

# Fluxos Inteiros e Colorações<sup>1</sup>

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por Cândida Nunes da Silva e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 04 de dezembro de 2009.



Cláudio Leonardo Lucchesi (Orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ciência da Computação.

---

<sup>1</sup>A ortografia utilizada nesta tese segue o Formulário Ortográfico de 1943, com as alterações introduzidas pela Lei 5.765 de 18 de dezembro de 1971.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

<p>Silva, Cândida Nunes da</p> <p>Si38f Fluxos inteiros e colorações/Cândida Nunes da Silva -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.</p> <p>Orientador : Cláudio Leonardo Lucchesi</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.</p> <p>1. Teoria dos grafos. 2. Teoria da computação. I. Lucchesi, Cláudio Leonardo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.</p>
---

Título em inglês: Nowhere-zero flows and colorings of graphs

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Graph theory. 2. Computer theory.

Área de concentração: Teoria dos Grafos

Titulação: Doutor em Ciência da Computação

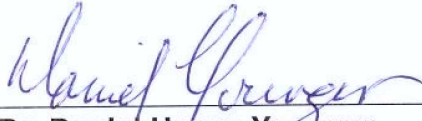
Banca examinadora: Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi (IC - UNICAMP)  
Prof. Dr. Daniel H. Younger (University of Waterloo, Canada)  
Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho (FACOM – UFMS)  
Prof. Dr. Arnaldo Mandel (IME – USP)  
Prof. Dr. Paulo Feofiloff (IME – USP)  
Prof. Dr. Orlando Lee (IC - UNICAMP)

Data da defesa: 04/12/2009

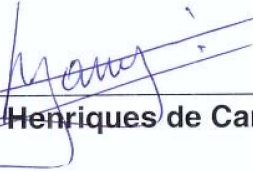
Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Ciência da Computação

**TERMO DE APROVAÇÃO**

Tese Defendida e Aprovada em 04 de dezembro de 2009, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



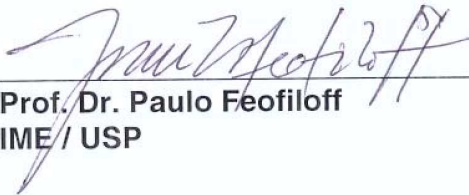
Prof. Dr. Daniel Haven Younger  
University of Waterloo / Canadá



Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho  
FACOM/UFMS



Prof. Dr. Arnaldo Mandel  
IME / USP



Prof. Dr. Paulo Feofiloff  
IME / USP



Prof. Dr. Orlando Lee  
IC / UNICAMP



Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi  
IC / UNICAMP



## Fluxos Inteiros e Colorações<sup>2</sup>

Cândida Nunes da Silva<sup>3</sup>

Dezembro de 2009

### Banca Examinadora:

- Cláudio Leonardo Lucchesi (Orientador)
- Daniel H. Younger — *University of Waterloo, Canada*
- Marcelo Henriques de Carvalho — FACOM-UFMS
- Arnaldo Mandel — IME-USP
- Paulo Feofiloff — IME-USP
- Orlando Lee — IC-UNICAMP
- Cristina Gomes Fernandes — IME-USP (Suplente)
- João Meidanis — IC-UNICAMP (Suplente)
- Pedro Jussieu de Rezende — IC-UNICAMP (Suplente)

---

<sup>2</sup>A ortografia utilizada nesta tese segue o Formulário Ortográfico de 1943, com as alterações introduzidas pela Lei 5.765 de 18 de dezembro de 1971.

<sup>3</sup>Suporte financeiro: bolsa de doutorado da FAPESP (processo 02/05665-6, 2003-2006), bolsa PDEE (doutorado sanduíche) da Capes (processo BEX 084503-5, 2003-2004) e bolsa de doutorado da Capes (institucional, 2002).



# Resumo

Esta tese trata de fluxos inteiros e colorações em grafos, problemas intimamente relacionados. Concentramos nossa atenção nas Conjeturas de Tutte sobre 5-, 4- e 3-fluxos, as quais foram propostas entre as décadas de 50 e 70 e permanecem abertas até hoje. Apresentamos três abordagens para o ataque das conjeturas, com ênfase na Conjetura dos 3-Fluxos. Na primeira abordagem propomos o estudo dos grafos fluxo-críticos, aqueles que não admitem um  $k$ -fluxo, mas que passam a admitir quando sujeitos a uma simples operação de redução. O interesse no estudo dessa classe de grafos vem da observação de que todo contra-exemplo mínimo para qualquer uma das conjeturas de Tutte é fluxo-crítico. Na segunda abordagem estudamos a conexidade cíclica do contra-exemplo mínimo para uma conjetura equivalente à Conjetura dos 3-Fluxos. Na terceira abordagem buscamos uma nova demonstração do Teorema de Grötzsch, o qual é o dual planar da Conjetura dos 3-Fluxos, que não utilize a Fórmula de Euler como a demonstração original.





# Abstract

The theme of this thesis is nowhere-zero flows and colourings of graphs, two subjects that are closely related. We focus mainly on the three Conjectures of Tutte concerning 5-, 4- and 3-nowhere-zero flows. These conjectures were proposed, respectively, in the 50's, 60's and 70's; all of them remain open so far. In this thesis we present three different approaches for the study of Tutte's Conjectures, with emphasis on the 3-Flow Conjecture. In the first approach, we introduce the concept of flow-critical graph. A graph is flow-critical if it does not admit a nowhere-zero  $k$ -flow but, when a simple reduction operation is applied, the resulting graph does admit a nowhere-zero  $k$ -flow. The motivation for the study of such graphs is due to the observation that any minimum counterexample for any of Tutte's conjectures lies in this particular class. In the second approach, we study the cyclic-connectivity of a minimum counterexample for an equivalent version of the 3-Flow Conjecture. In the third approach, we give a new proof for Grötzsch's Theorem that differs from the original in the fact that it does not depend on Euler's Formula.



# Agradecimentos

Gustavo, meu amado marido, obrigada por toda a compreensão, todo o apoio e todo o carinho para comigo ao longo destes longos anos que separaram o início e o término do meu doutorado. Obrigada por me lembrar freqüentemente que o copo está sempre meio cheio. Obrigada por ser tão companheiro nas grandes empreitadas da nossa vida, como trazer ao mundo e criar o nosso mais precioso tesouro, o Vítor. Meu querido filho Vítor, pequeno adorável, obrigada por existir. Suas deliciosas gargalhadas, suas sapequices e suas descobertas contínuas me lembram diariamente o quanto a vida vale a pena. Você me ensinou a ser mais eficiente e mais objetiva, uma contribuição crucial para a conclusão desta tese.

Querido Lucchesi, você foi um excelente orientador e um amigo dedicado ao longo destes anos. Você é um pesquisador brilhante, que sempre acha alguma saída engenhosa para qualquer beco em que se encontre. Sua energia, sua paixão pela pesquisa e seu otimismo são capazes de motivar e trazer esperança até mesmo a uma aluna profundamente frustrada e deprimida. Aprendi com você que o ótimo é inimigo do bom. Também aprendi com você que há solução para quase tudo na vida e ser flexível e acreditar na sua capacidade de encontrá-la acelera deveras a sua busca. Levo para a vida estas e tantas outras boas lições que me ensinou. Obrigada por tudo e, em especial, por todo o carinho.

Dear Dan, soon after my arrival in Waterloo I expressed to you my regret for having chosen such a hard theme to study. You then replied to me that this theme is the ‘Minas Gerais of Graph Theory’, a field packed with precious gems, though hard to find. That image stuck to my mind and inspired me ever since. Thanks for being my partner and advising me in this digging process. Thanks for showing me that there is room for romanticism in research and that aesthetic sense is a good guide in this process. Thanks for respecting my choice of pursuing a more pragmatic track. Above all, thanks for the so many good memories.

Dahab, obrigada por ter me introduzido ao mundo da pesquisa ao me orientar no mestrado, neste mesmo tema. Obrigada por viabilizar o meu estágio em Waterloo, uma experiência muito rica para minha vida acadêmica e pessoal. Obrigada também por ter respeitado e apoiado todas as minhas decisões enquanto meu orientador nos primeiros

anos do meu doutorado, inclusive a derradeira e mais difícil delas.

Bruce Richter, thanks for being so active in our meetings in Waterloo. Our discussions inspired me to some good ideas and also helped me to keep my feet on the ground.

Marcelo e Elâiny, obrigada pelo apoio logístico e pelo acolhimento tão caloroso na chegada a Waterloo.

Orlando e Alberto, parceiros de tantos seminários e papos informais, obrigada pelas perguntas e dicas que me ajudaram neste trabalho.

Aos professores da banca examinadora, em especial ao Paulo e ao Orlando que leram a tese minuciosamente, agradeço pelas observações, correções e sugestões interessantes que me ajudaram a aprimorar esta tese e certamente contribuirão em trabalhos futuros.

Queridos pais, Celso e Eulalina, obrigada por terem me ensinado a dar muito valor ao estudo e a procurar fazer tudo na vida com muito cuidado e capricho. Vocês me propiciaram uma vida de confortos que permitiu que eu chegasse até aqui.

Queridos irmãos Eleonora, Celso e Letícia, obrigada pela parceria e cumplicidade nas artes e descobertas da infância, que tanto influenciaram o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Querido Isac, obrigada por me ouvir em inúmeras horas de terapia e por dividir comigo sua ampla experiência de vida. Você me ajudou a entender melhor o mundo e a mim mesma.

Queridos professores, todos vocês contribuíram muito para a minha formação acadêmica. À Célia e ao Lucchesi deixo um agradecimento especial por terem despertado em mim a paixão por grafos. Ao Rezende agradeço por ter me estimulado a estudar profundamente indução.

Minhas queridas amigas e confidentes Ana Monteiro, Islene, Tissiana, Lúcia e Tiemi, obrigada por terem me escutado, consolado e aconselhado tantas vezes nesses longos anos cheios de altos e baixos.

Deixo ainda meus sinceros agradecimentos aos tantos outros amigos que muito torceram por mim nesta longa jornada. Não conseguirei listar todos aqui, mas saibam que me lembro das palavras de encorajamento e carinho de cada um. Toda essa torcida, vasta e distribuída, me fez seguir em frente.

Agradeço ainda à FAPESP, à Capes e ao meu pai pelo suporte financeiro.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Coloração em Grafos Planares . . . . .	1
1.2 Fluxos Inteiros . . . . .	2
1.3 Conjeturas de Tutte . . . . .	4
1.4 Variações da Conjetura dos 3-Fluxos . . . . .	5
1.5 Breve Revisão Bibliográfica . . . . .	6
1.6 Esta Tese . . . . .	7
<b>2 Grafos Fluxo-Críticos</b>	<b>11</b>
2.1 Definições Básicas . . . . .	11
2.2 Grafos Cor-Críticos . . . . .	12
2.3 Grafos Fluxo-Críticos: O Conceito Dual . . . . .	12
2.4 Conjeturas de Tutte e Grafos Fluxo-Críticos . . . . .	15
2.5 Propriedades de Grafos Críticos . . . . .	16
2.5.1 Propriedades de Grafos Cor-Críticos . . . . .	17
2.5.2 Propriedades de Fluxos . . . . .	18
2.5.3 Propriedades de Grafos Aresta-Críticos . . . . .	22
2.5.4 Propriedades de Grafos Vértice-Críticos . . . . .	27
2.6 A 3-Conexidade de Contra-Exemplos Mínimos . . . . .	28
<b>3 Conexidade Cíclica do Contra-Exemplo Mínimo para 3-Fluxos</b>	<b>31</b>
3.1 Pentas e o Teorema Principal . . . . .	31
3.1.1 Os Pentas Pequenos . . . . .	32
3.2 Implicações do Teorema Principal . . . . .	34

3.3	Demonstração do Teorema Principal . . . . .	37
3.3.1	Contrações de Vértices . . . . .	37
3.3.2	Propriedades Elementares . . . . .	38
3.3.3	A Regularidade de $G_*$ . . . . .	39
3.3.4	Redução de Cortes Pequenos . . . . .	44
3.3.5	Análise de 3-Cortes . . . . .	47
3.3.6	Análise de 4-Cortes . . . . .	48
3.3.7	Análise de 5-Cortes . . . . .	50
3.3.8	Análise de 6-Cortes . . . . .	53
3.3.9	Análise de 7-Cortes . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Nova Demonstração do Teorema de Grötzsch</b>	<b>85</b>
4.1	Configurações $\langle s, t \rangle$ . . . . .	86
4.2	Redução a Configurações $\langle 6, 0 \rangle$ . . . . .	87
4.3	$L$ -coloração de Configurações $\langle 6, 0 \rangle$ e $\langle 4, 1 \rangle$ . . . . .	90
4.3.1	Configurações $\langle 6, 0 \rangle$ . . . . .	92
4.3.2	Configurações $\langle 4, 1 \rangle$ . . . . .	94
4.3.3	Reduções Auxiliares . . . . .	98
4.4	Observações Finais . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>
	<b>Índice</b>	<b>113</b>

# Lista de Figuras

2.1	O grafo $\hat{\Theta}$ , que é 4-aresta-crítico mas não é 4-vértice-crítico . . . . .	13
2.2	O grafo $\hat{\Theta}/ab$ não admite 3-orientação . . . . .	13
2.3	O grafo $\hat{\Theta}$ é 4-aresta-crítico . . . . .	14
2.4	Contração de vértices pode criar um <i>minor</i> isomorfo ao grafo de Petersen . . . . .	16
3.1	Os nove $r$ -pentos, com $r \leq 7$ . . . . .	33
3.2	Ilustração para a demonstração do Corolário 3.5 . . . . .	35
3.3	Ilustração para a demonstração do Corolário 3.6 . . . . .	36
3.4	Divisão do vértice $v$ nas arestas $e_1$ e $e_2$ . . . . .	40
3.5	Cruzamento dos cortes $C$ e $D$ . . . . .	42
3.6	Ilustração da demonstração do Lema 3.14 . . . . .	45
3.7	Os grafos $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ , os únicos com multiplicidade três nas arestas de $C$ . . . . .	46
3.8	A expansão de $G$ quando $C$ é um 4-corte . . . . .	49
3.9	A expansão de $G$ quando $C$ é um 5-corte . . . . .	50
3.10	Os dois tipos de expansões de $G$ quando $C$ é um 6-corte . . . . .	55
3.11	Caso em que $D'$ é um 4-corte e $\nu = 2$ . . . . .	56
3.12	O grafo $\gamma$ e seu grafo de compatibilidades $J_\gamma$ . . . . .	62
3.13	Os três tipos de expansões de $G$ quando $C$ é um 7-corte . . . . .	64
3.14	Ilustração da demonstração do Lema 3.41 . . . . .	66
3.15	Arestas $e_2$ e $e_3$ incidentes em $z_1$ , $e_1$ em $z_2$ e as demais em $z_3$ . . . . .	70
3.16	Arestas $e_1$ e $e_5$ incidentes em $z_1$ , $e_2$ , $e_3$ e $e_4$ em $z_2$ e $e_6$ e $e_7$ em $z_3$ . . . . .	71
3.17	Arestas de $C - Q$ incidem em $z_1$ e arestas de $Q$ em $z_2$ . . . . .	73
3.18	Ilustração da demonstração do Lema 3.52 . . . . .	76
3.19	Ilustração da demonstração do Lema 3.53 . . . . .	77
3.20	O grafo $J$ no caso em que $e_1$ e $f$ são paralelas em $G$ mas não adjacentes em $J$ e $ \hat{S}_G  = 1$ . . . . .	79
3.21	O grafo $J$ no caso em que $e_1$ e $f$ são paralelas em $G$ mas não adjacentes em $J$ e $ \hat{S}_G  = 2$ . . . . .	80
3.22	O grafo $J$ no caso em que $e_1$ não é múltipla em $G$ , com $ \hat{S}_G  = 1$ e $\delta = 2$ . . . . .	81
3.23	O grafo $J$ no caso em que $e_1$ não é múltipla em $G$ , com $ \hat{S}_G  = 1$ e $\delta = 3$ . . . . .	81

3.24	O grafo $J$ no caso em que $e_1$ não é múltipla em $G$ , com $ \hat{S}_G  = 2$ e $\delta = 2$	83
4.1	Exemplos de configurações $\langle 6, 0 \rangle$ e $\langle 4, 1 \rangle$ . Os vértices de $V_1$ são representados por quadrados pretos, os de $V_2$ por quadrados brancos e os de $V_3$ por círculos brancos	87
4.2	Redução de quadrilátero facial	88
4.3	O quadrilátero separador $P$ particiona $\tilde{G}$ em $\tilde{G}_0$ e $\tilde{G}_1$	89
4.4	A vizinhança da aresta especial	91
4.5	Caso em que há no máximo quatro vértices coloridos	92
4.6	Remoção de $v_{q-1}$ e $v_q$	93
4.7	Remoção de $v_k$ e $v_{k+1}$ no caso em que nem $v_{k-2}$ nem $v_{k+3}$ pertence a $V_2$	95
4.8	Faces pentagonais distintas contendo $v_{k-1}$ , $v_k$ e $v_{k+1}$	96
4.9	Remoção de $v_{k-1}$ e $v_{k-2}$ quando há face pentagonal contendo $v_{k-1}$ , $v_k$ e $v_{k+1}$	97
4.10	Remoção de $v_{k-1}$ , $v_k$ e $v_{k+1}$ quando não há face pentagonal que os contém	97
4.11	Algumas configurações de $B_1$ quando $P$ tem índice zero	100
4.12	Corda ligando o vértice interno $u$ de $P$ a um vértice $w$ de $V_1 \cup V_2$	103
4.13	Algumas configurações de $B_1$ quando $P$ tem índice um	104
4.14	Algumas configurações de $B_1$ quando $P$ tem índice dois	106
4.15	Corda ligando o vértice interno $u$ de $P$ a um vértice $w$ de $V_1 \cup V_2$	106
4.16	Uma configuração $\langle 7, 0 \rangle$ que não admite uma lista-coloração de seus vértices.	107
4.17	Uma configuração $\langle 5, 1 \rangle$ que não admite uma lista-coloração de seus vértices.	108



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Coloração em Grafos Planares

Seja  $M$  uma imersão planar de um grafo  $G$ ,  $F$  seu conjunto de faces e  $k$  um inteiro. Dada uma função  $c : F \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , dizemos que, para uma dada face  $f$ ,  $c(f)$  é a *cor da face*  $f$ . A função  $c$  será uma  *$k$ -coloração de faces* se todo par de faces adjacentes tiver cores distintas.

Podemos dizer, sem sombra de dúvida, que o problema mais famoso da Teoria dos Grafos é o Teorema das Quatro Cores enunciado a seguir.

**TEOREMA 1.1 (DAS QUATRO CORES)**

*Todo mapa planar sem arestas de corte admite uma 4-coloração de suas faces.*

Essa afirmação foi proposta em meados do século XIX e permaneceu sem resposta por mais de um século quando então, em 1977, Appel, Haken e Koch [2, 3] apresentaram a primeira demonstração do Teorema. Essa demonstração depende da análise de mais de mil configurações, a qual foi realizada com a ajuda de programas computacionais, tornando-se assim a primeira demonstração com auxílio de computadores. Mais recentemente, em 1997, Robertson, Seymour, Sanders e Thomas [18] publicaram uma nova versão desta demonstração que utiliza a mesma técnica e ainda depende da análise de muitos casos, mas o número deles foi reduzido para algumas centenas. Novamente, os autores recorreram a programas computacionais para a análise dos casos.

No longo período que separou a proposição do Teorema das Quatro Cores de sua demonstração, diversas aproximações e variações do problema foram estudadas e propostas. Dentre estas destacamos o Teorema das Cinco Cores de Heawood [10], demonstrado em 1890:

**TEOREMA 1.2 (DAS CINCO CORES)**

*Todo mapa planar sem arestas de corte admite uma 5-coloração de suas faces.*

O estudo de coloração de vértices também surge como uma tentativa de atacar o Problema das Quatro Cores. O conceito é análogo ao de coloração de faces. Ou seja, dados um grafo  $G$  com conjunto de vértices  $V$  e um inteiro  $k$ , dizemos que uma função  $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  é uma  $k$ -coloração de vértices se todo par de vértices adjacentes tiver cores distintas.

A dualidade planar garante que um grafo planar  $G$  admite uma  $k$ -coloração de faces se e somente se seu dual admite uma  $k$ -coloração de vértices. Portanto, para todo teorema relacionado a coloração de faces de grafos planares, existe uma versão dual em termos de coloração de vértices e vice-versa. A título de exemplo, eis a versão dual do Teorema das Quatro Cores:

TEOREMA 1.3 (DAS QUATRO CORES DUALIZADO)

*Todo mapa planar sem laços admite uma 4-coloração de vértices.*

Note que a dualidade planar leva cortes de arestas em ciclos e vice-versa. A relação de equivalência entre coloração de faces e de vértices não necessariamente existe para grafos não imersíveis no plano. Na verdade, o conceito de coloração de vértices é mais geral que o de coloração de faces, pois não depende da fixação de uma superfície de imersão.

O Teorema de Grötszch [8], demonstrado em 1958, é outra importante aproximação do Teorema das Quatro Cores. Foi enunciado em termos de 3-coloração de vértices e se restringe a grafos planares.

TEOREMA 1.4 (DE GRÖTSZCH)

*Todo grafo planar sem laços e sem triângulos admite uma 3-coloração de vértices.*

## 1.2 Fluxos Inteiros

Considere um grafo orientado  $D$  que pode ter arestas paralelas, as quais podem ser orientadas em sentidos diferentes. Seja  $\varphi : E(D) \rightarrow \mathbb{Z}$  uma *função peso* que associa a cada aresta  $e$  de  $D$  um inteiro  $\varphi(e)$ , denominado *peso* de  $e$ . Dado um vértice  $v$  de  $D$ , definimos o *fluxo líquido de saída de  $v$*  (ou simplesmente fluxo líquido de  $v$ ), denotado por  $\varphi(v)$ , como a soma dos pesos das arestas que saem de  $v$  menos a soma dos pesos das arestas que entram em  $v$ .

Dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , dizemos que o par  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo modular de  $G$  se as seguintes condições são verificadas:

- (i)  $D$  é uma orientação de  $G$ ,
- (ii)  $\varphi$  é uma função peso de  $D$ ,

- (iii) para cada aresta  $e$  de  $G$ , seu peso satisfaz a relação  $\varphi(e) \not\equiv 0 \pmod{k}$  e,
- (iv) para cada vértice  $v$  de  $G$ , seu fluxo líquido satisfaz a congruência  $\varphi(v) \equiv 0 \pmod{k}$ .

Um  $k$ -fluxo modular será um  $k$ -fluxo de  $G$  se as seguintes condições adicionais forem satisfeitas:

- (v) para cada aresta  $e$  de  $G$ , o valor em módulo de seu peso satisfaz a inequação  $0 < |\varphi(e)| < k$  e,
- (vi) para cada vértice  $v$  de  $G$ , o fluxo líquido  $\varphi(v)$  de  $v$  é nulo.

Veremos no Capítulo 2 que em algumas situações é conveniente relaxar a condição (iii) e permitir que algumas arestas tenham peso múltiplo de  $k$  em um  $k$ -fluxo modular. Quando este for o caso, diremos que o par  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo modular parcial e que as arestas com peso não múltiplo de  $k$  formam o *suporte* de  $\varphi$ , denotado por  $\text{sup}(\varphi)$ . Analogamente, podemos relaxar a inequação da condição (v) para  $0 \leq |\varphi(e)| < k$ , admitindo assim que algumas arestas tenham peso nulo em um  $k$ -fluxo. Quando este for o caso, diremos que o par  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo parcial e que as arestas com peso não nulo formam o *suporte* de  $\varphi$ , denotado também neste caso por  $\text{sup}(\varphi)$ .

Os conceitos de  $k$ -fluxo modular e  $k$ -fluxo foram propostos por Tutte [27] em 1954. No mesmo artigo em que introduz esses conceitos, Tutte demonstra que todo  $k$ -fluxo modular pode ser convertido em um  $k$ -fluxo. Portanto:

**TEOREMA 1.5**

*Um grafo  $G$  admite um  $k$ -fluxo se e somente se admite um  $k$ -fluxo modular.*

Demonstrações deste teorema são facilmente encontradas na literatura. Como exemplos citamos o novo livro de Bondy e Murty [5], o livro de Zhang [31] e os artigos de Younger [30] e Seymour [21].

Tutte também demonstrou em seu artigo introdutório a seguinte relação importante:

**TEOREMA 1.6**

*Um grafo planar  $G$  admite uma  $k$ -coloração de faces se e somente se admite um  $k$ -fluxo modular.*

Demonstrações deste teorema podem ser encontradas em um artigo de Younger [30] e no livro de West [29, Theorem 7.3.22].

Dado um grafo conexo  $G$  (orientado ou não) e um conjunto  $X$  de vértices de  $G$ , dizemos que o *corte* de  $X$ , denotado  $\partial(X)$ , é o conjunto das arestas de  $G$  com um extremo em  $X$  e o outro em seu complemento  $\bar{X}$ . Dado um conjunto de vértices  $X$  de um grafo orientado  $D$ , denotamos por  $\partial^+(X)$  o conjunto das arestas do corte de  $X$  orientadas saindo de  $X$

e por  $\partial^-(X)$  o conjunto das arestas do corte de  $X$  orientadas entrando em  $X$ . O *fluxo líquido no corte de  $X$*  (ou simplesmente *fluxo líquido em  $X$* ), denotado por  $\varphi(X)$ , é igual à diferença entre a soma dos pesos das arestas de  $\partial^+(X)$  e a soma dos pesos daquelas em  $\partial^-(X)$ . Portanto:

$$\varphi(X) := \sum_{e \in \partial^+(X)} \varphi(e) - \sum_{e \in \partial^-(X)} \varphi(e).$$

Um simples argumento de contagem nos permite tirar duas conclusões interessantes. A primeira é que o fluxo líquido em  $X$  é dado pela soma dos fluxos líquidos de seus vértices constituintes. A segunda é que os fluxos líquidos em  $X$  e em  $\bar{X}$  são complementares. Essas relações são destacadas na Proposição 1.7 a seguir.

#### PROPOSIÇÃO 1.7

Para todo conjunto  $X$  de vértices de  $D$  e qualquer função peso  $\varphi$ , as seguintes igualdades se verificam:

$$\varphi(X) = \sum_{v \in X} \varphi(v) \quad e \quad \varphi(X) = -\varphi(\bar{X}).$$

A primeira igualdade da Proposição 1.7 e a definição de  $k$ -fluxo implicam que, em qualquer  $k$ -fluxo  $(D, \varphi)$ , todo corte de  $D$  deve ter fluxo líquido nulo. Por outro lado, como nenhuma aresta pode ter peso nulo, deduzimos que grafos com aresta de corte não podem admitir um  $k$ -fluxo para qualquer que seja o valor de  $k$ . Logo, se um grafo  $G$  tem um  $k$ -fluxo para algum  $k \geq 2$ , então  $G$  é 2-aresta-conexo.

### 1.3 Conjeturas de Tutte

A observação do Teorema 1.6 permitiu que Tutte propusesse três conjeturas que generalizam os teoremas de coloração apresentados na Seção 1.1. Estas são as Conjeturas dos 5-, 4- e 3-Fluxos enunciadas a seguir. Dizemos que um grafo  $H$  é um *minor* de um grafo  $G$  se  $H$  é um subgrafo de  $G$  ou se  $H$  pode ser obtido a partir de um subgrafo  $H'$  de  $G$  pela contração de uma ou mais arestas de  $H'$ .

#### CONJETURA 1.8 (DOS 5-FLUXOS)

Todo grafo 2-aresta-conexo admite um 5-fluxo.

#### CONJETURA 1.9 (DOS 4-FLUXOS)

Todo grafo 2-aresta-conexo livre de minors isomorfos ao grafo de Petersen admite um 4-fluxo.

## CONJETURA 1.10 (DOS 3-FLUXOS)

*Todo grafo 2-aresta-conexo livre de 3-cortes admite um 3-fluxo.*

As três conjeturas de Tutte são generalizações dos Teoremas das Cinco Cores, das Quatro Cores e de Grötszsch para grafos não necessariamente planares. É fácil ver que, quando restritas a grafos planares, as Conjeturas de Tutte recaem nos três teoremas de coloração. Nenhum grafo planar possui um *minor* isomorfo ao grafo de Petersen já que este não é planar. O que é mais difícil de entender é por que estas generalizações seriam válidas.

As três conjeturas não foram propostas em um mesmo momento. A Conjetura dos 5-Fluxos foi a primeira a ser proposta, já no artigo introdutório sobre  $k$ -fluxos [27] de 1954. A Conjetura dos 4-Fluxos foi proposta anos mais tarde, em 1966 [28], e a Conjetura dos 3-Fluxos mais tarde ainda, em 1972, em um seminário dado por Tutte [17]. As primeiras referências impressas à Conjetura dos 3-Fluxos são de 1976, estas são o antigo livro de Bondy e Murty [4, Unsolved Problem 48] e a tese de mestrado de Steinberg [22]. Aparentemente, mesmo Tutte levou um bom tempo para enxergar e se convencer de que estas generalizações deveriam valer. No novo livro de Bondy e Murty [5], os problemas abertos de números 95, 96 e 97 são as três conjeturas de Tutte. Bondy e Murty consideram que estas conjeturas são os problemas mais significativos da Teoria dos Grafos como um todo.

