX que é subconjunto próprio de δl e tal que $|\delta X| \leq 2$. Como G' é livre de 1-cortes, δX é necessariamente um 2-corte. No caso de ocorrer a hipótese (iii), claramente δX não fragmenta S . No caso de ocorrer a hipótese (ii), considere, sem perda de generalidade, que $l \in X$. Então, ou δX ou $\delta(X \setminus \{l\})$ é um 2-corte que não fragmenta S . Em ambos os casos sabemos, pela Proposição 5.5, que tais cortes não existem em G' .

Portanto, G' com S atende à mesma hipótese que G com S . Por hipótese de indução tem uma 3-orientação D' . Seja D a extensão de D' a aG , orientando inicialmente as arestas em aR conforme a figura 5.6. Para cada vértice x em G , denote por $\varphi(x)$ o seu fluxo líquido.

Observe que a orientação das arestas em aR contribui com $0 \pmod{3}$ no balanceamento de cada vértice de R . Entretanto, não podemos ainda assegurar que D é uma 3-orientação em G . Assim, o fluxo φ dos vértices p, r, s e t podem assumir valores $0, 1$ ou $2 \pmod{3}$, tal que $\varphi(p) + \varphi(r) \equiv 0 \pmod{3}$ e $\varphi(s) + \varphi(t) \equiv 0 \pmod{3}$.

Reverta as orientações das arestas em $aG \setminus aR$, se necessário, de tal forma que $\varphi(t) \not\equiv 1 \pmod{3}$. Se $\varphi(t) \equiv 0 \pmod{3}$, então os vértices s e t estão equilibrados. Se $\varphi(t) \equiv 2 \pmod{3}$, reverta a orientação da aresta (s,t) . Desta forma, os vértices s e t ficam equilibrados. Note que as arestas do zig-zague Z não sofreram nenhuma alteração.

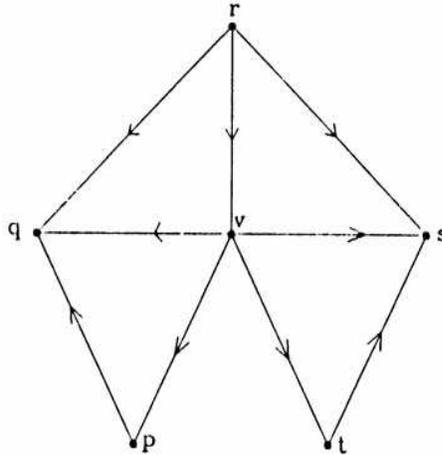


Figura 5.6: Uma orientação para as arestas em aR .

Analisemos agora os vértices p e r . Se $\varphi(p) \equiv 0 \pmod{3}$, então não modifique nenhuma orientação. Se $\varphi(p) \equiv 1 \pmod{3}$, reverta as orientações das arestas (p,v) e (r,v) . Se $\varphi(p) \equiv 2 \pmod{3}$, reverta as orientações das arestas (p,q) , (q,v) , (q,r) e (r,v) . Assim, em todos os casos p e r ficam equilibrados.

Observe que quaisquer que sejam as modificações nas orientações exibidas na figura 5.6, os vértices q e v permanecem equilibrados.

Lembramos aqui que, talvez tenhamos revertido todas as orientações das arestas em $aG \setminus aR$. Conseqüentemente, as orientações das arestas incidentes no vértice especificado, se estávamos na hipótese (ii) ou (iii) , foram também revertidas. Neste caso, agora podemos reverter de volta todas as orientações em D . \diamond

No desenrolar de nossa demonstração, apresentamos oito reduções de configurações possíveis de existirem em G . Em cada uma delas, aplicamos hipótese de indução. Para completar nossa prova, resta mostrar que existe uma dessas configurações apresentadas, para todo grafo G com pelo menos uma aresta, e tal que G , S e l satisfaçam a uma das hipóteses do teorema.

Lema 5.7 (Existência da Configuração de Grötzsch) *Seja G um grafo não vazio satisfazendo a uma das hipóteses do Teorema. Então, G tem uma das configurações reduzidas anteriormente.*

Prova: Suporemos que G não tem nenhuma das sete primeiras configurações e mostraremos que, neste caso, G tem a configuração de Grötzsch.

Precisamos inicialmente estabelecer a existência de um vértice de grau 5 com quatro faces triangulares nele incidentes. A fórmula de Euler para G planar e conexo é dada por:

$$|VG| + |FG| - |aG| = 2. \quad (5.2)$$

Seja V_i o conjunto dos vértices de grau i em G .