## 1.4 Variações da Conjetura dos 3-Fluxos

Nesta seção apresentamos duas conjeturas equivalentes à Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte. Antes de enunciá-las é necessário dar algumas definições.

Uma *3-orientação* de um grafo  $G$  é uma orientação  $D$  de  $G$  tal que o par  $(D, \mathbf{1})$  é um 3-fluxo-modular, onde  $\mathbf{1}$  é a função constante de valor unitário em cada aresta. Temos que:

## TEOREMA 1.11

*Um grafo admite um 3-fluxo se e somente se admite uma 3-orientação.*

Demonstração: Se  $G$  admite uma 3-orientação então  $G$  admite um 3-fluxo-modular e, portanto, admite um 3-fluxo pelo Teorema 1.5. Reciprocamente, se  $(D, \varphi)$  for um 3-fluxo modular de  $G$  então podemos, para cada aresta  $e$  tal que  $\varphi(e) \equiv 2 \pmod{3}$ , substituir o peso pelo valor unitário e inverter a orientação de  $e$ , obtendo assim uma 3-orientação. De fato,  $G$  admite uma 3-orientação se e somente se  $G$  admite um 3-fluxo.  $\square$

Dado um corte  $C := \partial(X)$  de um grafo conexo  $G$ , dizemos que  $X$  e  $\overline{X}$  são as duas *praias* do corte  $C$ . Se uma das praias de  $C$  é unitária, dizemos que o corte  $C$  é *trivial*. Dizemos que o corte  $C$  *separa* um conjunto  $S$  de vértices de  $G$  se todas as praias do

corde contém vértices de  $S$ . Agora podemos enunciar as duas conjeturas equivalentes à Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte.

**CONJETURA 1.12 (CONJETURA DOS TRÊS 3-CORTES)**

*Todo grafo 2-aresta-conexo com no máximo três 3-cortes, todos triviais, admite uma 3-orientação.*

**CONJETURA 1.13 (CONJETURA DOS 3-CORTES SEPARADORES)**

*Seja  $G$  um grafo 2-aresta-conexo e  $S$  um conjunto de vértices de  $G$ . Se  $|S| \leq 3$  e todo 3-corte de  $G$  separa  $S$ , então  $G$  admite uma 3-orientação.*

Assim como a Conjetura dos 3-Fluxos, a Conjetura dos Três 3-Cortes é o dual planar de um teorema de coloração, uma relaxação do Teorema de Grötszsch, que foi demonstrado independentemente por Grünbaum [9] e Aksionov [1] e que afirma que todo planar sem laços e com não mais que três triângulos tem uma 3-coloração de vértices. A Conjetura dos 3-Cortes Separadores foi primeiro considerada na dissertação de mestrado de Leila Silva [6]. A equivalência da Conjetura dos 3-Cortes Separadores e da Conjetura dos Três 3-Cortes já é conhecida há algum tempo, mas foi Kochol que trouxe à tona, em seu artigo de 2002 [14], a equivalência destas e da Conjetura dos 3-Fluxos.

No Capítulo 3 mostraremos que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores (juntamente com um conjunto  $S$  apropriado) é também um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos Três 3-Cortes e vice-versa. É evidente que um contra-exemplo para a Conjetura dos 3-Fluxos é também um contra-exemplo para a Conjetura dos Três 3-Cortes. O que Kochol mostra no artigo [14] é que, dado um contra-exemplo  $G$  para a Conjetura dos Três 3-Cortes, é possível construir a partir de  $G$  um contra-exemplo  $H$  para a Conjetura dos 3-Fluxos. Cabe observar que o tamanho de  $H$  (em número de vértices) é quatro vezes maior que o de  $G$ . Assim, a propriedade de minimalidade de um contra-exemplo  $G$  para a Conjetura dos Três 3-Cortes não necessariamente se transfere para o contra-exemplo  $H$  da Conjetura dos 3-Fluxos obtido pelo método de Kochol.

## 1.5 Breve Revisão Bibliográfica

Nesta seção faremos uma breve revisão bibliográfica do tema, destacando apenas os resultados mais importantes da área e aqueles mais relevantes no contexto desta tese. Boas revisões bibliográficas sobre o tema podem ser encontradas nos livros de Bondy e Murty [5], Zhang [31] e Diestel [7] e também no artigo de Seymour [21].

Jaeger [11], em 1976 e Kilpatrick [13], em 1975, obtiveram a primeira aproximação da Conjetura dos 5-Fluxos de Tutte, demonstrando o Teorema dos 8-Fluxos, que afirma

que todo grafo 2-aresta-conexo admite um 8-fluxo. Até então, sequer era conhecida a existência de um inteiro  $k$  tal que todo grafo 2-aresta-conexo admite um  $k$ -fluxo. Alguns anos mais tarde, em 1981, Seymour [20] melhorou essa aproximação com o Teorema dos 6-Fluxos, que afirma que todo grafo 2-aresta-conexo admite um 6-fluxo. Em 1976, Jaeger [11] também demonstrou uma aproximação da Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte, o Teorema dos 4-Fluxos, que afirma que todo grafo 4-aresta-conexo admite um 4-fluxo. Inspirado pelos Teoremas dos 8- e dos 4-Fluxos, Jaeger [12] propôs em 1979 a Conjetura Fraca dos 3-Fluxos, que afirma que existe um  $k$  tal que todo grafo  $k$ -aresta-conexo admite um 3-fluxo. Essa conjectura permanece aberta até hoje.

Ainda relativo à Conjetura dos 3-Fluxos, citamos o artigo de Steinberg e Younger [23], que demonstraram a Conjetura dos 3-Fluxos para grafos planares com até três 3-cortes e para grafos imersíveis no plano projetivo com até um 3-corte. Abordando o problema em termos de 3-colorações, Thomassen [25] demonstra, em 1994, que todo grafo livre de triângulos e de quadriláteros e imersível no toro ou no plano projetivo tem uma 3-coloração de vértices. Posteriormente, em 2003, Thomassen [26] dá uma nova demonstração do Teorema de Grötzsch que não utiliza a Fórmula de Euler como a original. Esta nova demonstração é baseada na mesma técnica utilizada por Thomassen anos antes, no artigo [24], que apresenta uma demonstração simples e elegante do Teorema das Cinco Cores em termos de coloração por listas.

Mais recentemente, em 1997, Robertson, Seymour and Thomas [19] demonstraram a Conjetura dos 4-fluxos para a subclasse dos grafos cúbicos, um resultado de bastante impacto.

Ainda mais recentemente, Kochol traz alguns resultados interessantes sobre propriedades dos contra-exemplos mínimos da Conjetura dos 5-Fluxos. Em um artigo de 2004, Kochol [15] demonstrou que estes são 6-cíclicamente-aresta-conexos e em outro [16], de 2006, demonstrou que estes têm cintura nove ou mais.

## 1.6 Esta Tese

Conforme mencionamos na Seção 1.1, o famoso Teorema das Quatro Cores levou mais de uma centena de anos para ser demonstrado. Durante esse longo processo, diversos problemas semelhantes foram estudados na tentativa de se entender melhor como demonstrar esse teorema escorregadio, e assim se desenvolveram diversas áreas de teoria dos grafos, hoje em dia clássicas e com muitas aplicações práticas. As três Conjeturas de Tutte, os problemas mais famosos em fluxos inteiros, surgiram dessa forma. Estas são uma generalização para grafos não necessariamente planares de teoremas famosos em coloração de grafos planares, incluindo o célebre Teorema das Quatro Cores. Não é surpreendente portanto que estas três conjecturas venham resistindo à demonstração por várias décadas.

Os avanços mais relevantes presentes na literatura são poucos e muito espaçados ao longo do tempo, comprovando assim a dificuldade intrínseca do tema.

Nesta tese apresentamos algumas abordagens de estudo das conjecturas de Tutte, sendo estas bastante diversas entre si. Cada capítulo apresenta uma das abordagens e, para cada uma delas, há uma contribuição original. Durante o desenvolvimento desta tese lidamos de perto com a dificuldade intrínseca dos problemas estudados. Mudamos de abordagem algumas vezes e, para cada abordagem de estudo, enfrentamos várias dificuldades em progredir, tanto na busca por resultados novos quanto na melhoria dos já obtidos. Como resultado temos uma tese que traduz essa vivência do assunto e abre muitos caminhos para pesquisas futuras, sendo um bom ponto de partida para quem pretende fazer pesquisa no tema.

No Capítulo 2 apresentamos um estudo de grafos *fluxo-críticos*, conceito introduzido por nós em analogia aos já bem conhecidos grafos críticos para coloração de vértices ou grafos *cor-críticos*. Assim como para coloração de vértices, podemos definir o *número de fluxo* de um grafo  $G$  como o menor inteiro  $k$  tal que  $G$  admite um  $k$ -fluxo. Definimos de forma genérica os grafos fluxo-críticos como aqueles cujo número de fluxo diminui sempre que uma determinada operação de redução é aplicada. Estudamos duas operações de redução em particular, a contração de um conjunto de arestas ou de um conjunto de vértices do grafo  $G$ . Estas operações definem duas classes específicas de grafos fluxo-críticos: os *aresta-críticos* e os *vértice-críticos*. Todo contra-exemplo mínimo para qualquer uma das Conjeturas de Tutte pertence a uma dessas duas classes. Essa foi nossa motivação para este estudo. Dentre os resultados obtidos destacamos os Teoremas 2.15 e 2.18, análogos para grafo aresta-críticos e vértice-críticos ao Teorema de Dirac (veja [5, Theorem 14.9]) para grafos cor-críticos, bem como a demonstração de que contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores são 3-conexos, resultados desconhecidos até então.

No Capítulo 3 estudamos a conexidade cíclica de contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Partimos de algumas propriedades já bem conhecidas de um tal contra-exemplo mínimo, como por exemplo, que este é 2-conexo e 3-aresta-conexo, para demonstrar que este tem vértices de graus três e cinco apenas e que é também 3-conexo, 8-ciclicamente-aresta-conexo e 4-ciclicamente-conexo. Na verdade, demonstramos que em um tal contra-exemplo mínimo os cortes pequenos  $C$  com não mais que sete arestas são *pentas*, isto é, pelo menos uma de suas praias contém apenas vértices de grau três ou cinco que induzem uma floresta. Este fato implica as propriedades listadas acima.

O Teorema 3.1 apresentado no Capítulo 3 é uma importante contribuição desta tese. Os resultados sobre a conexidade cíclica de contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores são originais. Este trabalho foi em parte motivado por um artigo de Kochol [15] que demonstra que contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos



5-Fluxos são 6-ciclicamente-aresta-conexos. Também foi em parte motivado pelo trabalho apresentado no Capítulo 4, que trouxe à tona que na versão dual planar do problema, o Teorema de Grötzsch, é possível reduzir ciclos não faciais contendo entre quatro e sete arestas.

No Capítulo 4 apresentamos uma nova demonstração do Teorema de Grötzsch que não depende da utilização da Fórmula de Euler, como ocorre na demonstração original. A motivação para se buscar uma tal demonstração vem da observação que o uso da Fórmula de Euler na demonstração original de Grötzsch restringe a possibilidade de dualização dessa demonstração para algumas poucas superfícies de gênero baixo. Thomassen [26] foi pioneiro na apresentação de uma tal demonstração. A demonstração apresentada por Thomassen usa a idéia de fixar uma imersão do grafo no plano e colorir parcialmente vértices de sua fronteira de forma que seja possível estender essa coloração parcial para o grafo todo. A demonstração que apresentamos no Capítulo 4 segue a mesma idéia da de Thomassen, mas conseguimos relaxar uma das propriedades que devem ser satisfeitas pela coloração parcial para que esta seja extensível para o grafo todo. Este trabalho foi desenvolvido em conjunto com os professores Daniel H. Younger e Bruce B. Richter da Universidade de Waterloo do Canadá.



# Capítulo 2

## Grafos Fluxo-Críticos

Neste capítulo introduzimos o conceito de grafos fluxo-críticos em analogia ao já tão difundido conceito de grafos cor-críticos. Conforme vimos no Capítulo 1, um grafo planar admite uma  $k$ -coloração de faces se e somente se admite um  $k$ -fluxo se e somente se seu dual admite uma  $k$ -coloração de vértices. Diferentemente do conceito de coloração de faces, os conceitos de coloração de vértices e fluxos inteiros independem de uma imersão do grafo, podendo assim ser vistos como generalizações de coloração de faces para grafos não necessariamente planares. Tendo em vista a relação entre os três conceitos para o caso planar, podemos ainda pensar que coloração de vértices e fluxos inteiros são conceitos duais. A definição e o estudo de grafos fluxo-críticos são uma tentativa de estabelecer essa relação de dualidade entre os dois problemas. Surpreendentemente, encontramos algumas fortes similaridades entre relações satisfeitas por grafos cor-críticos e grafos fluxo-críticos.

### 2.1 Definições Básicas

Seja  $G$  um grafo que pode ter laços e arestas paralelas. Dado um conjunto  $F$  de arestas de  $G$ , o grafo  $G/F$  é obtido a partir de  $G$  pela contração de todas as arestas de  $F$ . De forma similar,  $G - F$  é o grafo obtido a partir de  $G$  pela remoção de todas as arestas de  $F$ . Quando  $F$  contém uma única aresta  $e$ , denotaremos simplesmente por  $G/e$  ou  $G - e$  o grafo resultante da contração ou da remoção da aresta  $e$ . Dado um conjunto não trivial  $X$  de vértices de  $G$ , ou seja  $|X| \geq 2$ , denotamos por  $G/X$  o grafo obtido a partir de  $G$  pela contração de todos os vértices de  $X$  a um único vértice. Note que toda aresta de  $G$  com ambos os extremos em  $X$  é um laço de  $G/X$ . Quando  $X$  contém precisamente um par de vértices  $u$  e  $v$ , denotamos simplesmente por  $G/uv$  o grafo obtido a partir de  $G$  após a contração de  $u$  e  $v$  a um único vértice. O grafo  $G + uv$  é obtido a partir de  $G$  após a adição de uma nova aresta ligando  $u$  e  $v$ .

## 2.2 Grafos Cor-Críticos

O conceito de grafo cor-crítico já é bem conhecido na Teoria dos Grafos. Uma discussão sobre o assunto pode ser encontrada no livro de Bondy e Murty [5, Chapter 14]. O *número cromático* de um grafo  $G$  livre de laços é o menor inteiro  $k$  tal que  $G$  tem uma  $k$ -coloração de vértices. Denotamos por  $\chi(G)$  o número cromático do grafo  $G$ . Podemos estender o conceito de número cromático a grafos com laços definindo que  $\chi(G) = \infty$  se  $G$  tiver laços. O grafo  $G$  é *cor-crítico* se  $\chi(H) < \chi(G)$  para todo subgrafo próprio  $H$  de  $G$ .

## 2.3 Grafos Fluxo-Críticos: O Conceito Dual

Recordamos que o número de fluxo de um grafo  $G$  é o menor inteiro  $k$  tal que  $G$  admite um  $k$ -fluxo. Denotaremos por  $\Phi(G)$  o número de fluxo de  $G$ . Se  $G$  é livre de 1-cortes, então sabemos pelo Teorema dos 6-Fluxos de Seymour [20] que  $G$  admite um 6-fluxo, logo,  $\Phi(G) \leq 6$ . Se  $G$  tem 1-cortes, então  $G$  não admite  $k$ -fluxo para nenhum valor de  $k$ ; nesse caso, dizemos que  $\Phi(G) = \infty$ . Um grafo  $G$  é *fluxo-crítico* se tem pelo menos duas arestas e  $\Phi(H) < \Phi(G)$  para todo grafo menor  $H$  obtido a partir de  $G$  após alguma *operação de redução*. Assim, o conceito de grafo fluxo-crítico é o análogo dual do conceito de grafo cor-crítico.

Na definição de grafos cor-críticos as operações de redução permitidas foram a remoção de vértices ou de arestas. Note que nenhuma destas operações pode levar a aumento do número cromático. Para fluxos, a situação é diferente, a remoção de vértices ou arestas pode sim aumentar o número de fluxo. Por exemplo,  $\Phi(K_5) = 2$ , mas  $\Phi(K_4) = 4$ ; da mesma forma  $\Phi(C_3) = 2$  mas  $\Phi(P_3) = \infty$ . Por outro lado, contrações de arestas ou de conjuntos de vértices certamente não aumentam o número de fluxo. Por esse motivo concentraremos nosso estudo nessas operações de redução.

Definimos dois tipos de grafos fluxo-críticos, de acordo com o tipo de contração utilizada. Na primeira definição a operação de redução considerada é a contração de arestas. Um grafo  $G$  é *aresta-crítico* se tem pelo menos duas arestas e  $\Phi(G/S) < \Phi(G)$  para todo conjunto não nulo  $S$  de arestas de  $G$ . Na segunda definição a operação de redução considerada é a contração de um conjunto não trivial de vértices, isto é, conjuntos com pelo menos dois vértices. Um grafo  $G$  é *vértice-crítico* se tem pelo menos duas arestas e  $\Phi(G/X) < \Phi(G)$  para todo conjunto não trivial  $X$  de vértices de  $G$ . Por conveniência, estamos exigindo em ambas as definições que os grafos fluxo-críticos tenham duas ou mais arestas, a fim de simplificar os enunciados dos resultados que vamos mostrar. Quando  $\Phi(G) = k$  é especificado, dizemos que  $G$  é *k-aresta-crítico* ou *k-vértice-crítico*, respectivamente.

Segue imediatamente da definição que todo grafo  $k$ -vértice-crítico sem laços é também

$k$ -aresta-crítico. É natural questionar-se sobre a recíproca, isto é, se todo grafo  $k$ -aresta-crítico é também  $k$ -vértice-crítico. Mas a recíproca não vale. Na Figura 2.1 mostramos o grafo  $\hat{\Theta}$ , um exemplo de um grafo que é 4-aresta-crítico, mas não é 4-vértice-crítico. Para verificar que  $\hat{\Theta}$  não é 4-vértice-crítico basta observar que o grafo  $\hat{\Theta}/ab$ , resultante da

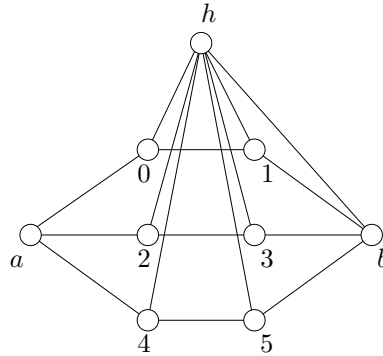


Figura 2.1: O grafo  $\hat{\Theta}$ , que é 4-aresta-crítico mas não é 4-vértice-crítico

contração dos vértices  $a$  e  $b$  a um único vértice, não admite uma 3-orientação. Note que, conforme ilustrado pela Figura 2.2, qualquer orientação das arestas de  $\hat{\Theta}/ab$  que equilibra módulo 3 todos os seus vértices de grau três (aqueles de rótulos numéricos), deixa os vértices  $ab$  e  $h$  desequilibrados módulo 3. Para verificar que  $\hat{\Theta}$  é 4-aresta-crítico, basta

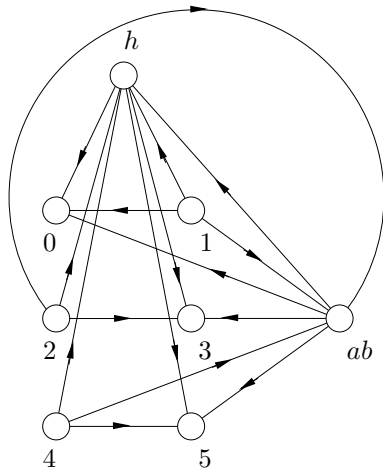


Figura 2.2: O grafo  $\hat{\Theta}/ab$  não admite 3-orientação

observar que, para qualquer aresta  $e$  de  $\hat{\Theta}$ , o grafo  $\hat{\Theta} - e$  tem uma 3-orientação, a qual é também uma 3-orientação de  $\hat{\Theta}/e$ . Na Figura 2.3 mostramos 3-orientações de  $\hat{\Theta} - e$  para toda aresta  $e$  de  $\hat{\Theta}$ , a menos de simetrias.

Para grafos planares, remoção e contração de arestas são operações duais. Ademais, ainda para grafos planares, uma  $k$ -coloração de vértices pode ser obtida a partir de um

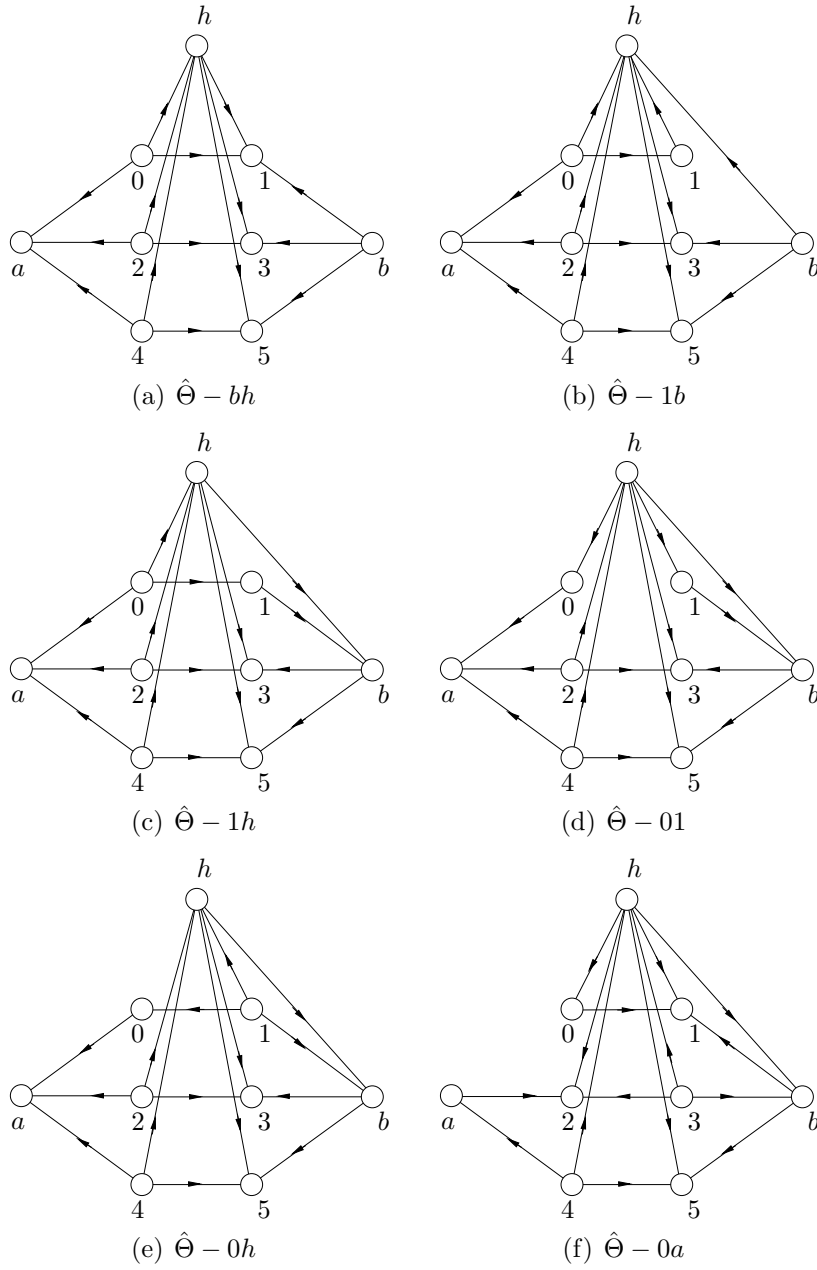


Figura 2.3: O grafo  $\hat{\Theta}$  é 4-aresta-crítico

$k$ -fluxo para o grafo dual e vice-versa. Podemos então interpretar o conceito de grafos aresta-críticos como uma dualização do conceito de grafos cor-críticos, apesar de nenhum dos dois conceitos ser restrito a grafos planares. Por outro lado, pelo Teorema 2.4 enunciado e demonstrado na Seção 2.5, as operações de contração e remoção de arestas, que são duais no plano, são na verdade equivalentes para grafos cor-críticos no seguinte sentido: a remoção de qualquer aresta diminui o número cromático de um grafo se e somente se a contração de qualquer aresta também diminui o número cromático do grafo. Analogamente, pelo Teorema 2.13, as operações de contração e remoção de arestas também são equivalentes para grafos aresta-críticos no sentido em que a remoção de qualquer aresta diminui o número de fluxo de um grafo se e somente se a contração de qualquer aresta também diminui o número de fluxo do grafo.

## 2.4 Conjeturas de Tutte e Grafos Fluxo-Críticos

Definimos o *tamanho* de um grafo  $G$  como a soma do número de vértices e de arestas. Segue da definição de grafos vértice-críticos e de sua caracterização demonstrada no Teorema 2.17, página 27, que todo contra-exemplo de tamanho mínimo para a Conjetura dos 5- ou 3-Fluxos é 6- ou 4-vértice-crítico, respectivamente.

### PROPOSIÇÃO 2.1

*Todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 5-Fluxos é 6-vértice-crítico e todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Fluxos é 4-vértice-crítico.*

Demonstração: Seja  $G$  um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 5-Fluxos. Como a contração de um conjunto de vértices não cria cortes novos, então  $\Phi(G/uv) \leq 5$  para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ . Logo,  $G$  é vértice-crítico. Na verdade, como  $\Phi(G) \geq 6$ , concluímos pelo Teorema 2.17 (ver página 27), que  $G$  é 6-vértice-crítico. Por raciocínio análogo deduzimos que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Fluxos é 4-vértice-crítico.  $\square$

Analogamente, segue da definição de grafos aresta-críticos e de sua caracterização demonstrada no Teorema 2.13, página 23, que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos é 5-aresta-crítico.

### PROPOSIÇÃO 2.2

*Todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos é 5-aresta-crítico.*

Demonstração: Seja  $G$  um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos. Como a contração de um conjunto de arestas não cria cortes de arestas novos e nem novos *minors*, então  $\Phi(G/e) \leq 4$  para toda aresta  $e$  de  $G$ . Logo,  $G$  é aresta-crítico. Na verdade, como  $\Phi(G) \geq 5$  concluímos pelo Teorema 2.13 (página 23), que  $G$  é de fato 5-aresta-crítico.  $\square$

Não sabemos dizer, no entanto, se todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos é 5-vértice-crítico. A assimetria deve-se ao fato que, em princípio, a contração de dois ou mais vértices de um contra-exemplo mínimo a um único vértice pode resultar em um grafo que tem um *minor* isomorfo ao grafo de Petersen, ao contrário do grafo original. Quando este é o caso, nada podemos dizer a respeito do número de fluxo do grafo resultante. Na Figura 2.4 mostramos um exemplo de um grafo que não tem um *minor* isomorfo ao grafo de Petersen em que a contração de dois de seus vértices resulta em um grafo que tem o grafo de Petersen como subgrafo. É evidente que o grafo da Figura 2.4 sequer é 5-vértice-crítico, caso contrário seria um contra-exemplo para a Conjetura dos 4-Fluxos.

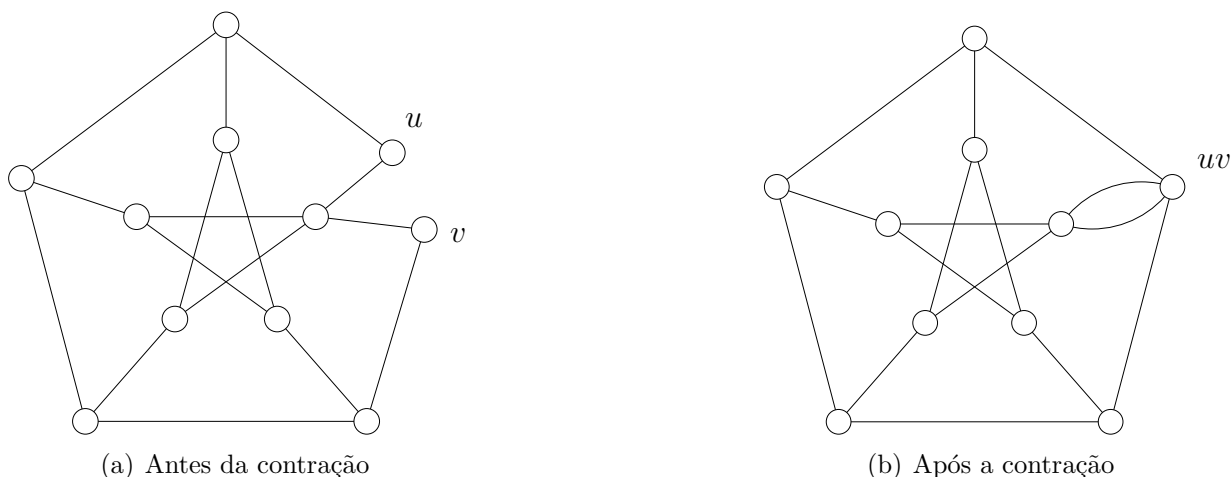


Figura 2.4: Contração de vértices pode criar um *minor* isomorfo ao grafo de Petersen

Assim sendo, boas caracterizações de grafos  $k$ -aresta e  $k$ -vértice-críticos para  $k = 4, 5, 6$  podem trazer à tona novas propriedades de contra-exemplos mínimos para as Conjeturas de Tutte. Portanto, o estudo de grafos fluxo-críticos surge como uma nova e interessante abordagem de investigação destas conjeturas.

## 2.5 Propriedades de Grafos Críticos

Nesta seção estabelecemos algumas propriedades de grafos cor-críticos e de grafos fluxo-críticos cuja similaridade impressiona.



### 2.5.1 Propriedades de Grafos Cor-Críticos

#### LEMA 2.3

Seja  $G$  um grafo sem laços e sem arestas paralelas. Então, para toda aresta  $e$  de  $G$ , a seguinte inequação é satisfeita:

$$\chi(G) - 1 \leq \chi(G - e) \leq \chi(G/e).$$

Demonstração: Seja  $e$  uma aresta de  $G$  com extremos  $u$  e  $v$ , e  $w$  o vértice de contração de  $G/e$ . Por hipótese, o grafo  $G$  é livre de laços. Então  $G - e$  também não tem laços. Por hipótese,  $G$  também é livre de arestas paralelas e, portanto,  $G/e$  não tem laços.

Toda  $k$ -coloração de vértices de  $G - e$  pode ser estendida a uma  $(k + 1)$ -coloração de vértices de  $G$  atribuindo-se uma nova cor ao vértice  $v$ . Logo,  $\chi(G) \leq \chi(G - e) + 1$ , e assim estabelecemos a validade do lado esquerdo da inequação. Toda  $k$ -coloração de vértices de  $G/e$  pode ser transformada em uma  $k$ -coloração de vértices de  $G - e$  atribuindo-se aos vértices  $u$  e  $v$  a cor do vértice de contração  $w$  em  $G/e$ . Assim, estabelecemos a validade do lado direito da inequação.  $\square$

#### TEOREMA 2.4

Seja  $G$  um grafo sem laços nem arestas paralelas e livre de vértices isolados. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) O grafo  $G$  é cor-crítico.
- (ii) Para toda aresta  $e$  de  $G$ ,  $\chi(G - e) = \chi(G) - 1$ .
- (iii) Para toda aresta  $e$  de  $G$ ,  $\chi(G/e) = \chi(G) - 1$ .

Demonstração: (ii)  $\Rightarrow$  (i): Suponha que  $\chi(G - e) = \chi(G) - 1$  para toda aresta  $e$  de  $G$ . Seja  $H$  um subgrafo próprio de  $G$ . Por hipótese,  $G$  é livre de vértices isolados. Logo,  $E(G) - E(H)$  é não vazio. Seja  $e$  uma aresta de  $E(G) - E(H)$ . Por hipótese,  $\chi(G - e) = \chi(G) - 1$ . Mas  $H$  é um subgrafo de  $G - e$ , portanto  $\chi(H) \leq \chi(G - e) = \chi(G) - 1$ . Esse argumento é válido para todo subgrafo próprio  $H$  de  $G$ , logo,  $G$  é de fato cor-crítico.

Para demonstrar as demais implicações, seja  $e$  uma aresta de  $G$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha que  $G$  é cor-crítico. Por definição,  $\chi(G - e) \leq \chi(G) - 1$ . Pelo Lema 2.3, vale a igualdade.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha que  $\chi(G/e) = \chi(G) - 1$ . Temos, pelo Lema 2.3, que  $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - e) \leq \chi(G/e) = \chi(G) - 1$ . Logo,  $\chi(G - e) = \chi(G) - 1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Seja  $k := \chi(G - e)$ . Então  $k = \chi(G) - 1$ . Seja  $\gamma$  uma  $k$ -coloração de vértices de  $G - e$ . Então,  $\gamma$  deve atribuir a mesma cor a  $u$  e  $v$ , caso contrário, esta seria uma

$k$ -coloração de vértices de  $G$ , uma contradição. Conseqüentemente, podemos transformar  $\gamma$  em uma  $k$ -coloração de vértices de  $G/e$ , atribuindo ao vértice de contração  $w$  a cor comum a  $u$  e  $v$ . Logo,  $\chi(G/e) \leq \chi(G - e)$ . Pelo Lema 2.3, vale a igualdade, ou seja,  $\chi(G/e) = \chi(G - e) = \chi(G) - 1$ .  $\square$

## 2.5.2 Propriedades de Fluxos

Nesta seção estabelecemos algumas propriedades elementares de  $k$ -fluxos parciais que serão utilizadas na caracterização de grafos aresta-críticos e de grafos vértice-críticos. Em todos os resultados vamos supor que  $G$  é um grafo,  $D$  é uma orientação de  $G$  e  $\varphi$  é uma função peso de  $D$ . Consideraremos que  $D + uv$  é a extensão de  $D$  a  $G + uv$  na qual a nova aresta é orientada de  $u$  para  $v$ .

LEMA 2.5

Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices de  $G$ . Seja  $k$  um inteiro, com  $k \geq 2$ . Suponha que  $\varphi(x) = 0$  para todo vértice  $x$  distinto de  $u$  e de  $v$ . Então, ou  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo modular de  $G$  ou  $\varphi$  pode ser estendida a uma função peso  $\varphi'$  de  $E(D + uv)$  tal que  $(D + uv, \varphi')$  é um  $k$ -fluxo modular de  $G + uv$ .

Demonstração: Seja  $m$  um inteiro tal que  $0 \leq m < k$  e  $\varphi(v) \equiv m \pmod{k}$ . Considere primeiro o caso em que  $m = 0$ . Pela Proposição 1.7,  $\varphi(u) \equiv 0 \pmod{k}$ . Neste caso,  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo modular de  $G$ . Considere agora o caso em que  $m > 0$ . Pela Proposição 1.7,  $\varphi(u) \equiv -m \pmod{k}$ . Estenda  $\varphi$  a uma função peso  $\varphi'$  de  $E(D + uv)$ , atribuindo a  $uv$  o peso  $m$ . Então,  $(D + uv, \varphi')$  é um  $k$ -fluxo modular de  $G + uv$ .  $\square$

Uma trilha  $P$  é  $\varphi$ -orientada segundo a orientação  $D$  se toda aresta orientada no sentido de percurso de  $P$  tem peso positivo e toda aresta orientada no sentido contrário ao do percurso de  $P$  tem peso negativo.

LEMA 2.6

Seja  $(D, \varphi)$  um  $k$ -fluxo modular parcial de um grafo  $G$ . Se  $v$  é um vértice de  $G$  com fluxo líquido positivo, então  $D$  possui um caminho  $\varphi$ -orientado de  $v$  a algum vértice de  $G$  com fluxo líquido negativo.

Demonstração: Seja  $X$  o conjunto de todos os vértices de  $G$  que são términos de caminhos  $\varphi$ -orientados com origem no vértice  $v$ . Certamente  $v$  está em  $X$ . Toda aresta de  $\partial(X)$  orientada saindo de  $X$  deve ter peso não positivo e toda aresta de  $\partial(X)$  orientada entrando em  $X$  deve ter peso não negativo. Portanto,  $\varphi(X) \leq 0$ . Por hipótese,  $\varphi(v) > 0$ . Além disso,  $v$  pertence a  $X$ . Pela Proposição 1.7,  $X$  contém pelo menos um vértice cujo fluxo líquido é negativo.  $\square$

## LEMA 2.7

Seja  $(D, \varphi)$  um  $k$ -fluxo de um grafo  $G$ . Então, para todo par de vértices  $(v, w)$  pertencente à mesma componente conexa de  $G$  existe um caminho  $\varphi$ -orientado em  $D$  de  $v$  a  $w$ .

Demonstração: Seja  $X$  o conjunto de todos os vértices de  $G$  que são termos de caminhos  $\varphi$ -orientados com origem no vértice  $v$ . Por hipótese,  $\varphi$  é um  $k$ -fluxo. Pela Proposição 1.7,  $\varphi(X) = 0$ . Toda aresta de  $\partial(X)$  que sai de  $X$  tem peso negativo e toda aresta de  $\partial(X)$  que entra em  $X$  tem peso positivo. Deduzimos que  $\partial(X)$  é vazio. Claramente,  $v$  pertence a  $X$ . Por hipótese,  $v$  e  $w$  pertencem à mesma componente conexa de  $G$ . Deduzimos que  $w$  também pertence a  $X$ .  $\square$

## LEMA 2.8

Seja  $(D, \varphi)$  um  $k$ -fluxo parcial de um grafo  $G$ . Então, toda aresta do suporte de  $\varphi$  pertence a um ciclo  $\varphi$ -orientado.

Demonstração: Seja  $e := vw$  uma aresta do suporte de  $\varphi$  orientada de  $v$  a  $w$ . Considere a restrição  $\varphi'$  de  $\varphi$  a  $E(D) - e$ : então  $\varphi'(x) = 0$  para todo vértice  $x$  distinto de  $v$  e de  $w$ . Pelo Lema 2.6, existe um caminho  $\varphi$ -orientado de  $w$  a  $v$  em  $D$  se  $\varphi(e) > 0$ , e um caminho  $\varphi$ -orientado de  $v$  a  $w$  em  $D$  se  $\varphi(e) < 0$ . Tal caminho, juntamente com a aresta  $e$ , formam um ciclo  $\varphi$ -orientado.  $\square$

## LEMA 2.9

Seja  $G$  um grafo,  $(D, \varphi_k)$  um  $k$ -fluxo modular parcial de  $G$ ,  $e_0$  uma aresta especificada de  $G$ ,  $\lambda$  um inteiro tal que  $\lambda \equiv \varphi_k(e_0) \pmod{k}$  e  $|\lambda| < k$ . Então, existe uma função peso  $\varphi$  de  $D$  tal que  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo parcial de  $G$  com  $\varphi(e_0) = \lambda$  e, para toda aresta  $e$  de  $G$ ,  $\varphi(e) \equiv \varphi_k(e) \pmod{k}$ .

Demonstração: Seja  $\mathcal{F}$  o conjunto de todas as funções peso  $\varphi$  de  $D$  que satisfazem as seguintes relações:

$$\varphi(e) \equiv \varphi_k(e) \pmod{k} \quad \text{e} \quad |\varphi(e)| < k \quad \text{para toda aresta } e \text{ de } D.$$

É fácil obter uma função peso em  $\mathcal{F}$ : basta subtrairmos, para cada aresta  $e$  de  $G$ , um múltiplo de  $k$  apropriado de  $\varphi_k(e)$ . Então, podemos supor que  $\mathcal{F}$  não é vazio. Seja  $\varphi$  a função peso de  $\mathcal{F}$  tal que a soma  $\sum_{x \in V(D)} |\varphi(x)|$  é mínima. Afirmamos que  $\varphi$  é um  $k$ -fluxo parcial. Para demonstrar este fato, devemos mostrar que  $\varphi(x) = 0$  para todo vértice  $x$ . Suponha o contrário. Pela Proposição 1.7,  $G$  possui um vértice  $v$  cujo fluxo líquido é positivo. Pelo Lema 2.6, existe um caminho  $\varphi$ -orientado  $P$  de  $v$  a algum vértice de  $G$  com fluxo líquido negativo. Seja  $w$  o término de  $P$ . Subtraia  $k$  do peso de toda aresta orientada no sentido do percurso de  $P$  e some  $k$  ao peso de toda aresta orientada

no sentido contrário ao do percurso de  $P$ . Com isso, obtemos um outra função peso  $\varphi'$  que também pertence a  $\mathcal{F}$ . Ademais, o fluxo líquido de qualquer vértice de  $G$  exceto  $v$  e  $w$  permanece inalterado, enquanto que  $\varphi'(v) = \varphi(v) - k$  e  $\varphi'(w) = \varphi(w) + k$ . Deduzimos que  $\sum_x |\varphi'(x)| = \sum_x |\varphi(x)| - 2k < \sum_x |\varphi(x)|$ , uma contradição. De fato,  $\varphi$  é um  $k$ -fluxo parcial.

A função peso  $\varphi$  satisfaz a congruência  $\varphi(e_0) \equiv \varphi_k(e_0) \equiv \lambda \pmod{k}$ . Se  $\varphi(e_0) = \lambda$ , então não há mais nada a se demonstrar. Suponha então que um dentre  $\varphi(e_0)$  e  $\lambda$  é positivo, e o outro é negativo. Logo,  $|\varphi(e_0) - \lambda| = k$ . Pelo Lema 2.8,  $D$  possui um ciclo  $\varphi$ -orientado  $Q$  que contém a aresta  $e_0$ . Subtraia  $k$  do peso de toda aresta orientada no sentido do percurso de  $Q$  e some  $k$  ao peso de toda aresta orientada no sentido contrário ao do percurso de  $Q$ . Assim obtemos um  $k$ -fluxo parcial  $\varphi'$  que pertence a  $\mathcal{F}$  e tal que  $\varphi'(e_0) = \lambda$ .  $\square$

Ressaltamos que podemos deduzir imediatamente do Lema 2.9 o Teorema 1.5. O resultado apresentado a seguir é demonstrado no livro de Zhang [31, Theorem 2.1.2].

#### LEMA 2.10

Seja  $G$  um grafo,  $D$  uma orientação de  $G$ ,  $k_1$  e  $k_2$  dois inteiros tais que  $k_1, k_2 > 1$ ,  $S$  um subconjunto especificado das arestas de  $E(G)$ . Então,  $G$  admite um  $k_1 k_2$ -fluxo parcial  $(D, \varphi)$  com  $\text{sup}(\varphi) = S$  se e somente se  $G$  admite  $k_i$ -fluxos parciais  $(D, \varphi_i)$  para  $i = 1, 2$ , tais que  $S = \text{sup}(\varphi_1) \cup \text{sup}(\varphi_2)$ .

Demonstração: Para demonstrar a suficiência, suponha que os dois  $k_i$ -fluxos parciais  $(D, \varphi_i)$  existem, sendo  $S = \text{sup}(\varphi_1) \cup \text{sup}(\varphi_2)$ . Então,  $(D, \varphi_1 + k_1 \varphi_2)$  é um  $k_1 k_2$ -fluxo parcial de  $G$ , com  $S = \text{sup}(\varphi_1 + k_1 \varphi_2)$ .

Para demonstrar a necessidade, seja  $(D, \varphi)$  um  $k_1 k_2$ -fluxo parcial de  $G$ . Para toda aresta  $e$  de  $G$ , seja  $\varphi'_1(e)$  o inteiro tal que

$$0 \leq \varphi'_1(e) < k_1 \quad \text{e} \quad \varphi'_1(e) \equiv \varphi(e) \pmod{k_1}.$$

Claramente,  $(D, \varphi'_1)$  é um  $k_1$ -fluxo modular parcial de  $G$ . Pelo Lema 2.9,  $G$  tem um  $k_1$ -fluxo parcial  $(D, \varphi_1)$  tal que

$$\varphi_1(e) \equiv \varphi(e) \pmod{k_1} \quad \forall e \in E(G).$$

Além disso,

$$\varphi'(e) := \frac{\varphi(e) - \varphi_1(e)}{k_1}$$

é um inteiro, para toda aresta  $e$ . Seja  $\varphi'_2(e)$  o inteiro tal que

$$0 \leq \varphi'_2(e) < k_2 \quad \text{e} \quad \varphi'_2(e) \equiv \varphi'(e) \pmod{k_2}$$

para toda aresta  $e$ . Claramente,  $(D, \varphi'_2)$  é um  $k_2$ -fluxo modular parcial de  $G$ . Pelo Lema 2.9,  $G$  tem um  $k_2$ -fluxo parcial  $(D, \varphi_2)$  tal que

$$\varphi_2(e) \equiv \varphi'_2(e) \pmod{k_2} \quad \forall e \in E(G).$$

Deduzimos também que  $\text{sup}(\varphi) = \text{sup}(\varphi_1) \cup \text{sup}(\varphi_2)$ . □

O lema a seguir afirma que todo grafo que admite um  $k$ -fluxo admite um  $k$ -fluxo particular no qual o peso de uma aresta especificada é igual a um. Acreditamos que esse resultado seja uma contribuição original da tese. É um resultado fundamental de  $k$ -fluxos, que aparenta ser uma ferramenta bastante útil no estudo de outras propriedades de fluxos. Neste capítulo, usaremos este resultado para demonstrar o Lema 2.12 (que é usado na demonstração dos Teoremas 2.13 e 2.17) e os Teoremas 2.15 e 2.18.

#### LEMA 2.11

Seja  $D$  uma orientação de um grafo  $G$  e  $e_0$  uma aresta de  $G$ . Se  $G$  tem um  $k$ -fluxo parcial  $(D, \varphi)$  cujo suporte contém a aresta  $e_0$ , então  $G$  tem um  $k$ -fluxo parcial  $(D, \varphi_0)$  tal que  $\varphi_0(e_0) = 1$  e  $\text{sup}(\varphi_0) = \text{sup}(\varphi)$ .

Demonstração: A demonstração é por indução em  $k$ . Considere primeiro o caso em que  $k$  é primo. Seja  $m$  o inverso multiplicativo de  $\varphi(e_0)$  módulo  $k$ . Para toda aresta  $e$  de  $G$ , seja  $\varphi'(e)$  o inteiro tal que

$$0 \leq \varphi'(e) < k \quad \text{e} \quad \varphi'(e) \equiv m \cdot \varphi(e) \pmod{k}.$$

Então,  $\varphi'(e_0) = 1$  e  $(D, \varphi')$  é um  $k$ -fluxo modular parcial de  $G$  com suporte igual ao de  $\varphi$ . Pelo Lema 2.9,  $G$  admite um  $k$ -fluxo parcial  $(D, \varphi_0)$  tal que  $\varphi_0(e_0) = 1$  e  $\text{sup}(\varphi_0) = \text{sup}(\varphi')$ . Portanto, a afirmação é válida quando  $k$  é primo.

Podemos então supor que  $k$  não é primo. Sejam  $k_1$  e  $k_2$  dois inteiros tais que  $k = k_1 k_2$  e  $k_1, k_2 > 1$ . Pelo Lema 2.10, e para  $i = 1, 2$ ,  $G$  admite  $k_i$ -fluxos parciais  $(D, \varphi_i)$  tais que  $\text{sup}(\varphi) = \text{sup}(\varphi_1) \cup \text{sup}(\varphi_2)$ .

Considere primeiro o caso em que  $e_0$  pertence ao suporte de precisamente um dentre  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Ajuste a notação de forma que  $e_0$  pertença ao suporte de  $\varphi_1$ . Por hipótese de indução,  $G$  tem um  $k_1$ -fluxo parcial  $(D, \varphi'_1)$  tal que  $\varphi_1$  e  $\varphi'_1$  têm o mesmo suporte e  $\varphi'_1(e_0) = 1$ . Portanto,  $(D, \varphi'_1 + k_1 \varphi_2)$  é um  $k$ -fluxo parcial de  $G$  no qual o peso de  $e_0$  é igual a um. Além disso,  $\text{sup}(\varphi'_1 + k_1 \varphi_2) = \text{sup}(\varphi'_1) \cup \text{sup}(\varphi_2) = \text{sup}(\varphi)$ . Logo, a afirmação é válida neste caso.

Considere finalmente o caso em que  $e_0$  pertence ao suporte de ambos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Por hipótese de indução, e para  $i = 1, 2$ ,  $G$  tem  $k_i$ -fluxos parciais  $(D, \varphi'_i)$  tais que  $\varphi'_i(e_0) = 1$  e  $\text{sup}(\varphi'_i) = \text{sup}(\varphi_i)$ . Pelo Lema 2.9, e para  $i = 1, 2$ ,  $G$  tem  $k_i$ -fluxos parciais  $(D, \varphi''_i)$  tais que  $\text{sup}(\varphi''_i) = \text{sup}(\varphi'_i) = \text{sup}(\varphi_i)$  e  $\varphi''_i(e_0) = -k_i + 1$ . Seja  $\varphi'' := \varphi''_1 + k_1 \varphi''_2$ . Então,

$(D, \varphi'')$  é um  $k$ -fluxo parcial de  $G$ , no qual  $\text{sup}(\varphi'') = \text{sup}(\varphi'_1) \cup \text{sup}(\varphi'_2) = \text{sup}(\varphi)$  e  $\varphi''(e_0) = -k_1 + 1 + k_1(-k_2 + 1) = -k + 1$ . Pelo Lema 2.9,  $G$  tem um  $k$ -fluxo parcial  $(D, \varphi_0)$  tal que  $\text{sup}(\varphi_0) = \text{sup}(\varphi'') = \text{sup}(\varphi)$  e  $\varphi_0(e_0) = 1$ .  $\square$

### 2.5.3 Propriedades de Grafos Aresta-Críticos

Nesta seção apresentamos propriedades de grafos aresta-críticos que são surpreendentemente similares àsquelas de grafos cor-críticos. Iniciamos pela análise de relações envolvendo  $\Phi(G)$ ,  $\Phi(G - e)$  e  $\Phi(G/e)$  para um grafo  $G$  e uma aresta  $e$  de  $G$ .

LEMA 2.12

As seguintes relações são válidas para todo grafo  $G$  e toda aresta  $e$  de  $G$ .

- (i)  $\Phi(G/e) = \min\{\Phi(G - e), \Phi(G)\}$ .
- (ii) Se  $e$  não é uma aresta de corte de  $G$ , então  $\Phi(G) \leq \Phi(G - e) + 1$ .
- (iii) Se  $e$  não pertence a um 2-corte de arestas de  $G$ , então  $\Phi(G - e) \leq \Phi(G) + 1$ .

Demonstração: Seja  $D$  uma orientação arbitrária de  $G$ , e  $v$  e  $w$  os extremos da aresta  $e$  de forma que esta seja orientada de  $v$  para  $w$ .

(i): Seja  $k := \min\{\Phi(G - e), \Phi(G)\}$ . Primeiramente vamos mostrar que

$$\Phi(G/e) \leq k. \quad (2.1)$$

A inequação (2.1) vale trivialmente quando  $k = \infty$ . Suponha então que  $k$  é finito. Se  $(D - e, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo de  $G - e$ , então, pela Proposição 1.7,  $(D/e, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo de  $G/e$ . Alternativamente, também pela Proposição 1.7, se  $(D, \varphi)$  é um  $k$ -fluxo de  $G$ , então,  $(D/e, \varphi')$  é um  $k$ -fluxo de  $G/e$ , sendo que  $\varphi'$  é a restrição de  $\varphi$  a  $D - e$ . Em qualquer dos casos, a inequação (2.1) se verifica.

Agora mostraremos que

$$\Phi(G/e) \geq k. \quad (2.2)$$

A inequação (2.2) vale trivialmente quando  $\Phi(G/e) = \infty$ . Suponha então que  $\Phi(G/e)$  é finito, digamos, igual a  $\ell$ . Seja  $(D/e, \varphi)$  um  $\ell$ -fluxo de  $G/e$ . Em  $D - e$ ,  $\varphi(x) = 0$  para todo vértice  $x$  distinto de  $v$  e de  $w$ . Pelo Lema 2.5, ou  $(D - e, \varphi)$  é um  $\ell$ -fluxo modular de  $G - e$ , ou  $G$  tem um  $\ell$ -fluxo modular. Pelo Teorema 1.5, ou  $\ell \geq \Phi(G - e)$  ou  $\ell \geq \Phi(G)$ . Concluimos que a inequação (2.2) se verifica.

(ii): Seja  $m := \Phi(G - e)$ . Se  $m = \infty$  então a inequação vale trivialmente. Podemos então supor que  $m$  é finito. Seja  $(D - e, \varphi)$  um  $m$ -fluxo de  $G - e$ . Por hipótese,  $e$  não é uma

aresta de corte de  $G$ . Logo, os extremos  $v$  e  $w$  de  $e$  estão na mesma componente conexa de  $G - e$ . Pelo Lema 2.7,  $D - e$  possui um caminho  $\varphi$ -orientado  $P$  de  $w$  a  $v$ . Some um a  $\varphi(f)$  para toda aresta  $f$  orientada no sentido de percurso de  $P$ , subtraia um de  $\varphi(b)$  para toda aresta  $b$  orientada no sentido contrário ao do percurso de  $P$ , e atribua a  $e$  peso igual a um. A função peso resultante, juntamente com a orientação  $D$ , é um  $(m + 1)$ -fluxo de  $G$ . Então,  $\Phi(G) \leq m + 1 = \Phi(G - e) + 1$ .

(iii): Seja  $n = \Phi(G)$ . A inequação vale trivialmente se  $n = \infty$ . Podemos então supor que  $n$  é finito. Pelo Lema 2.11, existe um  $n$ -fluxo  $(D, \varphi)$  de  $G$  tal que  $\varphi(e) = 1$ . Seja  $X$  o conjunto de vértices de  $G$  que são término de caminhos  $\varphi$ -orientados de  $D - e$  com origem em  $v$ . Lembramos que a aresta  $e$  não pertence a nenhum desses caminhos, já que sequer pertence a  $D - e$ . Afirmamos que  $w$  está em  $X$ . Suponha o contrário. Então, a aresta  $e$  pertence a  $\partial(X)$ , o corte de arestas de  $G$  associado a  $X$ . Ademais,  $e$  é orientada saindo de  $X$ . Observe que toda aresta de  $\partial(X) - e$  orientada saindo de  $X$  tem peso negativo, enquanto que toda aresta de  $\partial(X) - e$  orientada entrando em  $X$  tem peso positivo. Por hipótese,  $e$  não pertence a nenhum 2-corte de arestas, logo  $\partial(X)$  possui pelo menos três arestas. A contribuição das arestas de  $\partial(X) - e$  para  $\varphi(X)$  é então no máximo  $-2$ . Mas  $\varphi(e) = 1$ , portanto  $\varphi(X) < 0$ , uma contradição.

De fato,  $w$  pertence a  $X$ . Seja  $P$  um caminho  $\varphi$ -orientado de  $v$  a  $w$  em  $D - e$ . Seja  $\varphi'$  a função peso obtida a partir da restrição de  $\varphi$  a  $E(G) - e$  pela adição do valor um a todas as arestas de  $P$  orientadas no sentido do percurso, e pela subtração do valor um a todas as arestas de  $P$  orientadas no sentido contrário ao do percurso. Então,  $(D, \varphi')$  é um  $(n + 1)$ -fluxo de  $G - e$ . Portanto,  $\Phi(G - e) \leq n + 1 = \Phi(G) + 1$ .  $\square$

O resultado a seguir é análogo ao Teorema 2.4, mas para grafos aresta-críticos.

#### TEOREMA 2.13

Seja  $G$  um grafo com pelo menos duas arestas e livre de 1-cortes de arestas. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) Para toda aresta  $e$  de  $G$ ,  $\Phi(G - e) = \Phi(G) - 1$ .
- (ii) Para toda aresta  $e$  de  $G$ ,  $\Phi(G/e) = \Phi(G) - 1$ .
- (iii) O grafo  $G$  é aresta-crítico.

Demonstração: Por hipótese,  $G$  é livre de 1-cortes. Então,  $\Phi(G)$  é finito.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha que  $\Phi(G - e) = \Phi(G) - 1$  para toda aresta  $e$  de  $G$ . Pelo Lema 2.12(i),  $\Phi(G/e) = \Phi(G - e) = \Phi(G) - 1$ . Essa conclusão é válida para toda aresta  $e$  de  $G$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Suponha que  $\Phi(G/e) = \Phi(G) - 1$  para toda aresta  $e$  de  $G$ . Seja  $S$  um conjunto não vazio de arestas de  $G$  e  $H := G/S$ . Seja  $e$  uma aresta de  $S$ . Por hipótese,

$\Phi(G/e) = \Phi(G) - 1$ . Como  $\Phi(G)$  é finito, temos que  $\Phi(G/e) < \Phi(G)$ . Mas  $H$  pode ser obtido a partir de  $G/e$  pela contração de algumas arestas, logo,  $\Phi(H) \leq \Phi(G/e) < \Phi(G)$ . Esse argumento é válido para todo conjunto não vazio  $S$  de arestas de  $G$ . Por hipótese,  $G$  possui pelo menos duas arestas, portanto,  $G$  é de fato aresta-crítico.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Suponha que  $G$  seja aresta-crítico. Seja  $e$  uma aresta de  $G$ . Pela definição,  $\Phi(G/e) < \Phi(G)$ . Pelo Lema 2.12(i),  $\Phi(G/e) = \Phi(G - e)$ . Pelo Lema 2.12(ii), temos que

$$\Phi(G) - 1 \leq \Phi(G - e) = \Phi(G/e) \leq \Phi(G) - 1.$$

Deduzimos que vale a igualdade. Essa conclusão vale para toda aresta  $e$  de  $G$ .  $\square$

Podemos agora utilizar o Teorema 2.13 para demonstrar algumas propriedades satisfeitas por grafos aresta-críticos sobre o limite inferior para a sua cintura e sua conexidade. Conforme vimos na Seção 2.4, contra-exemplos mínimos para qualquer uma das Conjeturas de Tutte são aresta-críticos e, portanto, satisfazem estas propriedades. No entanto, não é novidade que as propriedades enunciadas no Lema 2.14 são satisfeitas por contra-exemplos mínimos para qualquer uma das Conjeturas de Tutte (veja o livro de Zhang [31]).

#### LEMA 2.14

*Seja  $G$  um grafo  $k$ -aresta-crítico. Então,  $G$  tem cintura pelo menos  $k - 1$ . Ademais, se  $G$  é livre de vértices isolados, então  $G$  é 2-conexo e 3-aresta-conexo.*

Demonstração: Suponha que  $G$  tem um ciclo  $Q$  de comprimento no máximo  $k - 2$ . Seja  $D$  uma orientação de  $G$  em que  $Q$  é um ciclo orientado. Seja  $e$  uma aresta de  $Q$ . Pelo Teorema 2.13,  $G - e$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo, digamos  $(D - e, \varphi)$ . Como  $Q - e$  tem menos de  $k - 2$  arestas, existe um inteiro  $\lambda$  que não é múltiplo de  $k$  e tal que  $\varphi(e_Q) \not\equiv -\lambda \pmod{k - 1}$  para toda aresta  $e_Q$  de  $Q - e$ . Tome a extensão  $\varphi'$  de  $\varphi$  a  $D$  obtida após a adição módulo  $k$  do inteiro  $\lambda$  a todas as arestas de  $Q - e$  e atribuição do peso  $\lambda$  a  $\varphi'(e)$ . Claramente,  $(D, \varphi')$  é um  $(k - 1)$ -fluxo modular de  $G$ . Pelo Teorema 1.5,  $G$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo, uma contradição. Portanto,  $G$  deve ter cintura pelo menos  $k - 1$ .