Para evitar configurações anteriores, podemos considerar que cada vértice de G tem grau 3, 4 ou 5. Assim, para $i = 3, 4, 5$, temos que

$$|VG| = \sum_i |V_i| \quad (5.3)$$

e

$$2 \cdot |aG| = \sum_i i \cdot |V_i|. \quad (5.4)$$

Segundo Lesbegue [Les 1940], dê a cada vértice v o *peso* pv , dado por:

$$pv = \sum_{f \in F_v} \frac{1}{d(f)}$$

onde F_v é o conjunto de faces incidentes em v e $d(f)$ é o *grau da face* f , ou seja, o número de arestas que compõem sua fronteira.

Assim, segue que

$$|FG| = \sum_i \sum_{v \in V_i} pv. \quad (5.5)$$

Substituindo (5.3), (5.4) e (5.5) em (5.2), chegamos a

$$\sum_i \sum_{v \in V_i} (pv - \frac{i-2}{2}) = 2.$$

Entretanto, podemos considerar que o grafo é simples e isento de faces triangulares contendo vértices de grau 3. Portanto, toda face incidente num vértice de grau 3 tem pelo menos grau 4, ou seja, $pv \leq \frac{3}{4}$ para todo $v \in V_3$. Toda face incidente no vértice l de grau 4, tem pelo menos grau três, ou seja, $pl \leq \frac{4}{3}$. Assim,

$$\sum_{v \in V_5} (pv - \frac{3}{2}) \geq 2 - \frac{|V_3|}{4} - \frac{|V_4|}{3}. \quad (5.6)$$

Pela hipótese do teorema, temos que se ocorre a hipótese (i), $|V_3| \leq 3$ e $|V_4| = 0$; se ocorre a (ii), $|V_3| \leq 1$ e $|V_4| = 1$ e se ocorre a (iii), $|V_3| = 0 = |V_4|$. De (5.6) segue que

$$\sum_{v \in V_5} (pv - \frac{3}{2}) \geq \begin{cases} \frac{5}{4} & \text{na hipótese (i)} \\ \frac{17}{12} & \text{na hipótese (ii)} \\ 2 & \text{na hipótese (iii)} \end{cases} \quad (5.7)$$

Portanto, o lado esquerdo de (5.7) é positivo. Por outro lado, para todo $v \in V_5$, se o número de faces triangulares nele incidentes é menor do que ou igual a 3, mesmo que as outras duas faces sejam quadrangulares, temos que $pv \leq \frac{3}{2}$. Logo, para que (5.7) se verifique, existem vértices em V_5 com pelo menos quatro faces triangulares. Seja M o conjunto de tais vértices. Observamos inicialmente que, para $v \in M$, $Adj(v) \subseteq V_5 \cup V_4$ e consiste de precisamente cinco vértices, pois supõe-se que G é simples e isento de faces triangulares com vértices de grau três. Mencionamos aqui que $Adj(v)$ expressa o conjunto dos vértices adjacentes a v . Além disso, a máxima contribuição de um vértice v de grau 5 no lado esquerdo de (5.7) é $\frac{1}{6}$: neste caso todas as faces incidentes em v são triangulares. Assim, segue que

$$M \geq \begin{cases} 7\frac{1}{2} & \text{na hipótese (i)} \\ 8\frac{1}{2} & \text{na hipótese (ii)} \\ 12 & \text{na hipótese (iii)} \end{cases}$$

Assim, no caso da hipótese (i), está assegurada a existência da configuração de Grötzsch. No caso da hipótese (ii), excluindo os adjacentes de l , ainda temos pelo menos cinco vértices em M cujos vizinhos são todos de grau 5. No caso da hipótese (iii), podemos tomar $v \in M$, tal que v não pertença a $\{l\} \cup Adj(l)$,

pois este conjunto contém no máximo seis vértices. De fato, G contém uma configuração de Grötzsch. \square

Em resumo, apresentamos oito possíveis configurações em G e em todas elas pudemos aplicar a hipótese de indução. Além disso mostramos que se G tiver pelo menos uma aresta, uma delas ocorre. Dessa forma, completamos a prova do teorema. \square