Vamos demonstrar que se  $G$  não tem vértices isolados, então é 2-conexo e 3-aresta-conexo. Suponha que  $G$  não é conexo. Seja  $G_1$  uma componente conexa de  $G$ . Como  $G$  não tem vértices isolados,  $G_1$  deve ter pelo menos uma aresta  $e$ . Pelo Teorema 2.13,  $G - e$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo, o que implica que toda componente conexa distinta de  $G_1$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo. Usando o mesmo raciocínio com outra componente conexa  $G_2$  de  $G$  distinta de  $G_1$ , concluímos que  $G_1$  também tem um  $(k - 1)$ -fluxo. Logo,  $G$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo, uma contradição. Concluímos então que  $G$  é conexo.

Agora suponha que  $G$  tem um vértice de corte  $v$ . Então,  $G$  é a união de dois subgrafos próprios  $G_1$  e  $G_2$  que têm apenas o vértice  $v$  em comum. Seja  $D$  uma orientação de  $G$



e  $D_i$  suas restrições a  $G_i$ , para  $i = 1, 2$ . Seja  $e$  uma aresta de  $G_2$ . Pelo Teorema 2.13,  $G - e$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo  $(D - e, \varphi)$ . Seja  $(D_1, \varphi_1)$  a restrição de  $(D - e, \varphi)$  a  $G_1$ . Todo vértice  $x$  de  $G_1$  distinto de  $v$  tem fluxo líquido nulo em  $(D_1, \varphi_1)$ . Pela Proposição 1.7, o fluxo líquido de  $V(G_1)$  em  $(D - e, \varphi)$  é nulo. Concluimos que  $(D_1, \varphi_1)$  é um  $(k - 1)$ -fluxo de  $G_1$ . Da mesma forma,  $G_2$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo  $(D_2, \varphi_2)$ . A extensão comum  $\varphi'$  de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  formam junto com  $D$  um  $(k - 1)$ -fluxo  $(D, \varphi')$  de  $G$ , uma contradição. Logo,  $G$  é de fato 2-conexo.

Como  $G$  é 2-conexo, também é 2-aresta-conexo. Suponha que  $G$  tenha um 2-corte de arestas  $\{e_1, e_2\}$ . Então,  $\Phi(G - e_1) = \infty$  já que  $e_2$  é uma aresta de corte de  $G - e_1$ . Mas, pelo Teorema 2.13,  $\Phi(G - e_1) = k - 1$ , uma contradição. Concluimos que  $G$  é 3-aresta-conexo.  $\square$

O teorema a seguir faz uma analogia para grafos aresta-críticos ao Teorema de Dirac sobre grafos cor-críticos (veja [5, Theorem 14.9]). Usaremos este teorema para demonstrar que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos é 3-conexo, no Teorema 2.20.

**TEOREMA 2.15**

Seja  $G$  um grafo  $k$ -aresta-crítico,  $u$  e  $v$  vértices distintos de  $G$ ,  $G_1$  e  $G_2$  dois subgrafos de  $G$ , cada um com pelo menos duas arestas e tais que:

$$G_1 \cup G_2 = G, \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\} \quad \text{e} \quad E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset.$$

Então, uma das afirmações abaixo é válida:

- (i) ou  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são ambos  $k$ -aresta-críticos,
- (ii) ou  $G_1 + uv$  e  $G_2$  são ambos  $k$ -aresta-críticos.

Demonstração: Seja  $D$  uma orientação arbitrária de  $G$ , e  $D_i$  a restrição de  $D$  a  $G_i$ , para  $i = 1, 2$ . É fácil ver que

$$\text{ou } \Phi(G_1) \geq k \quad \text{ou} \quad \Phi(G_2) \geq k. \tag{2.3}$$

Pois se  $(D_i, \varphi_i)$  é um  $(k - 1)$ -fluxo de  $G_i$ , para  $i = 1, 2$ , então a extensão comum de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  a  $E(D)$  forma, juntamente com  $D$ , um  $(k - 1)$ -fluxo de  $G$ , uma contradição. Além disso,

$$\text{ou } \Phi(G_1 + uv) \geq k \quad \text{ou} \quad \Phi(G_2 + uv) \geq k. \tag{2.4}$$

Para se convencer disto, suponha o contrário. Pelo Lema 2.11,  $G_i + uv$  tem um  $(k - 1)$ -fluxo  $(D_i + uv, \varphi_i)$ , para  $i = 1, 2$ , tal que  $\varphi_i(uv) = 1$ . Seja  $\varphi'_i$  a restrição de  $\varphi_i$  a  $E(D_i)$ . A extensão comum de  $\varphi'_1$  e  $-\varphi'_2$  a  $E(D)$  forma, juntamente com  $D$ , um  $(k - 1)$ -fluxo de  $G$ , uma contradição.

Ajuste a notação de forma que

$$\Phi(G_2 + uv) \geq k. \quad (2.5)$$

Afirmamos que  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são ambos  $k$ -aresta-críticos.

Seja  $e_1$  uma aresta de  $G_1$ . Por hipótese,  $G$  é  $k$ -aresta-crítico. Pelo Teorema 2.13,  $\Phi(G - e_1) = k - 1$ . Seja  $(D - e_1, \varphi)$  um  $(k - 1)$ -fluxo de  $G - e_1$ . Para  $i = 1, 2$ , denote por  $\varphi_i$  a restrição de  $\varphi$  a  $E(D_i) - e_1$ . Deduzimos de (2.5), e do Teorema 1.5, que  $G_2 + uv$  não tem um  $(k - 1)$ -fluxo modular. Pelo Lema 2.5,  $(D_2, \varphi_2)$  é um  $(k - 1)$ -fluxo modular de  $G_2$ . Conseqüentemente,  $(D_1 - e_1, \varphi_1)$  é um  $(k - 1)$ -fluxo modular de  $G_1 - e_1$ . Deduzimos que

$$\Phi(G_2) \leq k - 1 \quad (2.6)$$

$$\Phi(G_1/e_1) \leq \Phi(G_1 - e_1) \leq k - 1 \quad (\forall e_1 \in E(G_1)). \quad (2.7)$$

Deduzimos também de (2.6) e (2.3) que

$$\Phi(G_1) \geq k. \quad (2.8)$$

Por hipótese,  $G_1$  tem pelo menos duas arestas. Concluimos de (2.7) e (2.8), que  $G_1$  é aresta-crítico. Pelo Lema 2.14,  $G_1$  é livre de 1-cortes. Pelo Teorema 2.13,  $\Phi(G_1/e_1) = \Phi(G_1) - 1$ , para toda aresta  $e_1$  de  $G_1$ . Concluimos a partir deste fato, de (2.7) e (2.8) que  $\Phi(G_1) = k$ . De fato,  $G_1$  é  $k$ -aresta-crítico.

Agora vamos mostrar que  $G_2 + uv$  também é  $k$ -aresta-crítico. Seja  $e_2$  uma aresta qualquer de  $G_2 + uv$ . Afirmamos que

$$\Phi((G_2 + uv)/e_2) \leq \Phi((G_2 + uv) - e_2) \leq k - 1. \quad (2.9)$$

O lado esquerdo da inequação vale pelo Lema 2.12. Basta então demonstrarmos o lado direito da inequação. Se  $e_2 = uv$ , então  $\Phi((G_2 + uv) - e_2) = \Phi(G_2)$ . Neste caso, por (2.6), a inequação vale. Suponha então que  $e_2$  é uma aresta de  $G_2$ . Por hipótese,  $G$  é  $k$ -aresta-crítico, logo, pelo Teorema 2.13,  $\Phi(G - e_2) = k - 1$ . Seja  $(D - e_2, \varphi)$  um  $(k - 1)$ -fluxo de  $G - e_2$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $\varphi_i$  a restrição de  $\varphi$  a  $E(D_i) - e_2$ . Deduzimos de (2.8), e do Teorema 1.5, que  $(D_1, \varphi_1)$  não é um  $(k - 1)$ -fluxo modular de  $G_1$ . Conseqüentemente,  $(D_2 - e_2, \varphi_2)$  não é um  $(k - 1)$ -fluxo modular de  $G_2 - e_2$ . Portanto, pelo Lema 2.5,  $\varphi_2$  pode ser estendida a uma função peso  $\varphi'_2$  de  $E((G_2 + uv) - e_2)$  tal que  $((D_2 + uv) - e_2, \varphi'_2)$  é um  $(k - 1)$ -fluxo modular de  $(G_2 + uv) - e_2$ . Pelo Teorema 1.5, a inequação (2.9) vale. Por hipótese,  $G_2$  tem pelo menos duas arestas. Deduzimos de (2.9) e (2.5), que  $G_2 + uv$  é aresta-crítico. Pelo Lema 2.14,  $G_2 + uv$  é livre de 1-cortes. Pelo Teorema 2.13,  $\Phi((G_2 + uv)/e_2) = \Phi(G_2 + uv) - 1$ , para toda aresta  $e_2$  de  $G_2 + uv$ . Concluimos deste fato, (2.9) e (2.5) que  $\Phi(G_2 + uv) = k$ . De fato,  $G_2 + uv$  é  $k$ -aresta-crítico.  $\square$

### 2.5.4 Propriedades de Grafos Vértice-Críticos

Nesta seção demonstramos o Teorema 2.17, uma versão para grafos vértice-críticos dos Teoremas 2.4 e 2.13. A demonstração deste utiliza o Lema 2.16 a seguir, o qual traz uma série de relações envolvendo  $\Phi(G + uv)$ ,  $\Phi(G)$  e  $\Phi(G/uv)$  para um grafo  $G$  e vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ .

LEMA 2.16

As seguintes relações são válidas para todo grafo  $G$  e todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ :

- (i)  $\Phi(G/uv) = \min\{\Phi(G), \Phi(G + uv)\}$ .
- (ii) Se ambos os vértices  $u$  e  $v$  pertencem à mesma componente conexa de  $G$ , então  $\Phi(G + uv) \leq \Phi(G) + 1$ .
- (iii) Se  $G$  é livre de 1-cortes, então  $\Phi(G) \leq \Phi(G + uv) + 1$ .

Demonstração: Seja  $H := G + uv$ ,  $e := uv$ . Então,  $G = H - e$  e  $G/uv = H/e$ . As propriedades listadas seguem imediatamente da aplicação do Lema 2.12, com  $H$  no papel de  $G$ .  $\square$

TEOREMA 2.17

Seja  $G$  um grafo livre de 1-cortes e com pelo menos duas arestas. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) Para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ ,  $\Phi(G + uv) = \Phi(G) - 1$ .
- (ii) Para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ ,  $\Phi(G/uv) = \Phi(G) - 1$ .
- (iii) O grafo  $G$  é vértice-crítico.

Demonstração: Por hipótese,  $G$  é livre de 1-cortes. Então,  $\Phi(G)$  é finito.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha que  $\Phi(G + uv) = \Phi(G) - 1$  para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ . Pelo Lema 2.16(i),  $\Phi(G/uv) = \Phi(G + uv) = \Phi(G) - 1$ . Esta conclusão vale para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Suponha que  $\Phi(G/uv) = \Phi(G) - 1$  para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ . Seja  $S$  um conjunto não trivial de vértices de  $G$  e  $H := G/S$ . Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices de  $S$ . Por hipótese,  $\Phi(G/uv) = \Phi(G) - 1$ . Como  $\Phi(G)$  é finito, temos que  $\Phi(G/uv) < \Phi(G)$ . Mas  $H$  pode ser obtido a partir de  $G/uv$  pela contração de alguns vértices, incluindo o vértice de contração. Então,  $\Phi(H) \leq \Phi(G/uv) < \Phi(G)$ . Esse

argumento vale para todo conjunto não trivial  $S$  de vértices de  $G$ . Por hipótese,  $G$  tem pelo menos duas arestas, portanto,  $G$  é de fato vértice-crítico.

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Suponha que  $G$  é vértice-crítico. Sejam  $u$  e  $v$  vértices distintos de  $G$ . Pela definição,  $\Phi(G/uv) < \Phi(G)$ . Pelo Lema 2.16(i),  $\Phi(G/uv) = \Phi(G + uv)$ . Pelo Lema 2.16(iii) temos que

$$\Phi(G) - 1 \leq \Phi(G + uv) = \Phi(G/uv) \leq \Phi(G) - 1.$$

Deduzimos que vale a igualdade. Esta conclusão vale para todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$  de  $G$ .  $\square$

O teorema a seguir é uma versão para grafos vértice-críticos do Teorema 2.15. Assim, também é análogo, agora para grafos vértice-críticos, ao Teorema de Dirac sobre grafos cor-críticos (veja [5, Theorem 14.9]). Usaremos este teorema para demonstrar que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 5-Fluxos é 3-conexo, no Teorema 2.19, e também que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores é 3-conexo, no Teorema 2.21. Omitimos aqui a sua demonstração pois esta é análoga à demonstração do Teorema 2.15.

#### TEOREMA 2.18

Seja  $G$  um grafo  $k$ -vértice-crítico,  $u$  e  $v$  vértices distintos de  $G$ ,  $G_1$  e  $G_2$  dois subgrafos de  $G$ , cada um com pelo menos duas arestas, e tais que

$$G_1 \cup G_2 = G, \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\} \quad \text{e} \quad E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset.$$

Então, uma das afirmações abaixo é válida:

- (i) ou  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são ambos  $k$ -vértice-críticos,
- (ii) ou  $G_1 + uv$  e  $G_2$  são ambos  $k$ -vértice-críticos.

## 2.6 A 3-Conexidade de Contra-Exemplos Mínimos

Podemos utilizar os Teoremas 2.15 e 2.18 para demonstrar que todo contra-exemplo mínimo para as Conjeturas dos 5-Fluxos, dos 4-Fluxos e dos 3-Cortes Separadores são 3-conexos. Já é fato notório que contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 5-Fluxos são 3-conexos (veja [31, Conjecture 1.1.5]), um corolário do fato também bem conhecido que tais contra-exemplos mínimos são grafos cúbicos. Note que a demonstração alternativa deste fato apresentada no Teorema 2.19 não depende da redução de contra-exemplos mínimos a grafos cúbicos. Também já é conhecido que contra-exemplos mínimos para

a Conjetura dos 4-Fluxos são 3-conexos (veja [31, Conjecture 1.1.6]), via uma demonstração essencialmente igual à apresentada no Teorema 2.20. Acreditamos ser nova a demonstração do Teorema 2.21 de que contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores são 3-conexos.

**TEOREMA 2.19**

*Todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 5-Fluxos é 3-conexo.*

Demonstração: Seja  $G$  um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 5-Fluxos. Sabemos, pela Proposição 2.1, que  $G$  é 6-vértice-crítico. Pelo Lema 2.14,  $G$  é 2-conexo. Suponha que  $G$  não seja 3-conexo e seja  $\{u, v\}$  um 2-corte de vértices de  $G$ . Pelo Teorema 2.18, podemos obter a partir de  $G$  dois grafos menores que são ambos 6-vértice-críticos também. Ajuste a notação de forma que  $G_1$  e  $G_2 + uv$  sejam tais grafos. Pelo Lema 2.14,  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são ambos 2-conexos. Portanto, ambos  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são contra-exemplos para a Conjetura dos 5-Fluxos e menores que  $G$ , uma contradição. Concluimos então que  $G$  é 3-conexo.  $\square$

**TEOREMA 2.20**

*Todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos é 3-conexo.*

Demonstração: Seja  $G$  um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 4-Fluxos. Sabemos, pela Proposição 2.2, que  $G$  é 5-aresta-crítico. Pelo Lema 2.14,  $G$  é 2-conexo. Suponha que  $G$  não seja 3-conexo e seja  $\{u, v\}$  um 2-corte de vértices de  $G$ . Pelo Teorema 2.15, podemos obter a partir de  $G$  dois grafos menores que são ambos 5-aresta-críticos também. Ajuste a notação de forma que  $G_1$  e  $G_2 + uv$  sejam tais grafos. Pelo Lema 2.14,  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são ambos 2-conexos. O grafo  $G_1$  é um subgrafo de  $G$ , portanto, não pode ter um *minor* do grafo de Petersen, caso contrário  $G$  teria também um *minor* do grafo de Petersen. Como  $G_1$  é conexo, se o grafo  $G_2 + uv$  tem um *minor* do grafo de Petersen, então  $G$  também tem um tal *minor*. Logo, como  $\Phi(G_1) = \Phi(G_2 + uv) = 5$ , ambos  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são contra-exemplos para a Conjetura dos 4-Fluxos e menores que  $G$ , uma contradição. Concluimos então que  $G$  é 3-conexo.  $\square$

**TEOREMA 2.21**

*Todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores é 3-conexo.*

Demonstração: Seja  $G$  um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores para o qual  $S$  é um conjunto de no máximo três vértices separado por todo 3-corte de  $G$ . Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices distintos de  $G$ . Seja  $G' := G/xy$  e  $w$  o vértice de contração de  $G/xy$ . Se pelo menos um dentre  $x$  e  $y$  pertence a  $S$ , então definimos  $S' := (S - x - y) + w$ , caso contrário  $S' := S$ . Como a contração de um conjunto de vértices não cria cortes

novos, temos que  $G'$  e  $S'$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Conseqüentemente,  $\Phi(G/xy) \leq 3$ . Esta conclusão vale para todo par de vértices distintos  $x$  e  $y$  de  $G$ . Logo,  $G$  é vértice-crítico. Na verdade, como  $\Phi(G) \geq 4$ , concluímos, pelo Teorema 2.17, que  $G$  é 4-vértice-crítico. Pelo Lema 2.14,  $G$  é 2-conexo. Suponha que  $G$  não seja 3-conexo e seja  $\{u, v\}$  um 2-corte de vértices de  $G$ . Pelo Teorema 2.18, podemos obter a partir de  $G$  dois grafos menores que são ambos 4-vértice-críticos também. Ajuste a notação de forma que  $G_1$  e  $G_2 + uv$  sejam tais grafos. Pelo Lema 2.14,  $G_1$  e  $G_2 + uv$  são ambos 3-aresta-conexos. Para  $i = 1, 2$ , seja  $S_i := (S \cap V(G_i)) \cup \{u, v\}$ .

Vamos demonstrar que todo 3-corte de  $G_1$  separa  $S_1$  e todo 3-corte de  $G_2 + uv$  separa  $S_2$ . Sejam  $H_1 := G_1$  e  $H_2 := G_2 + uv$ . Seja  $C$  um 3-corte de  $H_i$ , associado a um conjunto  $X$  de vértices de  $H_i$ . Vamos mostrar que  $C$  separa  $S_i$ . Complemente  $X$  se necessário, de forma que o vértice  $u$  não pertença a  $X$ . Se o vértice  $v$  pertencer a  $X$ , então  $C$  certamente separa  $S_i$  em  $H_i$ . Por outro lado, se  $v$  não pertence a  $X$ , então  $C$  é um 3-corte de  $G$  que separa  $S$  e portanto  $X$  contém um vértice de  $S - \{u, v\}$ , que, por sua vez, é um vértice de  $S_i$ . Em qualquer dos casos,  $C$  separa  $S_i$  em  $H_i$ .

Finalmente,  $|S_1| + |S_2| \leq |S| + 4$ . Como  $|S| \leq 3$ , temos que  $\min\{|S_1|, |S_2|\} \leq 3$ . Logo, o par  $(G_1, S_1)$  ou o par  $(G_2 + uv, S_2)$  é um contra-exemplo menor para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Isto é uma contradição. Concluímos então que  $G$  é 3-conexo.  $\square$

Encerramos este capítulo com uma observação importante: todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos Três 3-Cortes também é 3-conexo. Na verdade, como veremos no Capítulo 3 (Corolário 3.7), os contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores são precisamente os contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos Três 3-Cortes. Nossa observação segue deste fato. É importante ressaltar que a demonstração do Corolário 3.7 não usa nenhum resultado deste capítulo, sendo apresentada no Capítulo 3 apenas porque decorre do Teorema Principal demonstrado no Capítulo 3.

# Capítulo 3

## Conexidade Cíclica do Contra-Exemplo Mínimo para 3-Fluxos

Um grafo  $G$  é  $k$ -cíclicamente-aresta-conexo se não possui um conjunto de menos que  $k$  arestas cuja remoção gera pelo menos duas componentes conexas com ciclos. Analogamente, um grafo é  $k$ -cíclicamente-conexo se não possui um conjunto de menos que  $k$  vértices cuja remoção gera pelo menos duas componentes conexas com ciclos. Relembremos que o *tamanho* de um grafo  $G$ , denotado  $\text{tam}(G)$ , é dado pela soma do número de vértices e de arestas de  $G$ .

Demonstraremos neste capítulo que todo contra-exemplo de tamanho mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores é 8-cíclicamente-aresta-conexo, 3-conexo e 4-cíclicamente-conexo. Esse fato segue como corolário do Teorema Principal demonstrado neste capítulo e enunciado na seção a seguir. Vale lembrar que já demonstramos no Capítulo 2 que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores é 3-conexo. Neste capítulo damos uma demonstração alternativa desse fato.

### 3.1 Pentas e o Teorema Principal

Um corte  $C$  de um grafo  $G$  é um *pente* se tem uma praia  $X$  tal que todo vértice em  $X$  tem grau três ou grau cinco em  $G$ , e, além disso, o subgrafo  $G[X]$  de  $G$  induzido por  $X$  é uma floresta. Dizemos então que  $X$  é um *cabo* de  $C$ . No caso de haver necessidade de enfatizar o número de arestas de  $C$  então dizemos que  $C$  é um  $|C|$ -pente.

A seguir enunciamos o Teorema Principal, o qual demonstraremos neste capítulo.

**TEOREMA 3.1 (TEOREMA PRINCIPAL)**

Seja  $G_*$ , juntamente com um conjunto  $S$  de no máximo três vértices, um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Então,  $G_*$  é simples, 2-conexo, 3-aresta-conexo, todo vértice de  $S$  tem grau três, todo vértice de  $V(G) - S$  tem grau cinco e, para  $r \leq 7$ , todo  $r$ -corte de  $G_*$  é um pente.

Uma implicação evidente do Teorema Principal é que pelo menos uma das duas praias de qualquer corte pequeno, isto é, com sete ou menos arestas, induz um grafo acíclico. Logo, segue como corolário do Teorema Principal que  $G_*$  é 8-ciclicamente-aresta-conexo. Também segue como corolário deste teorema, porém de forma menos evidente, que  $G_*$  é 3-conexo e 4-ciclicamente-conexo, conforme mostraremos na Seção 3.2. Para entender essas demonstrações é importante ter claro em mente qual é a estrutura dos possíveis cabos de pentes com até sete arestas. Na Seção 3.1.1 mostramos que o número de possíveis cabos distintos para pentes com sete ou menos arestas é apenas nove.

Outra implicação interessante do Teorema Principal é que o conjunto dos contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores coincide com o conjunto dos contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos Três 3-Cortes, conforme veremos na Seção 3.2. Portanto, concluímos que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos Três 3-Cortes é também 8-ciclicamente-aresta-conexo, 3-conexo e 4-ciclicamente-conexo. Não sabemos afirmar se estas propriedades são também satisfeitas por contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Fluxos. Conforme mencionamos na Seção 1.4, Kochol mostrou que é possível construir um contra-exemplo para a Conjetura dos 3-Fluxos via um contra-exemplo para a Conjetura dos Três 3-Cortes. No entanto, o grafo obtido por essa construção, além de ser maior que o original, tem um 2-corte de vértices e um 4-corte de arestas que não é pente.

**3.1.1 Os Pentos Pequenos**

Nesta seção vamos contar o número de possíveis cabos distintos de pentes com sete ou menos arestas, bem como determinar a estrutura de cada um deles. Para tal vamos calcular a relação entre o número de arestas do pente, o número de arestas internas ao cabo e o número de vértices de grau três e de grau cinco do cabo. Primeiramente vamos analisar os pentes cujos cabos induzem uma árvore.

**LEMA 3.2**

Sejam  $G$  um grafo com três ou menos vértices de grau três,  $C$  um  $r$ -pente de  $G$ ,  $r \leq 7$ , e  $X$  um cabo de  $C$ . Se  $G[X]$  é uma árvore, então,  $r \geq 3$  e, conforme ilustrado na Figura 3.1,

- (i) se  $r = 3$  então  $X$  consiste de precisamente um vértice, que tem grau três;
- (ii) se  $r = 4$  então  $X$  consiste de precisamente dois vértices, ambos de grau três;



- (iii) se  $r = 5$  então existem dois 5-pentas, um trivial, outro em que  $X$  consiste de precisamente três vértices, todos de grau três;
- (iv) se  $r = 6$  então  $X$  consiste de precisamente dois vértices, um de grau três, outro de grau cinco;
- (v) se  $r = 7$  então existem dois 7-pentas, em ambos o conjunto  $X$  consiste de precisamente três vértices, sendo dois de grau três e um de grau cinco.

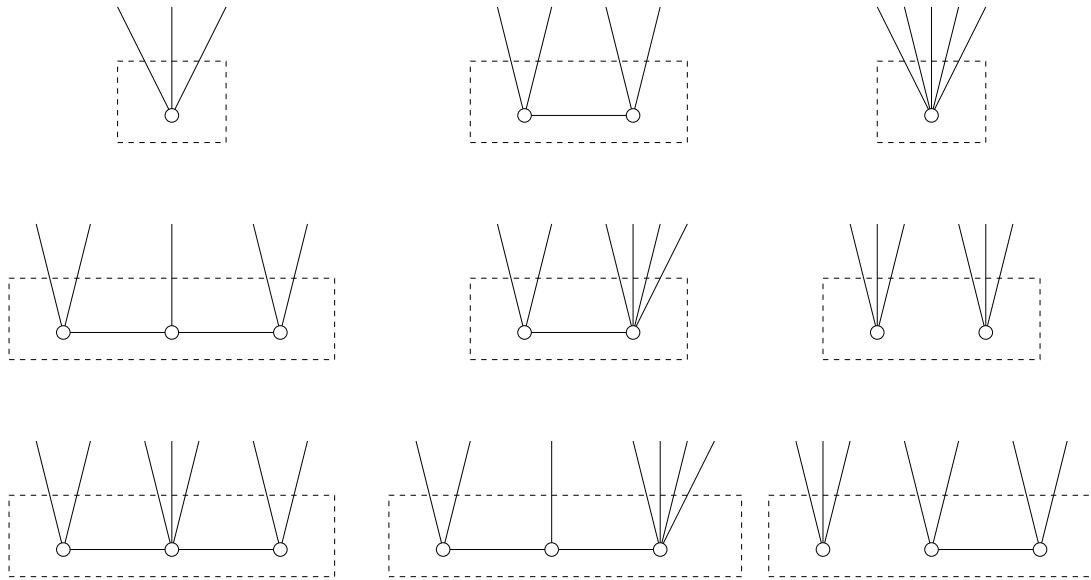


Figura 3.1: Os nove  $r$ -pentas, com  $r \leq 7$

Demonstração: Sejam  $n_3$  e  $n_5$ , respectivamente, os números de vértices de grau três e cinco em  $G$  que pertencem a  $X$ . Seja  $t$  o número de arestas de  $G[X]$ . Então,

$$3n_3 + 5n_5 - r = 2t = 2(n_3 + n_5 - 1).$$

Logo,  $n_3 + 3n_5 = r - 2$ . Assim,  $r \geq 3$ . As soluções satisfazem a congruência  $n_3 \equiv r - 2 \pmod{3}$ . Dado que  $n_3 \leq 3$ , então para  $r = 3, 4, 6, 7$  a solução é única. Para  $r = 5$  podemos ter  $n_3 = 0$  ou  $n_3 = 3$ . Assim, os valores possíveis são os mostrados na Tabela 3.1.

A estrutura dos sete diferentes cabos de  $r$ -pentas que induzem uma árvore e com  $r \leq 7$ , estão indicados na Figura 3.1.  $\square$

$r$	$n_3$	$n_5$
3	1	0
4	2	0
5	3	0
5	0	1
6	1	1
7	2	1

Tabela 3.1: Os valores de  $n_3$  e de  $n_5$  para  $r$ -pentas de cabos conexos e  $r \leq 7$ **LEMA 3.3**

Seja  $G$  um grafo com três ou menos vértices de grau três,  $C$  um  $r$ -pente de  $G$ ,  $r \leq 7$ , seja  $X$  um cabo de  $C$ . Se  $G[X]$  tem  $p$  componentes conexas,  $p \geq 2$ , então,  $6 \leq r \leq 7$ ,  $p = 2$  e o cabo de  $C$  é a união disjunta de cabos de dois pentas, cada um com três ou quatro arestas.