Bibliografia

- [AH 1977] K. Appel e W. Haken. Every planar map is four colorable Part I: Discharging. *Illinois J. Math.*, 21, 1977, 429-490.
- [AH 1986] K. Appel e W. Haken. The Four Color Proof Suffices. *The Mathematical Intelligencer*, 8 (1), 1976, 10-20.
- [AHK 1977] K. Appel, W. Haken e J. Koch. Every planar map is four colorable Part II: Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21, 1977, 491-567.
- [Aks 1974] V. A. Aksionov. On the extension of the 3-coloring of planar graphs (in Russian). *Diskret. Analiz.*, 16, 1974, 3-19.
- [BLW 1976] N. L. Biggs, E. K. Lloyd e R. J. Wilson. *Graph Theory 1736-1936*. Oxford University Press, 1976.
- [BM 1976] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press Ltd, 1976.
- [Bol 1978] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Academic Press, 1978.
- [Bri 1986] G. Brinkmann. *Sätze zur Form eines minimalen Gegenbeispiels zu Tutte's 5-Fluss Hypothese und Folgerungen*. Diplomarbeit, Bielefeld, 1986.
- [Cay 1879] A. Cayley. On the Colouring of Maps. *Proceedings of the Royal Geographical Society*, 1, 1879, 259-261.
- [DY 1988] R. Dahab e D. H. Younger. Manuscrito ainda não publicado, 1988.
- [FL 1988] P. Feofiloff e C. L. Lucchesi. *Algoritmos para Igualdades Minimax em Grafos*. VII Escola de Computação, UNICAMP, 1988.
- [GJS 1979] M. R. Garey, D. S. Johnson e L. Stockmeyer. Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comput. Sci*, 1, 1976, 237-267.

- [Gro 1958] H. Grötzsch. Ein Dreifarbensatz für Dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Halle-Wittenberg Math. Naturwiss Reith*, 8, 1958, 108-119.
- [Gru 1963] B. Grünbaum. Grötzsch's Theorem on 3-colorings. *Michigan Math. Journal*, 10, 1963, 303-310.
- [Had 1943] H. Hadwiger. Über line Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges*, Zürich, 38, 1943, 133-142.
- [Har 1969] F. Harary. *Proof Techniques in Graph Theory*. Academic Press, 1969.
- [Hea 1890] P. J. Heawood. Map-Color Theorem. *Quartely Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2, 1890, 193-200.
- [Jae 1979] F. Jaeger. Flows and Generalized Coloring Theorems in Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, B 26, 1979, 205-216.
- [Kar 1972] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems in R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.). *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, 1972, 85-103.
- [Kem 1879] A. B. Kempe. On the geographical Problem of the Four Colors. *American J. Math.*, 2, 1879, 193-200.
- [Les 1940] H. Lesbegue. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler. *J. de Math.*, 19, 1940, 27-43.
- [MCB 1988] M. Möller, H. G. Carstens e G. Brinkmann. Nowhere-Zero Flows in Low Genus Graphs. *Journal of Graph Theory*, 12 (2), 1988, 183-190.
- [Men 1927] K. Menger. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.*, 10, 1927, 96-115.
- [Mor 1860] De Morgan. A. Review of *The philosophy of discovery, chapters historical and critical*, by W. Whewell, D. D. *Athenaeum*, 1694, 1860, 501-503.
- [Myc 1955] J. Mycielski. Sur le coloriage des graphes. *Colloq. Math.*, 3, 1955, 161-162.
- [NW 1961] C. St. J. A. Nash-Williams. Edge-disjoint trees of finite graphs. *J. of London Math. Soc.*, 36, 1961, 445-450.

- [Ore 1967] O. Ore. *The Four Color Problem*. Academic Press, 1967.
- [Saa 1972] T. L. Saaty. Thirteen Colorful Variations on Guthrie's Four-Color Conjecture. *American Math. Monthly*, Janeiro, 1972, 2-43.
- [Sey 1981] P. D. Seymour. Nowhere-Zero 6-Flows. *Journal of Combinatorial Theory*, B 30, 1981, 130-135.
- [Ste 1984] R. Steinberg. Tutte's 5-flow conjecture for the projective plane. *J. Graph Theory*, 8, 1984, 277-285.
- [SY 1989] R. Steinberg e D. H. Younger. Grötzsch Theorem for the Projective Plane, artigo ainda não publicado.
- [Tai 1880] P. G. Tait. Remarks on the colouring of maps. *Proc. Royal Society*, Eindburg, 10, 1880, 729.
- [Tut 1947] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22, 1947, 107-111.
- [Tut 1954] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian J. Math.*, 6, 1954, 80-91.
- [Tut 1966a] W. T. Tutte. *Connectivity in Graphs*. Mathematical Expositions 15, University of Toronto Press, 1966.
- [Tut 1966b] W. T. Tutte. On the algebraic theory of graph cologins. *J. Combinatorial Theory*, 1, 1966, 15-50.
- [Whi 1931] H. Whitney. A theorem on graphs. *Ann. of Math.*, 2 (32), 1931, 378-390.
- [You 1983] D. H. Younger. Integer Flows. *Journal of Graph Theory*, 7, 1983, 349-357.
- [Zee] C. E. Zeeman. *Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies*. IMPA, Rio de Janeiro, sem data.

Índice

- aG veja arestas
 - de um grafo 12
- arestas
 - de corte, 1
 - de um grafo, 12
 - especiais, 43
 - incidentes em um subgrafo, 63
 - quase adjacentes, 31
- cintura, 31
- clique, 7
- coleção
 - disjunta, 42
 - m -disjunta, 42
- componente ímpar, 39
- configuração
 - de Grötzsch, 63
- conjunto
 - equilibrado, 13
 - equilibrado módulo k , 13
- contração
 - de arestas, 6
 - de Seymour, 44
 - de um conjunto de vértices
 - por um conjunto de arestas, 56
 - de um grafo
 - por um conjunto de arestas, 57
- corte, 1
 - central, 63
 - direito, 63
 - esquerdo, 63
 - que fragmenta conjunto de vértices, 54
 - separador, 40
 - 6-corte separador
 - com zig-zague, 58
- cruzamento
 - de conjuntos de vértices, 30
- (D, φ) veja orientação
 - k -ponderada parcial 12
- $d(v)$ veja grau
 - de vértice 15
- δX
 - veja corte 1
 - $\delta^+ X$, 13
 - $\delta^- X$, 13
- decomposição
 - parcial de Seymour, 43
 - total de Seymour, 44
- desenho, 15
 - natural, 16
- desvio
 - do equilíbrio, 23
- dual, 5
 - geométrico, 5
- extensão
 - de orientação ponderada, 13
- FG , as faces de G , 15
- φ veja função peso 12
- fluxo

conservativo, 9
 líquido, 13
 função peso *veja* peso
 de uma aresta 12

 G *veja* grafo
 não orientado 12
 $G|\alpha$ *veja* contração
 de arestas 6
 G_X *veja* contração
 de um grafo
 por um conjunto de arestas 57
 $G[X]$ *veja* subgrafo gerado
 por um conjunto de vértices 7
 $G[x]$ *veja* subgrafo gerado
 por um conjunto de arestas 13
 gênero, 50
 grafo
 contraível a um outro, 6
 de gênero não-orientado, 50
 de gênero orientado, 50
 de Seymour, 44
 Euleriano, 43
 não orientado, 12
 grau
 de face, 67
 de vértice, 15

 junção, 34

 k -coloração, 15
 k -colorável, 2
 k -corte, 1
 k -cromático, 6
 k -fluxo, 9, 14
 modular, 14
 modular parcial, 14
 parcial, 14
 p -balanceado, 16
 k -reverter, 24

 $\lambda(X, Y)$, 30
 multiplicação
 de orientação ponderada
 por constante, 13

 número
 cromático, 7

 orientação
 k -ponderada parcial, 12
 k -ponderada total, 12
 3-orientação, 54

 partição
 de um grafo, 41
 peso
 de um vértice, 67
 de uma aresta, 12

 quadrantes, 30

 regular
 5-regular exceto em S , 60
 restrição
 de orientação ponderada, 13
 rotação, 16

 $S|x$ *veja* contração
 de um conjunto de vértices
 por um conjunto de arestas 56
 S_X *veja* contração
 de um conjunto de arestas 57
 soma
 de orientações ponderadas, 12
 subgrafo gerado
 por um conjunto de arestas, 13
 por um conjunto de vértices, 7
 superfície
 fechada, 50
 não-orientada, 50
 orientada, 50

suporte
de orientação ponderada, 12

$u_{\overline{X}}$ veja contração
de um grafo
por um conjunto de arestas 58

VG veja vértices
de um grafo 12

vértice
equilibrado, 13
equilibrado módulo k , 13
especificado, 54
negativo, 23
positivo, 23

vértices
de um grafo, 12

\overline{X} , o complemento de X , 30

zigzag, 58

Esta dissertação foi reeditada em 11.11.2003, foi mantido na íntegra o texto original, exceto o índice, que foi revisado.