Demonstração: Para cada componente conexa  $K$  de  $G[X]$ , o corte  $C_K := \partial(V(K))$  é um pente. Pelo Lema 3.2,  $|C_K| \geq 3$ . Por hipótese,  $r \leq 7$ . Portanto,  $p = 2$  e  $C$  é a união disjunta de cabos de dois pentas, cada um com três ou quatro arestas.  $\square$

Apenas dois novos cabos não conexos são acrescentados à lista de cabos de pentas com no máximo sete arestas, conforme ilustrado pela Figura 3.1.

## 3.2 Implicações do Teorema Principal

Seja  $G_\star$ , juntamente com um conjunto  $S$  de no máximo três vértices, um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Demonstraremos que segue como consequência do Teorema Principal que  $G_\star$  é 8-ciclicamente-aresta-conexo, 3-conexo e 4-ciclicamente-conexo.

**COROLÁRIO 3.4**

O grafo  $G_\star$  é 8-ciclicamente-aresta-conexo.  $\square$

**COROLÁRIO 3.5**

O grafo  $G_\star$  é 3-conexo.

Demonstração: Pelo Teorema Principal temos que  $G_\star$  é 2-conexo e 3-aresta-conexo. Suponha, por absurdo, que  $G_\star$  tenha uma 2-separação,  $\{v_1, v_2\}$ . Então,  $G_\star - v_1 - v_2$  pode ser decomposto em dois subgrafos disjuntos e não vazios,  $K$  e  $K'$ . Para  $i = 1, 2$ , considere

o corte  $C_i := \partial(V(K) \cup \{v_i\})$  em  $G_\star$  (Figura 3.2). Nenhum dos dois cortes  $C_i$  é trivial. Na

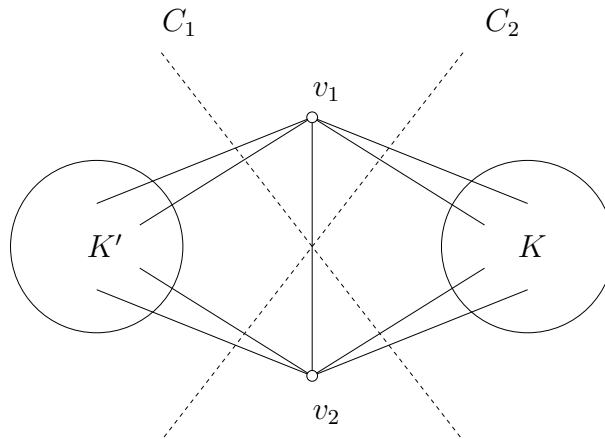


Figura 3.2: Ilustração para a demonstração do Corolário 3.5

verdade, nem  $K$  nem  $K'$  tem apenas um vértice, porque  $G_\star$  é 3-aresta-conexo e simples. Assim, ambas as praias de  $C_i$  têm três ou mais vértices. Conseqüentemente,  $|C_i| \geq 5$ , pois todo 3-pente tem cabo trivial e todo 4-corte tem cabo com dois vértices apenas. Por outro lado, todo vértice de  $G_\star$  tem grau três ou cinco, então

$$10 \leq |C_1| + |C_2| = |\partial(v_1)| + |\partial(v_2)| \leq 10.$$

Assim, vale a igualdade, e os dois vértices da separação têm ambos grau cinco. Concluimos que os dois cortes  $C_i$  são também 5-cortes. Mas os 5-cortes  $C_i$  têm ambas as praias não unitárias e ambas contendo um vértice de grau cinco. Portanto, nenhum dos dois cortes é um pente, uma contradição ao Teorema Principal. De fato,  $G_\star$  é 3-conexo.  $\square$

**COROLÁRIO 3.6**

*O grafo  $G_\star$  é 4-ciclicamente-conexo.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $G_\star$  tenha um conjunto de três ou menos vértices  $T$  tal que  $G_\star - T$  tenha pelo menos duas componentes conexas com ciclos. Pelo Corolário 3.5,  $|T| = 3$ . Seja  $T = \{v_1, v_2, v_3\}$  uma 3-separação de  $G_\star$  e  $K$  e  $K'$  duas componentes conexas de  $G_\star - T$  que contêm ciclos. Considere os cortes  $C := \partial(V(K))$  e  $C' := \partial(V(K'))$  de  $G_\star$  (Figura 3.3). Ajuste a notação, se necessário, de forma que  $|C| \leq |C'|$ . Pelo Teorema Principal,  $G_\star$  possui apenas vértices de grau três ou cinco. Portanto,

$$|C| + |C'| \leq |\partial(v_1)| + |\partial(v_2)| + |\partial(v_3)| \leq 15$$

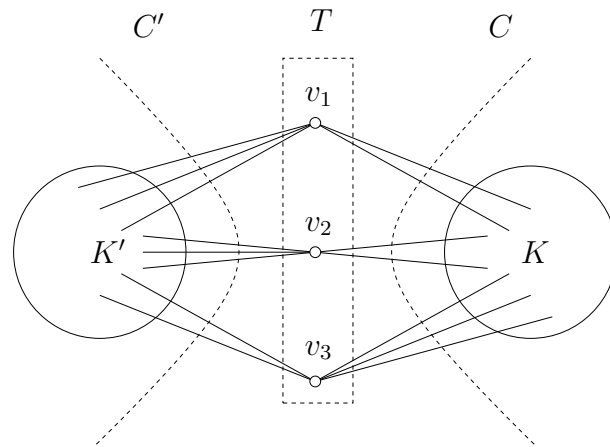


Figura 3.3: Ilustração para a demonstração do Corolário 3.6

Assim,  $|C| \leq 7$  e, pelo Teorema Principal,  $C$  é um pente. Mas ambas  $K$  e  $K'$  contêm ciclos, uma contradição. Concluimos que, de fato,  $G_*$  é 4-ciclicamente-conexo.  $\square$

### COROLÁRIO 3.7

*Todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores é contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos Três 3-Cortes.*

Demonstração: Seja  $G$ , juntamente com um conjunto  $S$  apropriado, um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Certamente  $G$  é 2-conexo. Pelo Teorema Principal, todos os 3-cortes de  $G$  são pentes, ou seja, triviais. Além disso, os vértices de  $S$  são precisamente os vértices das praias unitárias dos 3-cortes de  $G$ . Assim,  $G$  tem no máximo três 3-cortes, todos triviais, sendo portanto um contra-exemplo para a Conjetura dos Três 3-Cortes também. Vamos agora mostrar que  $G$  é, na verdade, um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos Três 3-Cortes. Suponha o contrário. Então existe um contra-exemplo  $G'$  menor que  $G$  para a Conjetura dos Três 3-Cortes. Mas o grafo  $G'$ , juntamente com o conjunto  $S'$  dado por seus vértices de grau três, é também um contra-exemplo para Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Além disso,  $G'$  é menor que  $G$ , contradizendo a minimalidade do contra-exemplo  $G$  para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Concluimos, por esse raciocínio, que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores é um contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos Três 3-Cortes e vice-versa.  $\square$

### 3.3 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção demonstramos o teorema principal mencionado no início do capítulo. Seja  $G_*$ , juntamente com um conjunto  $S$  de no máximo três vértices, um contra-exemplo de tamanho mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Então, qualquer grafo  $H$  com  $\text{tam}(H) < \text{tam}(G_*)$  que satisfaça, juntamente com um conjunto  $S_H$  apropriado, a hipótese da Conjetura, necessariamente tem uma 3-orientação. Sempre que for possível estender a 3-orientação de  $H$  a uma 3-orientação de  $G_*$  teremos uma contradição ao fato de  $G_*$  ser um contra-exemplo. Vamos apresentar diversas contradições desse tipo que nos permitem determinar propriedades de  $G_*$  e de  $S$  que levam à demonstração da validade do Teorema 3.1.

Na Seção 3.3.2 mostramos que  $G_*$  é simples, 2-conexo e 3-aresta-conexo. Dizemos que essas são as propriedades *elementares* do contra-exemplo mínimo. Na Seção 3.3.3 demonstramos o Lema da Regularidade, que afirma que todo vértice do contra-exemplo mínimo tem grau três ou cinco, sendo de grau três se e somente se pertence a  $S$ . Finalmente, na Seção 3.3.4 mostramos que todo  $r$ -corte pequeno de  $G_*$ , isto é, com  $r \leq 7$ , é um pente. Esta última seção é a que traz as demonstrações mais longas e mais complicadas. A idéia é mostrar que sempre que temos um  $r$ -corte pequeno  $C$  que não é um pente, podemos obter a partir de  $G_*$  dois grafos de tamanho menor que compartilham as arestas de  $C$ , estes são as  $C$ -contrações de  $G_*$ , definidos mais precisamente na Seção 3.3.1. Associamos a cada  $C$ -contração um conjunto  $S$  conveniente de forma que ambas satisfaçam a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Então, ambas têm 3-orientações que, se coincidirem nas arestas de  $C$ , nos permitem obter uma 3-orientação de  $G_*$ , contradizendo o fato deste ser um contra-exemplo. Mostraremos que sempre é possível garantir a existência de 3-orientações que concordam em  $C$  quando este é um corte pequeno de  $G_*$  que não é pente.

#### 3.3.1 Contrações de Vértices

Lançaremos freqüentemente mão da operação de contração de conjuntos de vértices, a fim de diminuirmos o tamanho do grafo e podermos assim obter 3-orientações dessas contrações. Vamos então definir precisamente a noção de contração de forma a permitir o transporte da validade da hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores para essas contrações.

Seja  $G$  um grafo,  $X$  um conjunto não vazio de vértices de  $G$ . O grafo obtido a partir de  $G$  pela contração dos vértices de  $X$  a um único vértice,  $x$ , com a eliminação de todas as arestas com ambos os extremos em  $X$ , é chamado uma  $X$ -contração de  $G$  e é denotado  $G\{X \rightarrow x\}$ . Chamamos a atenção para a diferença entre  $X$ -contração e  $G/X$ , este último definido no Capítulo 2: na  $X$ -contração arestas com ambos os extremos em  $X$  são

removidas ao passo que em  $G/X$  estas se tornam laços.

Uma  $X$ -contração é *própria* quando  $X$  tem pelo menos dois vértices. Seja  $C$  um corte não vazio de  $G$ . Uma  $C$ -contração de  $G$  é uma  $X$ -contração de  $G$  para alguma praia  $X$  de  $C$ . Dado um conjunto  $S$  de vértices de  $G$ , a  $X$ -contração de  $S$  é o conjunto  $S_X$  de vértices de  $G\{X \rightarrow x\}$  assim definido:

$$S_X := \begin{cases} (S - X) \cup \{x\}, & \text{se } S \cap X \neq \emptyset, \\ S, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

LEMA 3.8

Toda  $X$ -contração própria de  $G_\star$  tem uma 3-orientação.

Demonstração: Seja  $H := G_\star\{X \rightarrow x\}$  uma  $X$ -contração própria de  $G_\star$  e  $S_H$  a correspondente  $X$ -contração de  $S$ . A contração de vértices não cria cortes. Portanto,  $H$  é 2-aresta-conexo. Por definição de  $S_H$ , temos que  $|S_H| \leq |S| \leq 3$ . Vamos mostrar agora que todo 3-corte de  $H$  separa  $S_H$ .

Seja  $Y$  um subconjunto de  $V(H)$ . Ajuste a notação, complementando  $Y$  se necessário, de forma que  $Y$  não contenha o vértice  $x$ . O corte  $D := \partial(Y)$  em  $H$  é também um corte de  $G_\star$ . Suponha que  $D$  seja um 3-corte. Por hipótese, em  $G_\star$ ,  $D$  separa  $S$ . Portanto, tanto  $Y$  quanto  $V(G_\star) - Y$  contêm vértices de  $S$ . Se  $S$  contém vértices em  $X$  então  $x$  pertence a  $S_H$ , por definição; se  $S$  não contém vértices em  $X$  então todos os vértices de  $S$  em  $V(G_\star) - Y$  estão em  $V(H) - Y - x$ . Em ambas as alternativas,  $V(H) - Y$  contém vértices de  $S_H$ . Como  $Y$  também contém vértices em  $S_H$ , concluímos que  $D$  separa  $S_H$  em  $H$ . Essa conclusão vale para todo 3-corte de  $H$ . Então,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores.

Como  $H$  é uma  $X$ -contração própria, então o tamanho de  $H$  é menor que o de  $G_\star$ . Portanto, de fato,  $H$  admite uma 3-orientação.  $\square$

### 3.3.2 Propriedades Elementares

LEMA 3.9

O grafo  $G_\star$  é simples, 2-conexo e 3-aresta-conexo.

Demonstração:

**O grafo  $G_\star$  é simples.** Obviamente,  $G_\star$  é livre de laços. Suponha que  $G_\star$  tenha um par de arestas paralelas,  $e$  e  $f$ , ambas ligando dois vértices,  $v$  e  $w$ . Seja  $X := \{v, w\}$  e  $H := G_\star\{X \rightarrow x\}$  a  $X$ -contração de  $G_\star$ . Pelo Lema 3.8,  $H$  tem uma 3-orientação  $D_H$ . Vamos agora mostrar que é possível estender  $D_H$  a uma 3-orientação  $D_\star$  de  $G_\star$ .

Inicialmente, vamos estender  $D_H$  a uma orientação  $D$  de  $G_\star - e - f$  que não necessariamente é uma 3-orientação. Para tanto, seja  $T$  o conjunto das arestas de  $G_\star$  que ligam  $v$  a  $w$ . Obtemos  $D$  a partir de  $D_H$  orientando arbitrariamente as arestas de  $T - e - f$ . Todos os vértices de  $G_\star - e - f$  distintos de  $v$  e de  $w$  estão equilibrados em  $D$ . Pela Proposição 1.7, os fluxos líquidos de saída  $\ell(v)$  e  $\ell(w)$ , de  $v$  e de  $w$  em  $D$ , respectivamente, satisfazem a congruência  $\ell(v) + \ell(w) \equiv 0 \pmod{3}$ . Se  $\ell(v) \equiv 0 \pmod{3}$  então estendemos  $D$  a  $D_\star$  orientando  $e$  de  $v$  a  $w$  e  $f$  de  $w$  a  $v$ . Por outro lado, se  $\ell(v) \equiv 1 \pmod{3}$  orientamos tanto  $e$  quanto  $f$  de  $v$  a  $w$ , ao passo que se  $\ell(v) \equiv 2 \pmod{3}$  então orientamos tanto  $e$  quanto  $f$  de  $w$  a  $v$ . Nas três alternativas,  $D_\star$  é uma 3-orientação de  $G_\star$ , uma contradição. De fato,  $G_\star$  é simples.

**O grafo  $G_\star$  é 2-conexo.** Suponha que  $G_\star$  tenha um vértice de separação  $v$ . Então  $G_\star$  é a união de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , cada um com dois ou mais vértices, e que têm apenas o vértice  $v$  em comum. O grafo  $G_1$  é a  $V(G_2)$ -contração de  $G_\star$  e o grafo  $G_2$  é a  $V(G_1)$ -contração de  $G_\star$ . Então, ambos são contrações próprias de  $G_\star$  e, pelo Lema 3.8, têm uma 3-orientação. A união das duas 3-orientações é uma 3-orientação de  $G_\star$ , uma contradição. De fato,  $G_\star$  é 2-conexo.

**O grafo  $G_\star$  é 3-aresta-conexo.** Suponha o contrário. Por hipótese  $G_\star$  é 2-aresta-conexo. Então,  $G$  tem 2-cortes. Seja  $C$  um 2-corte de  $G_\star$ . Seja  $e := vw$  uma aresta de  $C$ ,  $Y := \{v, w\}$  e  $H := G_\star \{Y \rightarrow y\}$  a  $Y$ -contração de  $G_\star$ . Pelo Lema 3.8,  $H$  tem uma 3-orientação  $D_H$ . Vimos que  $G_\star$  é simples, portanto,  $E(H) = E(G_\star) - e$ . Vamos agora estender  $D_H$  a uma 3-orientação  $D_\star$  de  $G_\star$ , atribuindo a  $e$  uma orientação conveniente: orientamos  $e$  de forma que o 2-corte  $C$  fique equilibrado. Seja  $X$  a praia de  $C$  que contém o vértice  $v$  e  $\varphi$  a função constante unitária associada a  $D_\star$ . Então,

$$0 = \varphi(X) = \sum_{x \in X} \varphi(x) \equiv \varphi(v) \pmod{3},$$

onde a segunda igualdade segue da Proposição 1.7 e a congruência segue do fato que todo vértice de  $X$  distinto de  $v$  está equilibrado. Analogamente,  $\varphi(w) \equiv 0 \pmod{3}$ . Portanto,  $D_\star$  é uma 3-orientação de  $G_\star$ , uma contradição. De fato,  $G_\star$  é 3-aresta-conexo.  $\square$

### 3.3.3 A Regularidade de $G_\star$

Nesta seção vamos demonstrar o Lema da Regularidade que afirma que os vértices de  $G_\star$  têm grau três ou cinco, sendo os de grau três precisamente os vértices de  $S$ . A seguir descrevemos a operação de divisão de vértices, utilizada na demonstração do Lema da Regularidade.

Seja  $v$  um vértice de um grafo  $G$ . Sejam  $e_1 := vv_1$  e  $e_2 := vv_2$  duas arestas distintas incidentes em  $v$ , ligando o vértice  $v$  aos vértices  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Admitimos a possibilidade de  $v_1$  e  $v_2$  serem iguais, caso em que  $e_1$  e  $e_2$  são arestas paralelas. A *divisão de  $v$  nas arestas  $e_1$  e  $e_2$*  de  $G$  é dada pela remoção das arestas  $e_1$  e  $e_2$  e, se  $v_1$  e  $v_2$  forem distintos, pela adição de uma nova aresta ligando  $v_1$  a  $v_2$  (Figura 3.4). À primeira vista

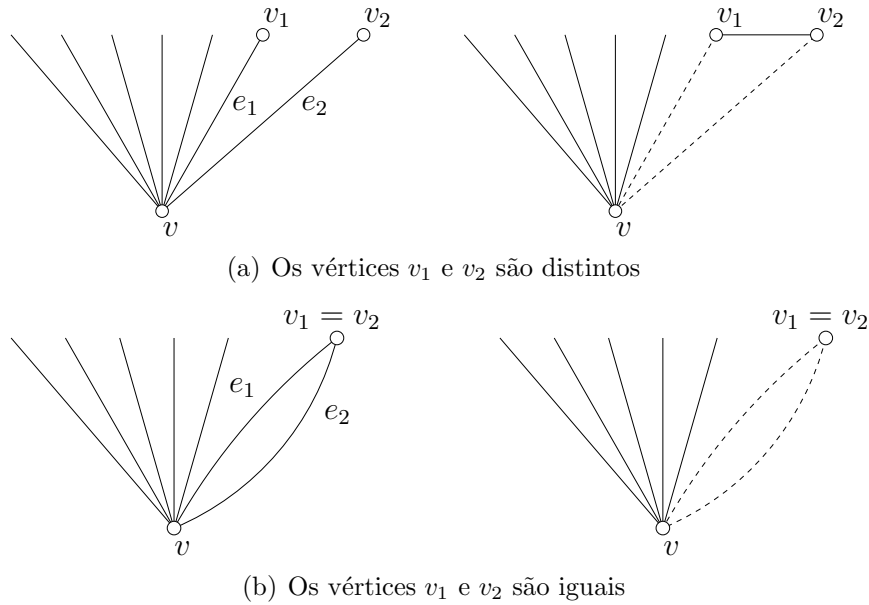


Figura 3.4: Divisão do vértice  $v$  nas arestas  $e_1$  e  $e_2$

pode parecer estranho considerarmos a divisão de um vértice em arestas paralelas, já que sabemos que  $G_\star$  é simples. No entanto, a técnica utilizada para reduzir cortes pequenos a pentes envolve a divisão de vértices em  $X$ -contrações de  $G_\star$ , as quais podem ter arestas paralelas.

Claramente, o tamanho do grafo  $H$  obtido a partir de  $G$  pela divisão de um vértice  $v$  é menor que o de  $G$ . O resultado a seguir, de demonstração bastante simples, será utilizado inúmeras vezes.

#### LEMA 3.10

Seja  $G$  um grafo,  $v$  um vértice de  $G$ ,  $e_1$  e  $e_2$  arestas de  $G$  incidentes em  $v$ ,  $H$  o grafo obtido de  $G$  após a divisão de  $v$  em  $e_1$  e  $e_2$ . Se  $H$  tem uma 3-orientação então  $G$  também tem uma 3-orientação, em que uma das arestas  $e_1$  e  $e_2$  é orientada saindo de  $v$ , a outra entrando em  $v$ .



Demonstração: Seja  $D_H$  uma 3-orientação de  $H$ . Vamos mostrar que  $G$  tem uma 3-orientação  $D$  que estende  $D_H$ . Se  $e_1$  e  $e_2$  são arestas paralelas, orientamos uma em cada direção. Caso contrário, orientamos  $e_1$  e  $e_2$  de forma que o caminho  $(v_1, v, v_2)$  seja um caminho orientado em  $D$  no mesmo sentido de orientação da aresta  $v_1v_2$  em  $D_H$ .  $\square$

Dados um grafo  $G$  e um conjunto de três ou menos vértices  $T$ , dizemos que um par  $e_1, e_2$  de arestas adjacentes incidentes em um vértice  $v$  de  $G$  é *divisível segundo  $T$*  (ou simplesmente *divisível* quando  $T$  é subentendido) se o grafo  $H$  resultante da divisão de  $v$  em  $e_1$  e  $e_2$ , juntamente com  $T$  no papel de  $S$ , satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Dizemos que um corte de  $G$  é *especial segundo  $T$*  (ou simplesmente *especial* quando  $T$  é subentendido) se for um 5-corte que não separa  $T$  ou se for um 3-corte.

O Lema 3.10 recém-demonstrado implica que nenhum par de arestas adjacentes de  $G_\star$  é divisível segundo  $S$ . Caso contrário, o grafo  $H$  resultante da divisão, por ser menor que  $G_\star$ , tem uma 3-orientação e, portanto,  $G_\star$  também tem uma 3-orientação.

Denotamos por  $\mathcal{C}$  a coleção dos cortes especiais segundo  $S$  do contra-exemplo mínimo  $G_\star$ . Segue como Corolário do Lema da Divisão, demonstrado a seguir, e do Lema 3.10 que todo par de arestas adjacentes de  $G_\star$  pertence a algum corte especial de  $\mathcal{C}$ .

#### LEMA 3.11 (LEMA DA DIVISÃO)

Seja  $G$  um grafo,  $v$  um vértice de  $G$ ,  $e_1 := vv_1$  e  $e_2 := vv_2$  duas arestas distintas, ambas incidentes em  $v$ . Seja  $S$  um conjunto de três ou menos vértices de  $G$ . Se  $G$  e  $S$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores mas  $e_1$  e  $e_2$  não são divisíveis segundo  $S$ , então algum corte especial segundo  $S$  contém ambas  $e_1$  e  $e_2$ .

Demonstração: Seja  $H$  o grafo resultante da divisão de  $v$  nas arestas  $e_1$  e  $e_2$ . Seja  $C := \partial(X)$  um corte de  $H$  que é uma aresta de corte ou um 3-corte que não separa  $S$ . Ajuste a notação, complementando  $X$  se necessário, de forma que  $X$  contenha o vértice  $v$ . Seja  $C' := \partial(X; G)$ . Certamente  $C'$  e  $C$  são distintos, logo  $X$  não contém ambos  $v_1$  e  $v_2$ . Note também que se  $X$  contém um dos vértices  $v_1$  e  $v_2$  mas não o outro então  $|C'| = |C|$  e  $G$  e  $S$  também não satisfazem a hipótese da Conjetura, uma contradição. Concluimos que nem  $v_1$  nem  $v_2$  pertencem a  $X$  e, portanto,  $C' = C \cup \{e_1, e_2\}$ .

Por hipótese,  $G$  é livre de arestas de corte. Logo, se  $C$  for uma aresta de corte em  $H$  então  $C'$  é um 3-corte de  $G$  que contém ambas as arestas  $e_1$  e  $e_2$ . Por hipótese, todo 3-corte de  $G$  separa  $S$ . Logo, se  $C$  for um 3-corte de  $H$  que não separa  $S$  então  $C'$  é um 5-corte de  $G$  que não separa  $S$  e que contém ambas as arestas  $e_1$  e  $e_2$ .  $\square$

#### COROLÁRIO 3.12

Todo par de arestas adjacentes de  $G_\star$  pertence a algum corte especial de  $\mathcal{C}$ .

Finalmente podemos provar o Lema da Regularidade.

LEMA 3.13 (LEMA DA REGULARIDADE)

Todo vértice de  $G_*$  que pertence a  $S$  tem grau três e todo vértice de  $G_*$  que não pertence a  $S$  tem grau cinco.

Demonstração: Seja  $v$  um vértice de  $G_*$ . Se  $v$  tem grau três então  $v$  claramente pertence a  $S$ , pois  $\partial(v)$  é um 3-corte que separa  $S$ . Podemos então supor que o grau de  $v$  não é três. Queremos provar que  $v$  tem grau cinco e não pertence a  $S$ . Para tal, escolha dentre todos os cortes especiais de  $\mathcal{C}$  um corte  $C = \partial(X)$  tal que  $\partial(v) \cap C$  seja maximal. Vamos provar que  $C = \partial(v)$ .

Suponha, por absurdo, que  $\partial(v) - C$  contenha uma aresta  $e_i = vv_i$ . Segue do Corolário 3.12 e da maximalidade de  $\partial(v) \cap C$ , que há pelo menos duas arestas em  $\partial(v) \cap C$ . Seja  $e_j = vv_j$  uma aresta qualquer de  $\partial(v) \cap C$ . Pelo Corolário 3.12 existe um corte  $D = \partial(Y)$  de  $\mathcal{C}$  que contém ambas as arestas  $e_i$  e  $e_j$ . Ajuste a notação, se necessário, de forma que  $v \in X \cap Y$ , conforme ilustrado na Figura 3.5. Pela maximalidade de  $\partial(v) \cap C$ ,

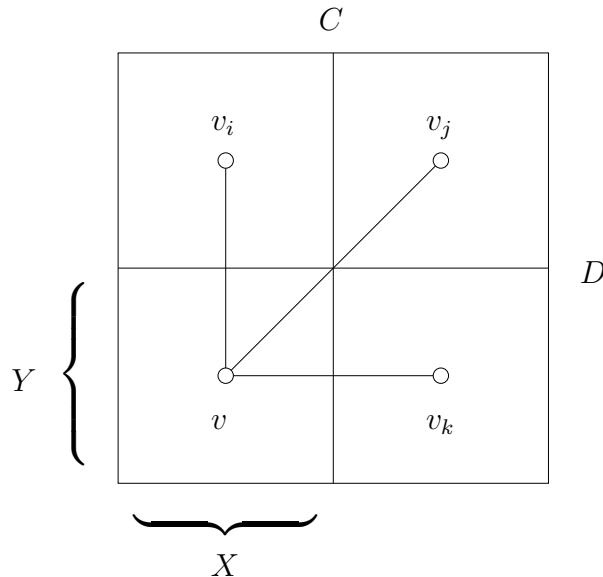


Figura 3.5: Cruzamento dos cortes  $C$  e  $D$

pelo menos uma das arestas de  $\partial(v)$  pertence a  $C$  mas não a  $D$ . Seja  $e_k = vv_k$  uma tal aresta (Figura 3.5). Então, temos que  $v \in X \cap Y$ ,  $v_i \in X \cap \bar{Y}$ ,  $v_j \in \bar{X} \cap \bar{Y}$  e  $v_k \in \bar{X} \cap Y$ . Portanto, os cortes  $C$  e  $D$  se cruzam e

$$|\partial(X \cap Y)| + |\partial(\bar{X} \cap \bar{Y})| + 2|\partial(\bar{X} \cap Y, X \cap \bar{Y})| = |C| + |D|. \quad (3.1)$$

Como os cortes  $C$  e  $D$  têm mesma paridade, então os cortes  $\partial(X \cap Y)$  e  $\partial(\overline{X} \cap \overline{Y})$  associados a quadrantes opostos têm mesma paridade também. Podemos trocar os papéis de  $X$  e  $\overline{X}$  na equação (3.1) obtendo assim a seguinte equação:

$$|\partial(\overline{X} \cap Y)| + |\partial(X \cap \overline{Y})| + 2|\partial(X \cap Y, \overline{X} \cap \overline{Y})| = |C| + |D|. \quad (3.2)$$

Então, os cortes  $\partial(\overline{X} \cap Y)$  e  $\partial(X \cap \overline{Y})$  associados aos outros dois quadrantes opostos também têm mesma paridade. Como ambos  $C$  e  $D$  são cortes ímpares, os cortes associados a quadrantes adjacentes têm paridades distintas. Ademais, como a aresta  $e_j$  pertence a  $\partial(\overline{X} \cap Y, X \cap \overline{Y})$  temos que

$$|\partial(\overline{X} \cap Y)| + |\partial(X \cap \overline{Y})| \leq |C| + |D| - 2. \quad (3.3)$$

Por outro lado, pelo Lema 3.9,  $G_\star$  é 3-aresta-conexo. Então,

$$6 \leq |\partial(\overline{X} \cap Y)| + |\partial(X \cap \overline{Y})|. \quad (3.4)$$

Deduzimos de imediato de (3.3) e (3.4) que  $|C| + |D| \geq 8$  e, portanto,  $C$  e  $D$  não podem ser ambos 3-cortes. Considere primeiro o caso em que precisamente um deles é um 3-corte. Deduzimos das inequações (3.3) e (3.4) e da 3-aresta-conexidade de  $G_\star$  que ambos os cortes  $\partial(\overline{X} \cap Y)$  e  $\partial(X \cap \overline{Y})$  são 3-cortes. Por hipótese, ambos  $\partial(\overline{X} \cap Y)$  e  $\partial(X \cap \overline{Y})$  separam  $S$  e então há vértices de  $S$  tanto em  $\overline{X} \cap Y$  quanto em  $X \cap \overline{Y}$ . Assim, ambos  $C$  e  $D$  separam  $S$ . Mas um deles é um 5-corte que, como pertence a  $\mathcal{C}$ , não separa  $S$ , uma contradição. Podemos então supor que ambos  $C$  e  $D$  são 5-cortes. Como ambos pertencem a  $\mathcal{C}$ , nenhum dos dois separa  $S$ . Portanto, nenhum dos cortes  $\partial(X \cap Y)$ ,  $\partial(X \cap \overline{Y})$ ,  $\partial(\overline{X} \cap Y)$  e  $\partial(\overline{X} \cap \overline{Y})$  separa  $S$ . Assim, cada um desses quatro cortes tem quatro ou mais arestas. Em particular, deduzimos de (3.3) que

$$|\partial(\overline{X} \cap Y)| = |\partial(X \cap \overline{Y})| = 4.$$

Portanto, os cortes associados aos outros dois quadrantes,  $\partial(X \cap Y)$  e  $\partial(\overline{X} \cap \overline{Y})$ , são ambos ímpares e têm, cada um, cinco ou mais arestas. Pela equação (3.1), ambos são 5-cortes. Em particular,  $\partial(X \cap Y)$  é um 5-corte que não separa  $S$  e que contém a aresta  $e_i$  além de todas as arestas de  $\partial(v) \cap C$ , uma contradição à maximalidade de  $\partial(v) \cap C$ . Finalmente concluímos que  $\partial(v) \subseteq C$ .

Suponha agora que  $C - \partial(v)$  seja não vazio. Então, ambos  $\partial(v)$  e  $C - \partial(v)$  são cortes de  $G_\star$  e, como  $|C| \leq 5$ , pelo menos um deles tem duas ou menos arestas, uma contradição à 3-aresta-conexidade de  $G_\star$ . Concluímos finalmente que  $C = \partial(v)$ . Como  $C = \partial(v)$  é um corte de  $\mathcal{C}$ , então ou é um 5-corte que não separa  $S$  ou é um 3-corte. Mas já sabemos que  $v$  não tem grau três, logo  $v$  tem grau cinco e não pertence a  $S$ . Concluímos assim a demonstração.  $\square$

### 3.3.4 Redução de Cortes Pequenos

Nesta seção mostraremos que é possível reduzir todo  $r$ -corte pequeno, isto é,  $r \leq 7$ , a um  $r$ -pente. Para isso precisamos definir a seguir o conceito de orientações viáveis e similares.

Seja  $G$  um grafo,  $C$  um corte de  $G$  e  $D_C$  uma 3-orientação de  $C$ . Dizemos que  $D_C$  é *viável* em  $G$  se existe uma extensão de  $D_C$  a uma 3-orientação de  $G$ . Dada uma 3-orientação  $D$  de  $G$ , denotamos por  $D^R$  a orientação reversa de  $D$ , obtida pela reversão da orientação de todas as suas arestas. Claramente, se uma orientação  $D_C$  de  $C$  é viável em  $G$ , então sua reversa  $D_C^R$  também é viável em  $G$ . Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas 3-orientações de  $G$ . Dizemos que  $D_1$  e  $D_2$  são  *$C$ -similares* quando ou  $D_1$  e  $D_2$  ou  $D_1$  e  $D_2^R$  coincidem nas arestas do corte  $C$ . Nos casos em que  $C$  é subentendido, dizemos simplesmente que  $D_1$  e  $D_2$  são similares.

Na redução de  $r$ -cortes pequenos a  $r$ -pentes vamos trabalhar com as duas  $C$ -contrações de  $G_\star$  relativas ao corte pequeno  $C$ . Claramente, se uma mesma 3-orientação de  $C$  é viável em ambas as  $C$ -contrações, então  $G_\star$  tem uma 3-orientação. Portanto, a existência de uma tal 3-orientação contradiz o fato de  $G_\star$  ser um contra-exemplo. Vamos mostrar que quando o corte pequeno  $C$  não é um pente, conseguimos sempre obter uma 3-orientação viável em ambas as  $C$ -contrações.

Em todas as reduções, denotaremos por  $C$  um corte pequeno de  $G_\star$  que não é pente e por  $G := G_\star\{X \rightarrow x\}$  uma  $C$ -contração genérica de  $G_\star$ . Denotaremos por  $S_G$  a respectiva  $X$ -contração de  $S$  e por  $\hat{S}_G$  o conjunto dos vértices de  $S$  presentes em  $G$ , isto é,  $S \cap \bar{X}$ . Note que  $\hat{S}_G = S_G$  somente se  $C$  não separa  $S$ , caso contrário,  $S_G = \hat{S}_G \cup \{x\}$ .

A seguir demonstraremos uma série de propriedades satisfeitas por toda  $C$ -contração  $G$  de  $G_\star$  que são muito utilizadas nas reduções de cortes pequenos a pentes.

#### LEMA 3.14

*Seja  $C$  um corte pequeno de  $G_\star$  que não é pente. Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  e  $D$  um corte de  $G$  que é um pente de  $G_\star$ . Então  $D$  é um pente de  $G$  e seu cabo em  $G$  e  $G_\star$  coincidem, isto é, é a praia de  $D$  em  $G$  que não contém o vértice de contração  $x$ .*

Demonstração: Seja  $Y$  o cabo de  $D$  em  $G_\star$ . Então, ou  $X \subset Y$  ou  $X \cap Y = \emptyset$ . Vamos mostrar que  $X \cap Y = \emptyset$ . Para tanto, suponha por absurdo que  $X \subset Y$ . Como  $Y$  é o cabo do pente  $D$  em  $G_\star$ , todos os vértices de  $Y$  têm grau três ou cinco, e, além disso,  $G_\star[Y]$  é uma floresta. Nesse caso, todos os vértices de  $X$  têm grau três ou cinco e, além disso,  $G_\star[X]$  é uma floresta. Portanto,  $C$  é um pente, uma contradição. De fato,  $X \cap Y = \emptyset$  (Figura 3.6(a)). Nessas condições,  $G[Y] = G_\star[Y]$  também é uma floresta cujos vértices têm todos grau três ou cinco em  $G$ . De fato,  $D$  é um pente em  $G$  e  $Y$  é seu cabo (Figura 3.6(b)).  $\square$

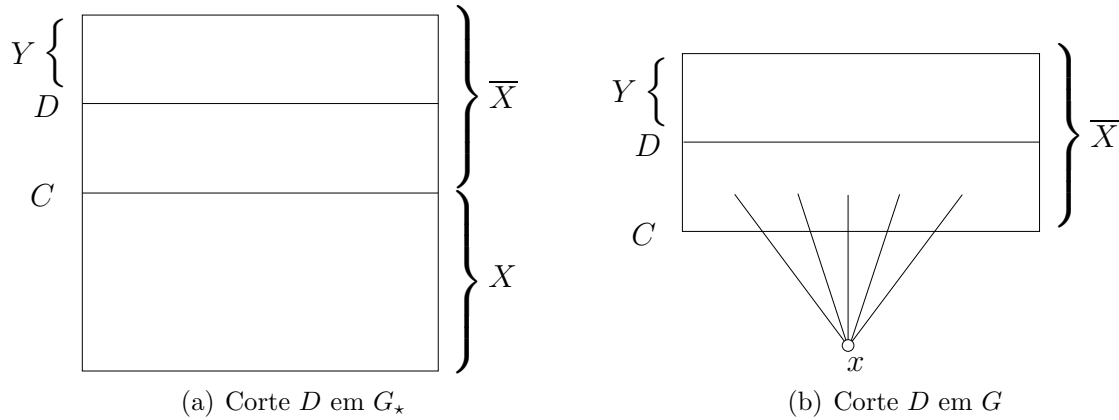


Figura 3.6: Ilustração da demonstração do Lema 3.14

**LEMA 3.15**

Seja  $C$  um corte pequeno de  $G_*$  que não é pente. Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$ . Então,

$$\text{tam}(G_*) \geq \text{tam}(G) + 5.$$

Demonstração: O corte  $C$  é pequeno e não é um pente de  $G_*$ . Assim,  $X$  não é um cabo de  $C$ . Portanto, ou  $X$  tem um vértice cujo grau em  $G_*$  não é nem três nem cinco, ou  $G_*[X]$  tem um ciclo. Pelo Lema da Regularidade, todo vértice de  $G_*$  tem grau três ou cinco. Então, concluímos que  $G_*[X]$  tem um ciclo. Mas  $G_*$  é simples. Logo,  $X$  tem três ou mais vértices e, além disso, tem um ciclo com três ou mais arestas. Assim,  $|X| + |E(G[X])| \geq 6$ . De fato,  $\text{tam}(G_*) \geq \text{tam}(G) + 5$ .  $\square$

Uma *expansão* de  $G$  é um grafo  $H$  obtido a partir de  $G$  pela substituição do vértice de contração  $x$  por um conjunto  $Z$  de dois ou três vértices de forma que  $C = \partial(Z)$  seja um  $r$ -pente de  $H$  e  $Z$  seja seu cabo, onde  $4 \leq r \leq 7$ . O resultado a seguir é um corolário dos Lemas 3.15, 3.2 e 3.3.

**COROLÁRIO 3.16**

Seja  $C$  um corte pequeno de  $G_*$  que não é pente. Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  e  $H$  uma expansão de  $G$ . Então,

$$\text{tam}(H) < \text{tam}(G_*).$$

Demonstração: Pelo Lema 3.15, temos que  $\text{tam}(G_*) \geq \text{tam}(G) + 5$ . Pelos Lemas 3.2 e 3.3, um cabo de um  $r$ -pente,  $4 \leq r \leq 7$ , tem no máximo três vértices e duas arestas. Portanto,

$$\text{tam}(H) \leq \text{tam}(G) + 4 < \text{tam}(G_*).$$

□

Vamos agora analisar a multiplicidade máxima de arestas de  $C$  em  $G$ . Vamos mostrar que a multiplicidade não chega a três, com três exceções, dos grafos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , ilustrados na Figura 3.7.

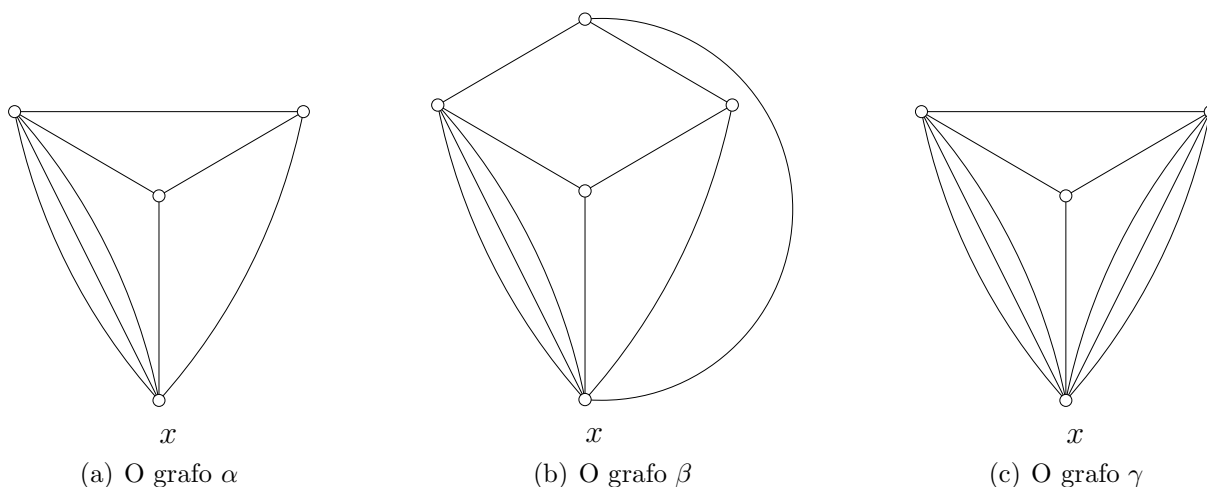


Figura 3.7: Os grafos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , os únicos com multiplicidade três nas arestas de  $C$

#### LEMA 3.17 (LEMA DA MULTIPLICIDADE)

Seja  $C$  um corte pequeno de  $G_*$  que não é pente e  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$ . Seja  $\mu$  a multiplicidade máxima das arestas de  $C$  em  $G$ . Se todo corte de  $G_*$  com menos arestas do que  $C$  é um pente, então  $\mu \leq 3$ , com igualdade somente se  $G$  é um dos três grafos  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  (Figura 3.7). Ademais, se duas arestas de  $C$  são paralelas em  $G$ , então seu extremo comum distinto de  $x$  tem grau cinco.

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar que  $\mu \leq 3$  e também que nenhum vértice de grau três de  $G$  incide em arestas paralelas de  $C$ . Para tanto, suponhamos que duas arestas de  $C$ ,  $e_1 := xv_1$  e  $e_2 := xv_2$ , são paralelas em  $G$ , ou seja  $v_1 = v_2$ . Consideremos a diferença simétrica  $D := C \Delta \partial(v_1)$ . Note que  $D$  não é vazio, caso contrário  $G - x$  seria o grafo vértice, portanto  $C$  seria trivial em  $G_*$ , uma contradição pois estamos supondo que  $C$  não é pente. Assim,  $D$  é um corte não vazio de  $G$ . A praia de  $D$  que não contém  $x$  é o complemento  $Y$  de  $\{x, v_1\}$ .

Consideremos inicialmente o caso em que  $|D| \geq |C|$ . Então, pelo menos metade das arestas de  $\partial(v_1)$  são incidentes em vértices de  $Y$ . Assim, no máximo metade das arestas de  $\partial(v_1)$  ligam  $x$  a  $v_1$ . Por outro lado, pelo Lema da Regularidade, o grau de  $v_1$  é três ou

cinco. Dado que  $e_1$  e  $e_2$  incidem em  $v_1$ , temos que o grau de  $v_1$  é cinco e que nenhuma aresta além de  $e_1$  e  $e_2$  liga  $x$  a  $v_1$ .

Consideremos agora o caso em que  $|D| < |C|$ . Então, por hipótese,  $D$  é um pente em  $G_*$ . Também por hipótese,  $C$  não é um pente em  $G_*$ . Então, pelo Lema 3.14,  $D$  é um pente de  $G$  e  $Y$  é seu cabo. Logo,  $G[Y]$  é uma floresta. Mas  $G[Y + v_1] = G[\overline{X}]$  não é uma floresta. Assim,  $v_1$  é ligado por duas ou mais arestas a vértices de uma mesma componente conexa,  $K$ , de  $G[Y]$ . Em particular, isto implica que não mais do que  $|\partial(v_1)| - 2$  arestas ligam  $x$  a  $v_1$ . Pelo Lema da Regularidade, o grau de  $v_1$  é três ou cinco. Concluimos então que o grau de  $v_1$  é cinco e também que não mais do que três arestas ligam  $x$  a  $v_1$ .

Em ambos os casos, concluimos que o grau de  $v_1$  é cinco. Concluimos também que não mais do que três arestas ligam  $x$  a  $v_1$ , com igualdade somente se  $|D| < |C|$ . Esta conclusão vale para todo vértice  $v_1$  ligado a  $x$  por duas ou mais arestas. Em particular,  $\mu \leq 3$ . Ademais, nenhum vértice de grau três de  $G$  é incidente em arestas paralelas de  $C$ .

Para completar a demonstração, suponhamos que precisamente três arestas ligam  $x$  a  $v_1$ . Então,  $|D| < |C|$  e precisamente duas arestas,  $f_1$  e  $f_2$ , ligam  $v_1$  a vértices da mesma componente conexa  $K$  de  $G[Y]$ . Sabemos, pelo Lema 3.9, que  $G - x$ , um subgrafo de  $G_*$ , é simples. Assim, as duas arestas são incidentes em vértices distintos de  $K$ . Por hipótese,  $3 \leq |C| \leq 7$ . Logo,  $3 \leq |D| \leq 6$ . Mas  $Y$  não pode ser unitário. Pelos Lemas 3.2 e 3.3, concluimos que  $|D| \in \{4, 5, 6\}$ . Ademais, foi provado acima que os eventuais vértices de  $Y$  de grau três em  $G$  não são extremos de arestas paralelas em  $G$ . No caso de  $D$  ser um 4-corte, temos que  $G = \alpha$ . No caso de  $D$  ser um 5-corte, as três arestas de  $C \cap D$  incidem uma em cada vértice (de grau três) de  $Y$  e portanto  $G = \beta$ . Finalmente, no caso em que  $D$  é um 6-corte, as arestas  $f_1$  e  $f_2$  têm que incidir em vértices distintos de  $K$ . Lembramos que  $K$  é conexo, portanto  $Y$  consiste de dois vértices adjacentes, um de grau três e outro de grau cinco. Logo,  $G = \gamma$ .  $\square$

### 3.3.5 Análise de 3-Cortes

Nesta seção mostramos que todo 3-corte é trivial e, portanto, um pente. Segue como corolário deste fato e do Lema da Multiplicidade que toda  $C$ -contração  $G$  de  $G_*$  é 2-conexa.

LEMA 3.18

*Todo 3-corte de  $G_*$  é trivial. Assim, todo 3-corte de  $G_*$  é um pente.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $C := \partial(X)$  seja um 3-corte de  $G_*$  que não é trivial. Sejam  $G_1$  e  $G_2$  as duas  $C$ -contrações de  $G_*$ . Ambas são próprias. Assim, pelo Lema 3.8, ambas têm uma 3-orientação. Mas toda 3-orientação de  $G_1$  e de  $G_2$  faz  $C$  ser um corte orientado. Ou seja, a única 3-orientação de  $C$  (com as três arestas orientadas

no mesmo sentido) é viável em ambas as  $C$ -contrações. Então,  $G_\star$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato, todo 3-corte de  $G_\star$  é um pente trivial.  $\square$

### COROLÁRIO 3.19

*Para qualquer corte pequeno  $C$ , toda  $C$ -contração  $G$  de  $G_\star$  é 2-conexa.*

Demonstração: Sabemos que  $G_\star$  é 2-conexo. Então, basta provarmos que o vértice de contração  $x$  não é de corte em  $G$ . Suponha o contrário. Então  $G$  tem um corte  $D$  com não mais que  $\frac{|C|}{2}$  arestas. Como  $C$  tem no máximo 7 arestas,  $D$  é um corte com três ou menos arestas. Mas  $G$  é 3-aresta-conexo, pois  $G_\star$  é 3-aresta-conexo pelo Lema 3.9. Então  $D$  é um 3-corte e  $C$  tem seis ou sete arestas. O corte  $D$  é também um corte de  $G_\star$ . Pelo Lema 3.18,  $D$  é um pente (trivial) em  $G_\star$ . Pelo Lema 3.14,  $D$  é um pente trivial em  $G$  e a sua praia unitária não contém o vértice de contração  $x$ . Portanto, as três arestas de  $D$  são paralelas, todas incidentes no vértice de grau três da praia unitária de  $D$ , uma contradição ao Lema da Multiplicidade.  $\square$

### 3.3.6 Análise de 4-Cortes

Vamos aqui demonstrar que todo 4-corte de  $G_\star$  é um 4-pente. Para tal, vamos supor que  $C := \partial(X)$  é um 4-corte de  $G_\star$  que não é um pente e vamos mostrar que há uma 3-orientação de  $C$  que é viável em ambas as  $C$ -contrações.

Qualquer 3-orientação do 4-corte  $C$  particiona  $C$  em dois pares de arestas de mesmo sentido, sendo que esses dois pares se equilibram. Assim, são três as possíveis 3-orientações não similares de  $C$ , identificadas pelas três possíveis partições das arestas de  $C$  em pares.

Existe um único 4-pente, o qual é não trivial (Figura 3.1 na página 33). Assim, uma expansão de  $G$  quando  $C$  é um 4-corte tem precisamente dois vértices em  $Z$ , ambos de grau três e adjacentes entre si, conforme ilustrado pela Figura 3.8. No Lema 3.20 a seguir, demonstramos que se  $|\hat{S}_G| \leq 1$ , então a expansão de  $G$  tem uma 3-orientação. A partir deste fato conseguimos facilmente mostrar, no Lema 3.21, que todo 4-corte de  $G_\star$  é um pente.

#### LEMA 3.20

*Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  e  $H$  uma expansão de  $G$ . Se  $|\hat{S}_G| \leq 1$ , então  $H$  tem uma 3-orientação.*

Demonstração: Sejam  $Z := \{z_1, z_2\}$  e  $S_H := \hat{S}_G \cup Z$ . Primeiramente vamos mostrar que  $H$ , juntamente com  $S_H$ , satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. O grafo  $G$  é 3-aresta-conexo pois  $G_\star$  é 3-aresta-conexo (Lema 3.9). Assim, a aresta  $z_1z_2$  não é de corte em  $H$ , caso contrário  $C \cap \partial(z_1)$  seria um 2-corte de  $G$ . Portanto,  $H$  é



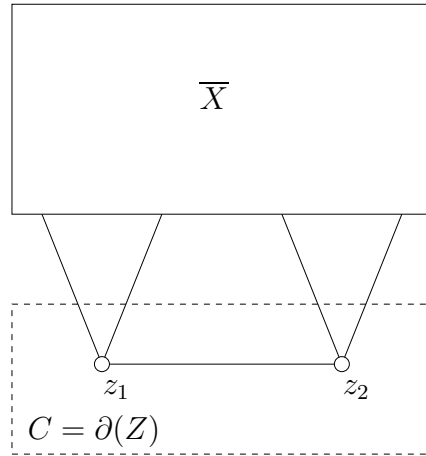


Figura 3.8: A expansão de  $G$  quando  $C$  é um 4-corte

2-aresta-conexo. Ademais, como  $|\hat{S}_G| \leq 1$ ,  $G$  tem não mais do que um 3-corte e, se tiver um 3-corte, este é trivial e sua praia unitária pertence a  $S_H$ . Todo corte de  $H$  que não é um corte de  $G$  separa  $Z$  e, portanto, separa  $S_H$ . Assim, todo 3-corte de  $H$  separa  $S_H$ . De fato,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Pelo Corolário 3.16, o tamanho de  $H$  é menor do que o tamanho de  $G_\star$ . Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação.  $\square$

#### LEMA 3.21

*Todo 4-corte de  $G_\star$  é um pente.*

Demonstração: Seja  $C$  um 4-corte de  $G_\star$  que não é pente e sejam  $G_1$  e  $G_2$  as  $C$ -contrações de  $G_\star$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $S_i$  a contração de  $S$ . Ajuste a notação de forma que  $|S_1| \geq |S_2|$ . Assim,  $|\hat{S}_2| \leq 1$ . Seja  $C := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ .

O grafo  $G_1$  é uma contração própria de  $G_\star$ . Então, pelo Lema 3.8, tem uma 3-orientação. Seja  $D_1$  a restrição desta orientação a  $C$ . Ajuste a notação de forma que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  de  $C$  sejam orientadas no mesmo sentido em  $D_1$ . Seja  $H$  a extensão de  $G_2$  em que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  incidem em  $z_1$  e as arestas  $e_3$  e  $e_4$  incidem em  $z_2$ . Como  $|\hat{S}_2| \leq 1$ , então, pelo Lema 3.20,  $H$  tem uma 3-orientação, que é também uma 3-orientação de  $G_2$ . Seja  $D_2$  a restrição dessa orientação a  $C$ . Note que qualquer 3-orientação de  $H$  deixa os 3-cortes triviais  $\partial(z_1)$  e  $\partial(z_2)$  orientados e em sentidos opostos pois  $z_1$  e  $z_2$  são adjacentes. Portanto,  $D_1$  e  $D_2$  são similares. Além disso,  $D_1$  é viável em ambas as  $C$ -contrações  $G_1$  e  $G_2$ . Logo,  $G_\star$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato, todo 4-corte de  $G_\star$  é um pente.  $\square$

### 3.3.7 Análise de 5-Cortes

Vamos aqui demonstrar que todo 5-corte de  $G_\star$  é um 5-pente. Para tal, vamos supor que  $C := \partial(X)$  é um 5-corte de  $G_\star$  que não é um pente e vamos mostrar que há uma 3-orientação de  $C$  que é viável em ambas as  $C$ -contrações. Denotaremos por  $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$  as arestas de  $C$  em  $G$ , sendo  $e_i := xv_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Vamos adotar o seguinte critério de escolha de  $C$ :

**Critério de Escolha:** dentre os 5-cortes de  $G_\star$  que não são pentes, vamos dar preferência para um 5-corte  $C$  que não separe  $S$ , se possível.

As 3-orientações de um 5-corte  $C$  têm quatro arestas orientadas em um mesmo sentido e uma aresta, denominada *minoritária*, orientada no sentido oposto. Assim, o corte  $C$  possui precisamente cinco orientações não similares, cada uma das quais tendo uma aresta de  $C$  como minoritária.

Existe um único tipo de 5-pente não trivial (Figura 3.1 na página 33). Assim, uma expansão de  $G$  quando  $C$  é um 5-corte tem precisamente três vértices em  $Z$ , todos de grau três, sendo um deles adjacente aos outros dois, conforme ilustrado pela Figura 3.9. No Lema 3.22 a seguir, demonstramos que se  $|\hat{S}_G| = 0$ , então a expansão de  $G$  tem uma

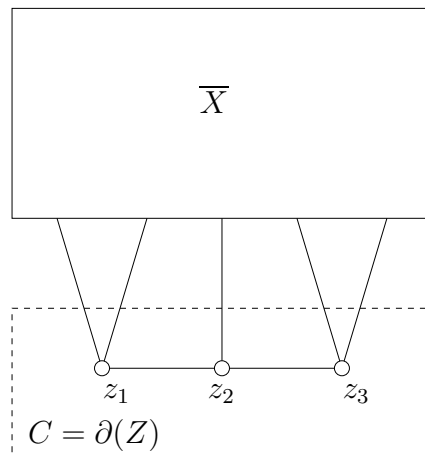


Figura 3.9: A expansão de  $G$  quando  $C$  é um 5-corte

3-orientação. A partir deste fato conseguimos facilmente mostrar, no Lema 3.23, que todo 5-corte de  $G_\star$  que não separe  $S$  é um pente.

#### LEMA 3.22

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  e  $H$  uma expansão de  $G$ . Se  $|\hat{S}_G| = 0$ , então  $H$  tem uma 3-orientação.

Demonstração: Seja  $Z := \{z_1, z_2, z_3\}$  tal que  $z_2$  é adjacente a  $z_1$  e  $z_3$ . Primeiramente vamos mostrar que  $H$ , juntamente com  $Z$ , satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Pelo Corolário 3.19, o grafo  $G$  é 2-conexo. Então, certamente  $H$  é 2-aresta-conexo. Assim, para provarmos que  $H$  e  $Z$  satisfazem a hipótese da Conjetura, basta mostrarmos que todo 3-corte de  $H$  separa  $Z$ . Mas  $G$  é 4-aresta-conexo pois  $|\hat{S}_G| = 0$ . Então, de fato, todo 3-corte de  $H$  separa  $Z$  e, portanto,  $H$  e  $Z$  satisfazem a hipótese da Conjetura.

Pelo Corolário 3.16, o tamanho do grafo  $H$  é menor do que o tamanho de  $G_*$ . Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação.  $\square$

### LEMA 3.23

*Todo 5-corte de  $G_*$  que não separa  $S$  é um pente.*

Demonstração: Seja  $C$  um 5-corte de  $G_*$  que não é pente e não separa  $S$  e sejam  $G_1$  e  $G_2$  as  $C$ -contrações de  $G_*$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $S_i$  a contração de  $S$ . Ajuste a notação de forma que  $|S_1| \geq |S_2|$ . Assim,  $|\hat{S}_2| = 0$ .

O grafo  $G_1$  é uma contração própria de  $G_*$ . Então, pelo Lema 3.8, tem uma 3-orientação. Seja  $D_1$  a restrição desta orientação a  $C$ . Ajuste a notação de forma que  $e_3$  seja a aresta minoritária de  $C$  em  $D_1$ . Seja  $H$  a expansão de  $G_2$  em que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  incidem em  $z_1$ , a aresta  $e_3$  incide em  $z_2$  e as arestas  $e_4$  e  $e_5$  incidem em  $z_3$ . Como  $|\hat{S}_2| = 0$ , então, pelo Lema 3.22,  $H$  tem uma 3-orientação, que é também uma 3-orientação de  $G_2$ . Seja  $D_2$  a restrição dessa orientação a  $C$ . Note que em qualquer 3-orientação de  $H$  a aresta  $e_3$  é a minoritária do corte  $C = \partial(Z)$ . Assim, ambas  $D_1$  e  $D_2$  têm a aresta  $e_3$  como minoritária e, portanto, são similares. Logo,  $G_*$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato, todo 5-corte de  $G_*$  que não separa  $S$  é um pente.  $\square$

Vamos agora provar mais algumas propriedades de  $G$  para o caso em que o 5-corte  $C$  separa  $S$ . Estas propriedades nos permitem mostrar, no Lema 3.26, que todo 5-corte de  $G_*$  que separa  $S$  é um pente.

### LEMA 3.24

*Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  tal que  $1 \leq |\hat{S}_G| \leq 2$ . Se (i)  $|\hat{S}_G| = 1$  ou se (ii)  $e_1$  e  $e_2$  não são paralelas, então  $G$  tem uma 3-orientação em que ou  $e_1$  ou  $e_2$  é minoritária em  $C$ .*

Demonstração: Seja  $H$  o grafo obtido a partir de  $G$  pela divisão de  $x$  em  $e_1$  e  $e_2$ . Seja  $S_H$  definido da seguinte forma:

$$S_H := \begin{cases} S_G \cup \{v_1\}, & \text{se } e_1 \text{ e } e_2 \text{ forem paralelas,} \\ S_G, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponhamos que  $H$  e  $S_H$  satisfaçam a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. O tamanho de  $H$  é menor que o de  $G$ , o qual, pelo Corolário 3.16, é menor que o tamanho

de  $G_*$ . Então,  $H$  tem uma 3-orientação. Pelo Lema 3.10,  $G$  tem uma 3-orientação em que  $e_1$  e  $e_2$  são orientadas em sentidos opostos. Seja  $D$  a restrição dessa orientação a  $C$ . Claramente, ou  $e_1$  ou  $e_2$  é a aresta minoritária de  $C$  em  $D$  nesse caso, mesmo que  $e_1$  e  $e_2$  sejam paralelas. Portanto, para concluir a demonstração do Lema basta mostrarmos que se  $H$  e  $S_H$  não satisfazem a hipótese da Conjetura, então  $|\hat{S}_G| = 2$  e  $e_1$  e  $e_2$  são paralelas.

Suponha que  $H$  e  $S_H$  não satisfaçam a hipótese da Conjetura. Se (i)  $|\hat{S}_G| = 1$  ou (ii)  $e_1$  e  $e_2$  não são paralelas, então claramente  $|S_H| \leq 3$ . Como  $G$  e  $S_G$  satisfazem a hipótese da Conjetura, então  $G$  e  $S_H$  também satisfazem pois  $S_G \subseteq S_H$ . Deduzimos então que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  não são divisíveis em  $G$  segundo  $S_H$ . Pelo Lema da Divisão,  $G$  tem um corte especial segundo  $S_H$  que contém ambas as arestas  $e_1$  e  $e_2$ . Seja  $D_G := \partial(Y)$  um tal corte de  $G$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  não contenha  $x$ . Considere primeiro o caso em que  $D_G$  é um 3-corte. Então,  $D_G$  é trivial e  $Y$  é a sua praia unitária. Portanto,  $e_1$  e  $e_2$  são paralelas e incidentes em um vértice de grau três, uma contradição ao Lema da Multiplicidade. Então  $D_G$  é um 5-corte que não separa  $S_H$ . Assim,  $D_G$  tampouco separa  $S_G$ . Logo  $D_G$  é um corte de  $G_*$  que não separa  $S$ . Pelo Lema 3.23,  $D_G$  é um pente de  $G_*$ . Pelo Lema 3.14,  $D_G$  também é um pente de  $G$  e seu cabo é  $Y$ . Como  $|\hat{S}_G| \leq 2$ , o cabo  $Y$  do 5-pente  $D_G$  é unitário e as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são paralelas em  $G$ . Mas então  $v_1$ , o vértice de  $Y$ , pertence a  $S_H$  e  $D_G$  separa  $S_H$ , uma contradição. Deduzimos que  $G$  não possui um corte especial segundo  $S_H$  que contenha  $e_1$  e  $e_2$ . Assim,  $G$  tem uma 3-orientação em que ou  $e_1$  ou  $e_2$  é minoritária em  $C$ .  $\square$

### COROLÁRIO 3.25

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  tal que  $1 \leq |\hat{S}_G| \leq 2$ . Então pelo menos duas 3-orientações não similares de  $C$  são viáveis em  $G$ .

Demonstração: Certamente  $G$  é uma contração própria de  $G_*$ . Então, pelo Lema 3.8,  $G$  tem uma 3-orientação, digamos  $D_1$ . Ajuste a notação de forma que  $e_5$  seja a aresta minoritária de  $C$  em  $D_1$ . Pelo Lema da Multiplicidade, arestas de  $C$  incidentes em vértices de grau três não são paralelas. Portanto, como  $|\hat{S}_G| \leq 2$ ,  $C$  tem pelo menos três arestas não incidentes em vértices de grau três. Seja  $e_1 = xv_1$  uma tal aresta que seja distinta de  $e_5$ . Considere  $D_1^R$  no lugar de  $D_1$ , se necessário, de forma que  $e_1$  seja orientada em  $D_1$  de  $x$  para  $v_1$ . Sejam  $e_2 = xv_2$  e  $e_3 = xv_3$  duas outras arestas de  $C$  orientadas em  $D_1$  de  $x$  para  $v_2$  e de  $x$  para  $v_3$ , respectivamente. Note que ambas  $e_2$  e  $e_3$  são distintas de  $e_5$ , a aresta minoritária de  $C$  em  $D_1$ . Se  $v_1 = v_2 = v_3$  então a inversão da orientação das três arestas paralelas produz uma outra 3-orientação de  $G$ , não similar a  $D_1$ . Podemos então supor que ou  $v_2$  ou  $v_3$  é distinto de  $v_1$ . Ajuste a notação de forma que  $v_1 \neq v_2$ . Pelo Lema 3.24,  $G$  tem uma 3-orientação  $D_2$ , não similar a  $D_1$ , em que ou  $e_1$  ou  $e_2$  é minoritária em  $C$ . De fato, pelo menos duas 3-orientações não similares de  $C$  são viáveis em  $G$ .  $\square$

**LEMA 3.26**

Todo 5-corte de  $G_\star$  que separa  $S$  é um pente.

Demonstração: Seja  $C$  um 5-corte de  $G_\star$  e  $G_1$  e  $G_2$  as  $C$ -contrações de  $G_\star$ . Para  $i = 1, 2$ , sejam  $x_i$  os vértices de contração e  $S_i$  a contração de  $S$ . Ajuste a notação de forma que  $|S_1| \geq |S_2|$ . Assim,  $|\hat{S}_2| = 1$  e  $1 \leq |\hat{S}_1| \leq 2$ . Vamos mostrar que existe uma 3-orientação de  $C$  viável em ambas as  $C$ -contrações  $G_1$  e  $G_2$ .

Pelo Corolário 3.25, pelo menos duas 3-orientações não similares de  $C$  são viáveis em  $G_1$ . Sejam  $D_1$  e  $D_2$  as restrições de duas tais 3-orientações a  $C$ . Ambas são identificadas unicamente por sua aresta minoritária. Ajuste a notação de forma que, para  $i = 1, 2$ ,  $e_i$  seja minoritária em  $D_i$ . Pelo Lema 3.24, como  $|\hat{S}_2| = 1$ , pelo menos uma dentre  $D_1$  e  $D_2$  também é viável em  $G_2$ . Portanto,  $G_\star$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato,  $G_\star$  é livre de 5-cortes que não são pentes e separam  $S$ .  $\square$

Assim, concluímos a demonstração de que todo 5-corte de  $G_\star$  é um pente.

**3.3.8 Análise de 6-Cortes**

Vamos aqui demonstrar que todo 6-corte de  $G_\star$  é um 6-pente. Para tal, vamos supor que  $C := \partial(X)$  é um 6-corte de  $G_\star$  que não é um pente e vamos mostrar que há uma 3-orientação de  $C$  que é viável em ambas as  $C$ -contrações. Denotaremos por  $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$  as arestas de  $C$  em  $G$ , sendo  $e_i := xv_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Vamos adotar o seguinte critério de escolha de  $C$ :

**Critério de Escolha:** dentre os 6-cortes de  $G_\star$  que não são pentes, vamos dar preferência para um 6-corte  $C$  que não separe  $S$ , se possível.

As 3-orientações de um 6-corte  $C$  podem ser divididas em dois tipos: as  $C$ -orientadas que tornam o corte  $C$  orientado e as que particionam  $C$  em dois blocos de três arestas cada um, constituindo uma *equipartição* de  $C$ . Existem precisamente onze 3-orientações não similares do corte  $C$  sendo apenas uma  $C$ -orientada. As demais 3-orientações não similares são as dez possíveis equipartições não similares de  $C$ .

Nas seções que seguem apresentamos propriedades de uma  $C$ -contração  $G$  necessárias para a conclusão da demonstração. Primeiro estudamos o tamanho do menor corte não trivial de  $G$  de acordo com a cardinalidade de  $\hat{S}_G$ . Em seguida, apresentamos algumas propriedades de expansões de  $G$ . Só então, tratamos a redução de 6-cortes a pentes.

**Conexidade****LEMA 3.27**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$ . Se  $|\hat{S}_G| \leq 2$  então todo corte não trivial de  $G$  tem seis ou mais arestas, com uma possível exceção de um único 4-corte. Se  $|\hat{S}_G| \leq 1$  então todo corte não trivial de  $G$  tem seis ou mais arestas.

Demonstração: Suponha que  $|\hat{S}_G| \leq 2$ . Seja  $D := \partial(Y)$  um corte não trivial de  $G$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  não contenha o vértice de contração  $x$ . Então,  $D$  é um corte não trivial de  $G_*$ . Suponha que  $D$  tenha menos do que seis arestas. O grafo  $G_*$  é 3-aresta-conexo e todo 3-corte de  $G_*$  é trivial. Assim,  $D$  tem quatro ou cinco arestas. Suponha, por absurdo, que  $D$  tenha cinco arestas. Todo 5-corte de  $G_*$  é um pente de  $G_*$ . Pelo Lema 3.14, o corte  $D$  é um pente de  $G$  e o conjunto  $Y$  é o cabo de  $D$  em  $G$ . Mas  $G$  tem menos do que três vértices de grau três. Logo,  $Y$  é unitário, contradição. De fato,  $D$  é um 4-corte. Todo 4-corte é um pente de  $G_*$ . Pelo Lema 3.14, o corte  $D$  é um pente de  $G$  e  $Y$  é o cabo de  $D$ . Assim,  $Y$  consiste de dois vértices adjacentes, ambos de grau três, os dois únicos vértices de grau três de  $G$ .  $\square$

## Expansões

Nesta seção vamos estudar as expansões de  $G$ . Existem dois tipos de 6-pentes, ambos não triviais (Figura 3.1 na página 33). Logo, também existem dois tipos de expansões de  $G$  (Figura 3.10) quando  $C$  é um 6-corte. Qualquer que seja o tipo da expansão  $H$  de  $G$ , o cabo de  $C$  em  $H$  tem dois vértices  $Z := \{z_1, z_2\}$ . Para descrever cada tipo de expansão, basta indicarmos as conexões entre os vértices de  $Z$  e a incidência das arestas de  $C$  nos dois vértices de  $Z$ .

No primeiro tipo de expansão, os vértices  $z_1$  e  $z_2$  são adjacentes, duas arestas de  $C$  incidem em  $z_1$  e as outras quatro incidem em  $z_2$  (Figura 3.10(a)). Dizemos que uma tal expansão é do tipo 3-5 em alusão aos graus de  $z_1, z_2$ .

No segundo tipo de expansão, os vértices  $z_1$  e  $z_2$  são não adjacentes, metade das arestas de  $C$  incide em  $z_1$  e a outra metade incide em  $z_2$  (Figura 3.10(b)). Dizemos que uma tal expansão é do tipo 3-3 em alusão aos graus de  $z_1, z_2$ .

Freqüentemente consideraremos o caso em que na  $C$ -contração  $G$  a 3-orientação  $C$ -orientada não é viável e, através das expansões, conseguiremos garantir que várias equi-partições não similares são viáveis em  $G$ .

Para qualquer um dos tipos de expansão, quando  $|\hat{S}_G|$  é pequeno o suficiente, é possível garantir que  $H$  tem uma 3-orientação. A necessidade de ter  $|\hat{S}_G|$  pequeno deve-se ao fato que precisamos definir um conjunto  $S_H$  conveniente de vértices de  $H$  de forma que  $H$  e  $S_H$  satisfaçam a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Os lemas a seguir indicam o limite de  $|\hat{S}_G|$  em cada caso.

### LEMA 3.28

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 2$ ,  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-5 e  $S_H$  um conjunto com dois ou três vértices que inclui  $\hat{S}_G \cup \{z_1\}$ . Então,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores.

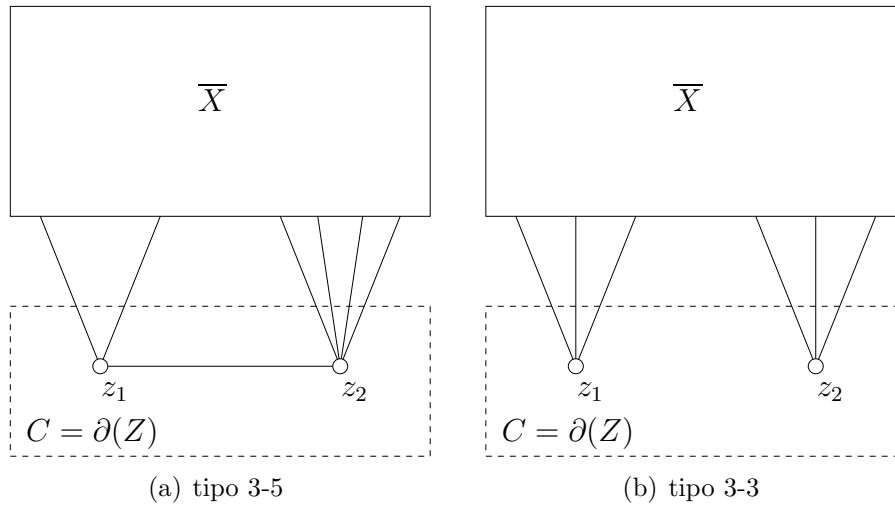


Figura 3.10: Os dois tipos de expansões de  $G$  quando  $C$  é um 6-corte

Demonstração: O grafo  $H$  é conexo pois  $G$  pode ser obtido a partir de  $H$  pela contração da aresta  $z_1z_2$  e  $G$  é conexo. Seja  $D := \partial(Y)$  um corte não vazio de  $H$ . Ajuste a notação, complementando  $Y$  se necessário, de forma que  $z_2$  não pertença a  $Y$ .

Considere inicialmente o caso em que  $z_1$  também não pertence a  $Y$ . Nesse caso,  $D$  é um corte de  $G$ . Se  $D$  for não trivial em  $G$  então, pelo Lema 3.27,  $D$  tem quatro ou mais arestas. Se  $D$  for trivial em  $G$ , então  $D$  é um 5-corte, com a possível exceção de no máximo dois 3-cortes, precisamente aqueles com uma praia unitária dada por um dos vértices de  $\hat{S}_G$ . Assim, neste caso,  $D$  tem três ou mais arestas, com igualdade somente se separa  $S_H$ .

Vamos considerar agora o caso em que  $z_1$  pertence a  $Y$ . Se  $D = \partial(z_1)$  então  $D$  é um 3-corte, trivial, cuja praia unitária é  $\{z_1\}$ , uma parte própria de  $S_H$ . Vamos então supor que  $D$  e  $\partial(z_1)$  sejam distintos. Seja  $W := Y - z_1$ . Então,  $D' := \partial(W) = D \Delta \partial(z_1)$  é um corte não vazio de  $G$ . Ademais,

$$|D| = |D'| + 3 - 2\nu, \tag{3.5}$$

onde  $\nu$  é o número de arestas de  $D'$  em  $\partial(z_1)$ . Assim,  $0 \leq \nu \leq 2$ , pois a aresta  $z_1z_2$  não pertence a  $D'$ . O corte  $D'$ , um corte de  $G$ , tem três ou mais arestas. Se  $D'$  é um 3-corte então é trivial e, pelo Lema da Multiplicidade, contém no máximo uma aresta de  $\partial(z_1)$ : nesse caso,  $|D| \geq 4$ . Podemos então supor que  $D'$  tem quatro ou mais arestas. Vamos mostrar que se  $D'$  é um 4-corte, então  $\nu \neq 2$ . Suponha o contrário. Nesse caso,  $D$  é um 3-corte. O corte  $D'$  é um 4-pente cujo cabo é a praia  $W$  (Lema 3.14). Então,  $W$  contém

precisamente dois vértices de grau três adjacentes (Figura 3.11), ou seja,  $|\hat{S}_G| = 2$ . Seja

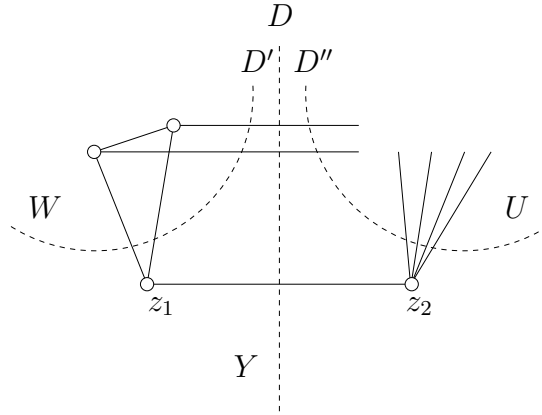


Figura 3.11: Caso em que  $D'$  é um 4-corte e  $\nu = 2$

$U = \overline{Y} - z_2$  e  $D'' = \partial(U) = D \Delta \partial(z_2)$ . Então,  $D''$  é um corte não vazio de  $G$  e  $|D''| = 8 - 2\sigma$ , onde  $\sigma$  é o número de arestas de  $D$  em  $\partial(z_2)$ . Assim,  $1 \leq \sigma \leq 3$ , pois  $z_1 z_2$  é uma aresta de  $D$  em  $\partial(z_2)$  e  $D$  é um 3-corte. Concluimos então que  $D''$  tem duas, quatro ou seis arestas. Mas  $D''$  é um corte de  $G$ , que é 3-aresta-conexo, então não é um 2-corte. Ademais, se  $D''$  for um 4-corte, então é um 4-pente e sua praia é  $U$ , uma contradição pois  $U$  não contém vértices de  $\hat{S}_G$ . Concluimos que  $D''$  é um 6-corte que não separa  $S$ . Mas  $C$  separa  $S$ , temos então uma contradição ao critério de escolha de  $C$  que dá preferência a 6-cortes que não separam  $S$ . Portanto,  $D'$  tem quatro ou mais arestas, com igualdade somente se  $\nu \leq 1$ . Pela equação (3.5),  $D$  tem quatro ou mais arestas. Finalmente, concluimos que  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura.  $\square$

#### COROLÁRIO 3.29

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 2$  e  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-5. Então,  $H$  tem uma 3-orientação.

Demonstração: Seja  $S_H$  um conjunto com três vértices que inclui  $\hat{S}_G \cup \{z_1\}$ . Pelo Lema 3.28,  $\overline{H}$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura. Ademais, o tamanho de  $H$  é menor que o do contra-exemplo mínimo  $G_\star$ , pelo Corolário 3.16. Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação.  $\square$



**LEMA 3.30**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 1$ ,  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-3 e  $S_H := \hat{S}_G \cup \{z_1, z_2\}$ . Então,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores.

Demonstração: Seja  $D := \partial(Y)$  um corte de  $H$ . Ajuste a notação, complementando  $Y$  se necessário, de forma que  $z_2$  não pertença a  $Y$ .

Considere inicialmente o caso em que  $z_1$  também não pertence a  $Y$ . Nesse caso,  $D$  é um corte de  $G$ . Se  $D$  for não trivial em  $G$ , então, pelo Lema 3.27,  $D$  tem seis ou mais arestas. Se  $D$  for trivial em  $G$ , então  $D$  é um 5-corte, com a possível exceção de precisamente um 3-corte, cuja praia unitária é o único vértice de  $\hat{S}_G$ . Assim, neste caso,  $D$  tem três ou mais arestas, com igualdade somente se separa  $S_H$ .

Vamos considerar agora o caso em que  $z_1$  pertence a  $Y$ . Se  $D = \partial(z_1)$  então  $D$  é um 3-corte, trivial, cuja praia unitária é  $\{z_1\}$ , uma parte de  $S_H$ . Vamos então supor que  $D$  e  $\partial(z_1)$  sejam distintos. Seja  $W := X - z_1$ . Então,  $D' := \partial(W) = D \Delta \partial(z_1)$  é um corte não vazio de  $G$ . Ademais,

$$|D| = |D'| + 3 - 2\nu,$$

onde  $\nu$  é o número de arestas de  $D'$  em  $\partial(z_1)$ . Assim,  $0 \leq \nu \leq 3$ . O corte  $D'$ , um corte de  $G$ , tem três ou mais arestas. Se  $D'$  é um 3-corte então é trivial e, pelo Lema da Multiplicidade, contém no máximo uma aresta de  $\partial(z_1)$ : nesse caso,  $|D| \geq 4$ . Se  $D'$  for um 5-corte então  $D'$  é trivial e, pelo Lema da Multiplicidade,  $D'$  contém no máximo duas arestas de  $\partial(z_1)$ : nesse caso,  $|D| \geq 4$ . Podemos então supor que  $D'$  não é nem um 3-corte nem um 5-corte de  $G$ . Nesse caso,  $D'$  é não trivial e contém seis ou mais arestas, e portanto  $|D| \geq 3$ ; ademais,  $D$  separa  $S_H$  neste caso. De fato,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores.  $\square$

**COROLÁRIO 3.31**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 1$  e  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-3. Então,  $H$  tem uma 3-orientação.

Demonstração: Pelo Lema 3.30,  $H$  e  $S_H := \hat{S}_G \cup \{z_1, z_2\}$  satisfazem a hipótese da Conjetura. Ademais, o tamanho de  $H$  é menor que o do contra-exemplo mínimo  $G_\star$ , pelo Corolário 3.16. Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação.  $\square$

**COROLÁRIO 3.32**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 1$ . Se a 3-orientação  $C$ -orientada não é viável em  $G$ , então todas as dez equipartições de  $C$  são viáveis em  $G$ .  $\square$

### Redução de 6-Cortes a Pentas

#### LEMA 3.33

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 3$ . Então, pelo menos duas 3-orientações não similares de  $C$  são viáveis em  $G$ .

Demonstração: Sabemos que  $G$  admite pelo menos uma 3-orientação. Seja  $D_1$  uma 3-orientação de  $G$ . Vamos mostrar que  $G$  tem pelo menos mais uma 3-orientação não similar a  $D_1$ .

Pelo Lema da Multiplicidade, arestas de  $C$  incidentes em vértices de grau três não são paralelas. Portanto,  $C$  tem pelo menos três arestas não incidentes em vértices de grau três. Seja  $e_1 = xv_1$  uma tal aresta. Considere  $D_1^R$  no lugar de  $D_1$ , se necessário, de forma que  $e_1$  seja orientada em  $D_1$  de  $x$  para  $v_1$ . Sejam  $e_2 = xv_2$  e  $e_3 = xv_3$  duas outras arestas de  $C$  orientadas em  $D_1$  de  $x$  para  $v_2$  e de  $x$  para  $v_3$ , respectivamente. Se  $v_1 = v_2 = v_3$  então a reversão da orientação das três arestas produz uma outra 3-orientação de  $G$ , não similar a  $D_1$ . Podemos então supor que ou  $v_2$  ou  $v_3$  é distinto de  $v_1$ . Ajuste a notação de forma que  $v_1 \neq v_2$ .

Vamos agora mostrar que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são divisíveis segundo  $S_G$ . Suponha o contrário. Então, pelo Lema da Divisão, existe um corte de  $G$ , digamos  $D = \partial(Y)$ , que é especial segundo  $S_G$  e que contém ambas  $e_1$  e  $e_2$ . O corte  $D$  tem três ou cinco arestas e não é trivial pois  $e_1$  e  $e_2$  não são paralelas. Mas todo 3-corte de  $G$  é trivial. Então,  $D$  é um 5-corte de  $G$  e, portanto, um 5-corte de  $G_\star$ . Logo,  $D$  é um pente. Ajuste a notação de forma que  $Y$  não contenha o vértice de contração  $x$ . Pelo Lema 3.14, o cabo de  $D$  é  $Y$ . Logo, como  $D$  é não trivial,  $Y$  consiste de três vértices de grau três. Mas o vértice  $v_1$  não tem grau três, uma contradição. Então  $e_1$  e  $e_2$  são de fato divisíveis segundo  $S_G$ . Pelo Lema 3.10, concluímos que  $G$  tem uma 3-orientação  $D_2$ , não similar a  $D_1$ , em que  $e_1$  e  $e_2$  são orientadas em sentidos contrários. Isso conclui a demonstração.  $\square$

#### LEMA 3.34

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $|\hat{S}_G| \leq 1$ . Se (i)  $|\hat{S}_G| = 0$  ou se (ii)  $|\hat{S}_G| = 1$  e as arestas  $e_3$  e  $e_4$  não são paralelas em  $G$ , então  $G$  tem uma equipartição viável de  $C$  em que um dos blocos é  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ou  $\{e_1, e_2, e_4\}$ .

Demonstração: Seja  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-5 tal que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  incidem em  $z_1$  e as quatro outras arestas de  $C$  incidem em  $z_2$ . Pelo Lema 3.28,  $H$  e  $S_H := \hat{S}_G \cup \{z_1, z_2\}$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores.

Seja  $H'$  o grafo obtido a partir de  $H$  pela divisão de  $z_2$  em  $e_3$  e  $e_4$ . Seja  $S'_H$  definido da seguinte forma:

$$S'_H := \begin{cases} S_H \cup \{v_3\}, & \text{se } e_3 \text{ e } e_4 \text{ forem paralelas,} \\ S_H, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponhamos que  $H'$  e  $S'_H$  satisfaçam a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. O tamanho de  $H'$  é menor que o de  $H$ , o qual, pelo Corolário 3.16, é menor que o tamanho de  $G_\star$ . Então,  $H'$  tem uma 3-orientação. Pelo Lema 3.10,  $H$  tem uma 3-orientação  $D$  em que  $e_3$  e  $e_4$  são orientadas em sentidos opostos. Logo, temos uma equipartição de  $C$  em  $D$ . As arestas  $e_1$  e  $e_2$  necessariamente são orientadas em  $D$  no mesmo sentido. Assim, ou  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ou  $\{e_1, e_2, e_4\}$  pertencem a um mesmo bloco da equipartição de  $C$  em  $D$ . Portanto, para concluir a demonstração do Lema basta mostrarmos que se  $H'$  e  $S'_H$  não satisfazem a hipótese da Conjetura, então  $|\hat{S}_G| = 1$  e  $e_3$  e  $e_4$  são paralelas.

Suponha que  $H'$  e  $S'_H$  não satisfaçam a hipótese da Conjetura. Se (i)  $|\hat{S}_G| = 0$  ou (ii)  $|\hat{S}_G| = 1$  e  $e_3$  e  $e_4$  não são paralelas, então claramente  $|S_H| \leq 3$ . Como  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura, então  $H$  e  $S'_H$  também satisfazem pois  $S_H \subseteq S'_H$ . Deduzimos então que as arestas  $e_3$  e  $e_4$  não são divisíveis em  $H$  segundo  $S'_H$ . Pelo Lema da Divisão temos que  $H$  tem um corte especial segundo  $S'_H$  que contém ambas as arestas  $e_3$  e  $e_4$ . Seja  $D_H := \partial(Y)$  um tal corte de  $H$ . Considere primeiro o caso em que  $D_H$  separa  $Z = \{z_1, z_2\}$ . Como  $D_H$  também separa  $S'_H$ , concluímos que este é um 3-corte. Nesse caso, todas as três arestas de  $D_H$  pertencem a  $\partial(z_2)$  e, portanto,  $D_G = \partial(z_2) - D_H$  é um 2-corte. Ademais,  $D_G$  não contém a aresta  $z_1z_2$  e é, portanto, um corte de  $G$ , uma contradição pois  $G$  é 3-aresta-conexo. Podemos então supor que  $D_H$  não separa  $Z$ , isto é,  $D_H$  é um corte de  $G$ . Ajuste a notação de forma que a praia  $Y$  de  $D_H$  não inclua  $Z$ . O corte  $D_H$  tem três ou cinco arestas, então, pelo Lema 3.27,  $D_H$  é trivial e sua praia unitária é  $Y$ . Como  $D_H$  inclui as arestas  $e_3$  e  $e_4$ , então estas são paralelas. Se  $D_H$  é um 3-corte, temos uma contradição ao Lema da Multiplicidade. Deduzimos então que  $D_H$  é um 5-corte. Como  $e_3$  e  $e_4$  são paralelas, então o vértice  $v_3$  de  $Y$  pertence a  $S'_H$ . Assim,  $D_H$  separa  $S'_H$ , uma contradição. Deduzimos que  $H$  não possui um corte especial segundo  $S_H$  que contenha  $e_3$  e  $e_4$ . Assim, vale a afirmação enunciada.  $\square$

### TEOREMA 3.35

*Todo 6-corte  $C$  de  $G_\star$  é um pente.*

Demonstração: Seja  $C$  um 6-corte de  $G_\star$  e  $G_1$  e  $G_2$  as  $C$ -contrações de  $G_\star$ . Para  $i = 1, 2$ , sejam  $x_i$  os vértices de contração,  $S_i$  a contração de  $S$ . Ajuste a notação de forma que  $|S_1| \geq |S_2|$ . Assim,  $|\hat{S}_2| \leq 1$ . Vamos mostrar que sempre existe uma 3-orientação de  $C$  viável em ambas as  $C$ -contrações  $G_1$  e  $G_2$ .

Se a 3-orientação  $C$ -orientada é viável em ambos  $G_1$  e  $G_2$  então nada mais temos a demonstrar. Podemos então supor que em pelo um de  $G_1$  e  $G_2$  a 3-orientação  $C$ -orientada não é viável. Considere primeiro o caso em que a 3-orientação  $C$ -orientada não é viável em  $G_2$ . Nesse caso, pelo Corolário 3.32, todas as equipartições não similares de  $C$  são viáveis em  $G_2$ . Pelo Lema 3.33, pelo menos duas 3-orientações não similares de  $C$  são

viáveis em  $G_1$ . Pelo menos uma delas é uma equipartição de  $C$ . Temos de fato pelo menos uma equipartição de  $C$  viável em ambos  $G_1$  e  $G_2$  neste caso.

Podemos então supor que a 3-orientação  $C$ -orientada é viável em  $G_2$ , mas não é viável em  $G_1$ . Assim, pelo Lema 3.33, pelo menos duas equipartições não similares de  $C$ , digamos  $D_1$  e  $D_2$ , são viáveis em  $G_1$ . Dadas quaisquer duas equipartições de  $C$ , existe um par de arestas de  $C$  que pertencem ao mesmo bloco em ambas as equipartições. Além disso, um bloco da equipartição a identifica unicamente. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $D_1$  e  $D_2$  são identificadas pelos blocos  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e  $\{e_1, e_2, e_4\}$ . Pelo Lema 3.34, se (i)  $|\hat{S}_2| = 0$  ou se (ii)  $|\hat{S}_2| = 1$  e as arestas  $e_3$  e  $e_4$  não são paralelas em  $G_2$ , então ou  $D_1$  ou  $D_2$  também é viável em  $G_2$  e nada mais temos a demonstrar. Podemos então supor que  $|\hat{S}_2| = 1$  e as arestas  $e_3$  e  $e_4$  são paralelas em  $G_2$ . Seja  $H$  uma expansão de  $G_1$  do tipo 3-5 em que as arestas  $e_3$  e  $e_4$  incidem em  $z_1$  e as demais arestas de  $C$  incidem em  $z_2$ . Pelo Corolário 3.29,  $H$  tem uma 3-orientação que é também uma 3-orientação de  $G_1$ . Seja  $D_3$  a restrição da 3-orientação de  $H$  a  $C$ . Como a 3-orientação  $C$ -orientada não é viável em  $G_1$ ,  $D_3$  é uma equipartição de  $C$ . Além disso, as arestas  $e_3$  e  $e_4$  necessariamente pertencem ao mesmo bloco de  $D_3$ . Então  $D_3$  é identificada por um bloco  $\{e_j, e_3, e_4\}$  em que  $j \in \{1, 2, 5, 6\}$ . Se  $j \in \{1, 2\}$  então podemos permutar  $e_1$  e  $e_2$ , se necessário, de forma que  $j = 1$ . Se  $j \in \{5, 6\}$ , então podemos permutar  $e_5$  e  $e_6$ , se necessário, de forma que  $j = 6$ . Assim, podemos supor que  $D_3$  é identificada por um dos dois seguintes blocos:  $\{e_1, e_3, e_4\}$  ou  $\{e_1, e_2, e_5\}$ .

Considere inicialmente o caso em que  $D_3$  é identificada por  $\{e_1, e_3, e_4\}$ . Agora vamos aplicar o Lema 3.34 a  $G_2$  trocando os papéis de  $e_2$  e  $e_3$ . Assim, se  $e_2$  e  $e_4$  não são paralelas em  $G_2$ , concluímos que ou  $D_1$ , identificada por  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , ou  $D_3$ , identificada por  $\{e_1, e_3, e_4\}$ , é viável em  $G_2$  também. Nesse caso, nada mais temos a demonstrar. Podemos então supor que  $e_2$  e  $e_4$  são paralelas em  $G_2$ . Mas então  $e_2, e_3$  e  $e_4$  são paralelas em  $G_2$  e, pelo Lema da Multiplicidade,  $G_2$  é  $\beta$ , uma contradição, pois  $|\hat{S}_2| = 1$  e  $\beta$  tem três vértices de grau três.

Finalmente, vamos agora considerar caso em que  $D_3$  é identificada por  $\{e_1, e_2, e_5\}$ . Vamos novamente aplicar o Lema 3.34 a  $G_2$ , agora com  $e_5$  no papel de  $e_4$ . Assim, se  $e_3$  e  $e_5$  não são paralelas em  $G_2$ , concluímos que ou  $D_1$ , identificada por  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , ou  $D_3$ , identificada por  $\{e_1, e_2, e_5\}$ , é viável em  $G_2$  também. Nesse caso, nada mais temos a demonstrar. Podemos então supor que  $e_3$  e  $e_5$  são paralelas em  $G_2$ , ou seja,  $e_3, e_4$  e  $e_5$  são paralelas em  $G_2$ . Novamente temos uma contradição ao Lema da Multiplicidade já que  $G_2$  não é  $\beta$ .

Deduzimos então que, em qualquer dos casos considerados, existe uma 3-orientação de  $C$  viável em ambas as  $C$ -contrações  $G_1$  e  $G_2$ . Portanto,  $G_\star$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato,  $G_\star$  é livre de 6-cortes que não são pentes.  $\square$

### 3.3.9 Análise de 7-Cortes

Vamos aqui demonstrar que todo 7-corte de  $G_*$  é um 7-pente. Para tal, vamos supor que  $C := \partial(X)$  é um 7-corte de  $G_*$  que não é um pente e vamos mostrar que há uma 3-orientação de  $C$  que é viável em ambas as  $C$ -contrações. Denotaremos por  $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$  as arestas de  $C$  em  $G$ , sendo  $e_i := xv_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 7$ . Vamos adotar o seguinte critério de escolha de  $C$ :

**Critério de Escolha:** dentre os 7-cortes de  $G_*$  que não são pentes, vamos dar preferência para um 7-corte  $C$  que não separe  $S$ , se possível.

Uma 3-orientação de um 7-corte  $C$  orienta cinco de suas arestas em um sentido e as duas restantes, denominadas *minoritárias*, no sentido contrário. Assim, o número de 3-orientações não similares de  $C$  é  $\binom{7}{2} = 21$ . Dizemos que duas arestas de  $C$  são *compatíveis* se existe uma 3-orientação de  $C$  que seja viável em  $G$  na qual estas são as duas arestas minoritárias. O *grafo de compatibilidades*  $J$  de  $G$  consiste das sete arestas de  $C$  como vértices, onde duas arestas de  $C$  são adjacentes em  $J$  se e somente se constituem um par compatível. Assim, o número de arestas de  $J$  é o número de 3-orientações não similares de  $G$ . Convém enfatizar que se duas arestas  $f$  e  $g$  de  $C$  são paralelas em  $G$  então cada aresta  $h$  de  $C - f - g$  ou é adjacente tanto a  $f$  quanto a  $g$  em  $J$ , ou não é adjacente nem a  $f$  nem a  $g$  em  $J$ . Dizemos que  $\bar{J}$ , o complemento de  $J$ , é o *grafo de incompatibilidades* de  $G$ . Ou seja, a existência de uma aresta  $fg$  em  $\bar{J}$  indica que uma 3-orientação de  $C$  em que  $f$  e  $g$  são as arestas minoritárias não é viável em  $G$ , isto é,  $f$  e  $g$  são *incompatíveis*.

A proposição a seguir apresenta duas propriedades importantes do grafo de compatibilidades  $J_\gamma$  do grafo  $\gamma$  apresentado na Figura 3.12.

#### PROPOSIÇÃO 3.36

O grafo de compatibilidades  $J_\gamma$  do grafo  $\gamma$  tem precisamente doze arestas e seu grau mínimo é três.

Demonstração: Considere o grafo  $\gamma$  com as arestas de  $C$  rotuladas conforme ilustrado na Figura 3.12(a). As possíveis 3-orientações de  $\gamma$  particionam os pares de minoritárias em três tipos. No primeiro a aresta  $e_1$  compõe o par minoritário com alguma outra aresta de  $C - e_1$ . No segundo, duas dentre as arestas  $e_2, e_3$  e  $e_4$  formam o par minoritário. No terceiro, duas dentre as arestas  $e_5, e_6$  e  $e_7$  formam o par minoritário. Assim,  $J_\gamma$ , mostrado na Figura 3.12(b), tem precisamente doze arestas e seu grau mínimo é três.  $\square$

Nas seções que seguem apresentamos propriedades da  $C$ -contração  $G$  necessárias para a conclusão da demonstração. Primeiro estudamos o tamanho do menor corte não trivial de  $G$  de acordo com a cardinalidade de  $\hat{S}_G$ . Em seguida, apresentamos algumas propriedades das expansões de  $G$ . Só então, tratamos a redução de 7-cortes a pentes, em duas etapas.

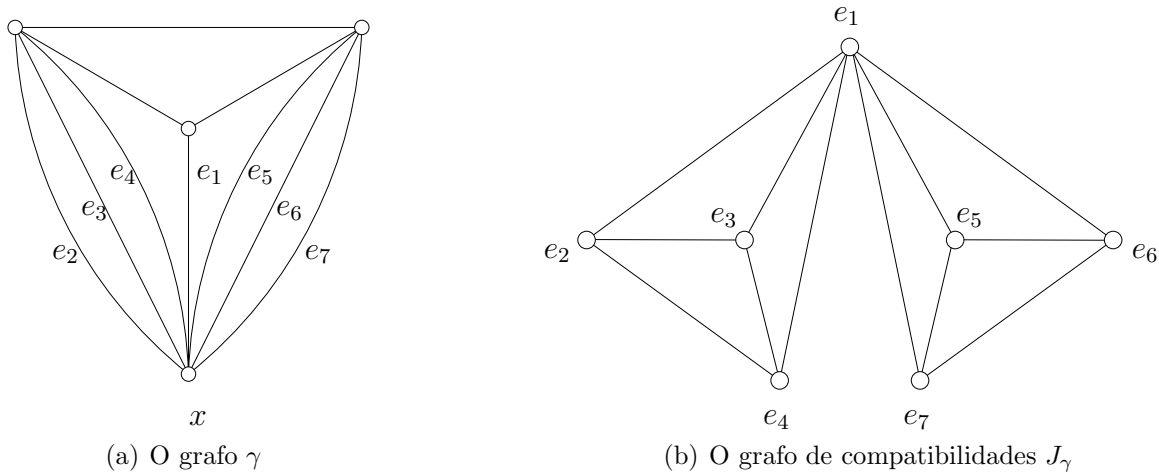


Figura 3.12: O grafo  $\gamma$  e seu grafo de compatibilidades  $J_\gamma$

Primeiro tratamos o caso mais simples em que  $C$  não separa  $S$  e depois tratamos o caso em que  $C$  separa  $S$ .

### Conexidade

#### LEMA 3.37

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$ . Se  $|\hat{S}_G| \leq 2$  então todo corte não trivial de  $G$  tem seis ou mais arestas, com uma possível exceção de um único 4-corte. Se  $|\hat{S}_G| = 1$  então todo corte não trivial de  $G$  tem seis ou mais arestas. Se  $|\hat{S}_G| = 0$  então todo corte não trivial de  $G$  tem sete ou mais arestas.

Demonstração: Seja  $D := \partial(Y)$  um corte não trivial de  $G$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  não contenha o vértice  $x$ . Então,  $D = \partial(Y; G_\star)$  e é portanto um corte não trivial de  $G_\star$ . Suponha que  $D$  tenha menos do que sete arestas. O grafo  $G_\star$  é 3-aresta-conexo e todo 3-corte de  $G_\star$  é trivial. Assim,  $D$  tem quatro, cinco ou seis arestas. Em todos esses casos,  $D$  é um pente de  $G_\star$ . Pelo Lema 3.14, o corte  $D$  é um pente de  $G$  e o conjunto  $Y$  é o cabo de  $D$  em  $G$ . Mas  $G$  tem menos do que três vértices de grau três. Logo, ou  $D$  não é um 5-corte ou  $Y$  é unitário, contradição. Assim,  $D$  é um 4-corte ou um 6-corte. Se  $D$  for um 4-corte então  $Y$  consiste dos dois vértices adjacentes, ambos de grau três, de  $G$ . Por outro lado, se  $D$  for um 6-corte então  $Y$  consiste de dois vértices, um dos quais de grau três.  $\square$

### Expansões

Nesta seção vamos estudar as expansões de  $G$ . Existem três tipos de 7-pentes, todos não triviais (Figura 3.1 na página 33). Logo, também existem três tipos de expansões de  $G$  quando  $C$  é um 7-corte. Qualquer que seja o tipo da expansão  $H$  de  $G$ , o cabo de  $C$  em  $H$  tem três vértices  $Z := \{z_1, z_2, z_3\}$ . Para descrever cada tipo de expansão, basta indicarmos as conexões entre os vértices de  $Z$  e a incidência das arestas de  $C$  nos três vértices de  $Z$ .

O primeiro tipo de expansão consiste em ligar  $z_2$  a  $z_1$  e a  $z_3$ , incidir duas arestas de  $C$  em  $z_1$ , outras duas arestas de  $C$  em  $z_3$  e as três arestas restantes de  $C$  em  $z_2$  (Figura 3.13(a)). Dizemos que uma tal expansão é do tipo 3-5-3 em alusão aos graus de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ .

O segundo tipo consiste em ligar  $z_2$  a  $z_1$  e a  $z_3$ , incidir duas arestas de  $C$  em  $z_1$ , outras quatro arestas de  $C$  em  $z_3$  e a aresta restante de  $C$  em  $z_2$  (Figura 3.13(b)). Dizemos que uma tal expansão é do tipo 3-3-5.

O terceiro tipo consiste em ligar apenas  $z_2$  a  $z_3$ , incidir três arestas de  $C$  em  $z_1$ , outras duas arestas de  $C$  em  $z_2$  e as duas arestas restantes de  $C$  em  $z_3$  (Figura 3.13(c)). Dizemos que uma tal expansão é do tipo 3-3-3.

A partir de 3-orientações de expansões conseguimos 3-orientações de  $G$  em que um conjunto restrito e bem determinado de arestas de  $C$  podem compor o par de arestas minoritárias do corte  $C$ , conforme mostrado nos lemas a seguir. Esse fato faz das expansões uma ferramenta bastante útil ao longo da demonstração.

#### LEMA 3.38

*Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  e  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-5-3. Então, em qualquer 3-orientação de  $H$ , ambas as arestas do par de minoritárias em  $C$  incidem no mesmo vértice de  $Z$ .*

Demonstração: Seja  $D$  uma 3-orientação de  $H$ . Ambos os 3-cortes  $\partial(z_1)$  e  $\partial(z_3)$  são orientados em  $D$ . Se  $D$  orienta ambos no mesmo sentido, então necessariamente as duas arestas minoritárias de  $C$  incidem em  $\partial(z_2)$ . Por outro lado, quando  $D$  orienta os 3-cortes  $\partial(z_1)$  e  $\partial(z_3)$  em sentidos opostos, ou o par de arestas de  $C \cap \partial(z_1)$  ou o par de arestas de  $C \cap \partial(z_3)$  forma o par minoritário de  $C$  em  $D$ .  $\square$

#### LEMA 3.39

*Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  e  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-3-5. Então, em qualquer 3-orientação de  $H$ , o par de minoritárias em  $C$  ou é  $C \cap \partial(z_1)$  ou contém a aresta de  $C \cap \partial(z_2)$  e alguma aresta de  $C \cap \partial(z_3)$ .*

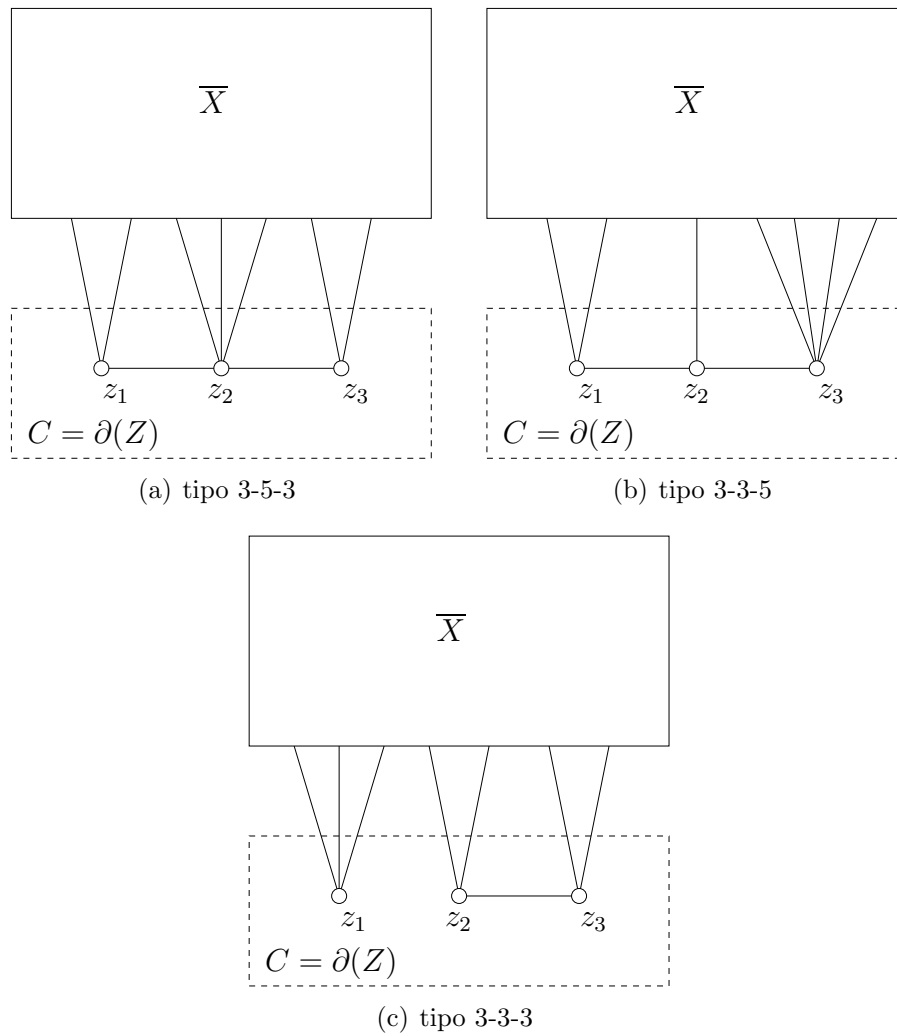


Figura 3.13: Os três tipos de expansões de  $G$  quando  $C$  é um 7-corte



Demonstração: Seja  $D$  uma 3-orientação de  $H$ . Ambos os 3-cortes  $\partial(z_1)$  e  $\partial(z_2)$  são orientados em  $D$  e, como  $z_1$  e  $z_2$  são adjacentes,  $\partial(z_1)$  e  $\partial(z_2)$  têm orientações opostas. Ou seja, o par de arestas de  $C \cap \partial(z_1)$  é orientado no mesmo sentido, sendo este oposto ao da aresta de  $C \cap \partial(z_2)$ . Assim, ou  $C \cap \partial(z_1)$  forma o par de minoritárias de  $C$  ou tal par é formado pela aresta de  $C \cap \partial(z_2)$  com alguma outra aresta de  $C \cap \partial(z_3)$ .  $\square$

LEMA 3.40

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  e  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-3-3. Então, em qualquer 3-orientação de  $H$ , o par de minoritárias de  $C$  ou é  $C \cap \partial(z_2)$  ou é  $C \cap \partial(z_3)$ .

Demonstração: Seja  $D$  uma 3-orientação de  $H$ . Todos os 3-cortes  $\partial(z_1)$ ,  $\partial(z_2)$  e  $\partial(z_3)$  são orientados em  $D$ . Como  $z_2$  e  $z_3$  são adjacentes,  $\partial(z_2)$  e  $\partial(z_3)$  têm orientações opostas em  $D$ . Então, ou  $C \cap \partial(z_2)$  ou  $C \cap \partial(z_3)$  formarão o par de minoritárias em  $C$ .  $\square$

### Caso em que o Corte $C$ não Separa $S$

Nesta seção vamos mostrar que todo 7-corte que não separa  $S$  é um pente. Vamos supor que  $C$  é um 7-corte de  $G_*$  que não separa  $S$  e não é um pente e mostrar que existe uma 3-orientação de  $C$  que é viável em ambas as  $C$ -contrações. Com esse objetivo, vamos contar o número mínimo de 3-orientações não similares de cada uma das  $C$ -contrações e só então, no Teorema 3.46, demonstramos o resultado mencionado.

LEMA 3.41

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  distinta de  $\gamma$ . Então, o grafo de compatibilidades  $J$  tem pelo menos três arestas.

Demonstração: Para demonstrar a validade desta afirmação, precisamos do Lema 3.42 demonstrado a seguir.

LEMA 3.42

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  distinta de  $\gamma$  e  $e_1 = xv_1$  e  $e_2 = xv_2$  duas arestas incidentes no vértice de contração  $x$ . Se  $e_1$  e  $e_2$  não são divisíveis em  $G$  segundo  $S_G$ , então ou são arestas paralelas ou  $G$  tem um 5-pente que contém ambas e cujo cabo contém  $v_1$  e  $v_2$ .

Demonstração: Pelo Lema da Divisão, como  $e_1$  e  $e_2$  não são divisíveis em  $G$  segundo  $S_G$ , então algum corte especial de  $G$  segundo  $S_G$  contém ambas as arestas. Seja  $D = \partial(Y)$  um tal corte. Ajuste a notação de forma que  $Y$  não contenha o vértice de contração  $x$ . O corte  $D$  tem três ou cinco arestas e o vértice de contração  $x$  tem grau sete. Então, se  $D$  for trivial,  $Y$  é a sua praia unitária e as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são paralelas. Podemos portanto supor que  $D$  não é trivial. Mas todo 3-corte de  $G$  é trivial e todo 5-corte de  $G$  é um pente. Deduzimos que  $D$  é um 5-pente não trivial que, pelo Lema 3.14, tem  $Y$  como cabo.  $\square$

Podemos agora retomar a demonstração do Lema 3.41. Seja  $\mathcal{D} := \{D_1, D_2, \dots, D_r\}$  uma coleção de 3-orientações duas a duas não similares de  $G$ . Suponhamos que  $r < 3$ . Vamos mostrar que  $G$  tem uma 3-orientação que não é similar a nenhuma das orientações em  $\mathcal{D}$ . Sabemos que  $G$  tem uma 3-orientação (Lema 3.8). Podemos portanto supor que  $r \in \{1, 2\}$ . Note que três ou mais arestas de  $C$  são majoritárias em todas as 3-orientações em  $\mathcal{D}$ . De fato, se  $r = 1$  cinco delas são majoritárias e se  $r = 2$  pelo menos três são majoritárias em ambas. Ajuste a notação de forma que as arestas  $e_1, e_2$  e  $e_3$  sejam majoritárias em todas as 3-orientações em  $\mathcal{D}$ .

Suponha que nenhum par de arestas da tripla  $\{e_1, e_2, e_3\}$  seja divisível em  $G$ . Considere um par de arestas da tripla  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , por exemplo,  $e_1$  e  $e_2$ . Pelo Lema 3.42, ou  $e_1$  e  $e_2$  são arestas paralelas ou ambas pertencem a um 5-pente cujo cabo contém  $v_1$  e  $v_2$ . Se  $e_1$  e  $e_2$  forem paralelas, então, dado que  $G$  não é  $\gamma$ , temos pelo Lema da Multiplicidade que  $v_3 \neq v_1$  e que o grau de  $v_1$  é cinco. Então,  $e_1$  e  $e_3$  não são arestas paralelas e, como não são divisíveis, temos pelo Lema 3.42 que ambas pertencem a um 5-pente cujo cabo inclui  $v_1$  e  $v_3$ . Mas isso é uma contradição pois  $v_1$  tem grau cinco. Podemos então supor que  $e_1$  e  $e_2$  não são paralelas. Portanto, novamente pelo Lema 3.42, ambas pertencem a um 5-pente cujo cabo contém  $v_1$  e  $v_2$ . Esse raciocínio vale para qualquer par da tripla  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Deduzimos então que o conjunto  $Y := \{v_1, v_2, v_3\}$  constitui o cabo de um 5-pente de  $G$  que contém as arestas  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . O subgrafo  $G[Y]$  de  $G$  gerado por  $Y$  é um caminho de comprimento dois. Assim, em  $G_\star$ , o corte  $\partial(X \cup Y)$  é um 6-corte de  $G_\star$  que deixa todos os três vértices de  $S$  em uma mesma praia (Figura 3.14). Logo,  $\partial(X \cup Y)$ , não é um pente, uma contradição pois todo 6-corte de  $G_\star$  é pente.

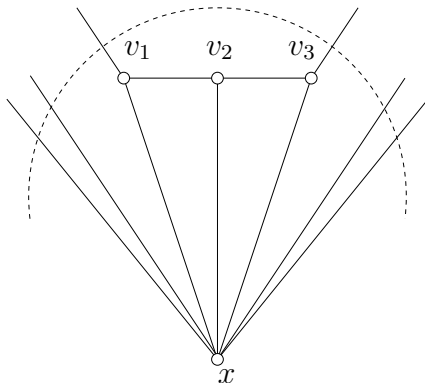


Figura 3.14: Ilustração da demonstração do Lema 3.41

Podemos então supor que algum par de arestas  $f$  e  $g$  da tripla  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é divisível em  $G$  segundo  $S_G$ . Seja  $H$  o grafo obtido pela divisão de  $x$  em  $f$  e  $g$ . O tamanho de  $H$

é menor que o de  $G$ , o qual, por sua vez, é menor que o de  $G_*$ , portanto,  $H$  tem uma 3-orientação. Assim, pelo Lema 3.10,  $G$  tem uma 3-orientação  $D$  em que as arestas  $f$  e  $g$  têm orientações opostas. Logo,  $D$  não é similar a nenhuma das 3-orientações em  $\mathcal{D}$ . Concluímos que  $G$  tem pelo menos 3-orientações não similares, isto é,  $J$  tem pelo menos três arestas.  $\square$

**LEMA 3.43**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  tal que  $|\hat{S}_G| = 0$ . Então, o grafo de incompatibilidades  $\overline{J}$  tem no máximo duas arestas.

Demonstração: Para demonstrar a validade desta afirmação, precisamos dos Lemas 3.44 e 3.45 demonstrados a seguir.

**LEMA 3.44**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  tal que  $|\hat{S}_G| = 0$ . Então, as arestas do grafo de incompatibilidades  $\overline{J}$  são duas a duas adjacentes.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o grafo de incompatibilidades  $\overline{J}$  tenha um par de arestas não adjacentes, digamos  $e_1e_2$  e  $e_3e_4$ . Considere uma expansão  $H$  de  $G$  do tipo 3-3-3 em que as arestas  $e_1$  e  $e_2$  incidem em  $z_2$  e as arestas  $e_3$  e  $e_4$  incidem em  $z_3$ . Vamos mostrar que o grafo  $H$  satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores, com  $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$  no papel de  $S$ . Vamos inicialmente mostrar que  $H$  é conexo. Pelo Lema 3.37, o grafo  $G$  é 5-aresta-conexo. Se  $H$  não for conexo, então  $x$  é um vértice de corte de  $G$  e, portanto,  $\partial(x)$  inclui um corte de  $G$  com três ou menos arestas, uma contradição. De fato,  $H$  é conexo. Agora vamos mostrar que  $H$  é livre de 1-cortes e todos os seus 3-cortes separam  $Z$ . Todo corte de  $H$  com quatro ou menos arestas separa  $Z$  pois  $G$  é 5-aresta-conexo (Lema 3.37). Em particular, todo 3-corte de  $H$  separa  $Z$ . Suponha, por absurdo, que  $H$  tenha um 1-corte,  $D_H := \partial(Y)$ . Então  $D_H$  separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  contenha precisamente um vértice de  $Z$ , digamos  $z_i$ . Seja  $D_G = \partial(Y - z_i) = D_H \Delta \partial(z_i)$ . Então,  $D_G$  é um corte de  $G$  e tem portanto cinco ou mais arestas. Todavia, se  $i = 1$  então  $D_G$  tem duas ou quatro arestas, ao passo que se  $i = 2$  ou  $i = 3$  então  $D_G$  tem duas arestas. Temos assim uma contradição. De fato,  $H$  e  $Z$  satisfazem a hipótese da Conjetura.

Além disso, pelo Corolário 3.16, o tamanho de  $H$  é menor que o de  $G_*$ . Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação. Pelo Lema 3.40, o par minoritário do corte  $C$  é dado ou por  $e_1$  e  $e_2$  ou por  $e_3$  e  $e_4$ . Assim, pelo menos uma das arestas  $e_1e_2$  e  $e_3e_4$  pertence a  $J$  e não a  $\overline{J}$ , uma contradição. De fato, todas as arestas de  $\overline{J}$  são duas a duas adjacentes.  $\square$

## LEMA 3.45

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  tal que  $|\hat{S}_G| = 0$ . Sejam  $e_1, e_2$  e  $e_3$  vértices do grafo de compatibilidades  $J$ . Se as arestas  $e_2$  e  $e_3$  não são paralelas em  $G$ , então  $e_1$  é adjacente em  $J$  a pelo menos um de  $\{e_2, e_3\}$ .

Demonstração: Seja  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-5-3 em que as arestas  $e_1, e_2$  e  $e_3$  são incidentes em  $z_2$ . Vamos mostrar que o grafo  $H$ , juntamente com  $Z$ , satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. A contração das arestas  $z_1z_2$  e  $z_2z_3$  de  $H$  leva ao grafo  $G$ , um grafo conexo. Logo,  $H$  também é conexo. Vamos mostrar que  $H$  é livre de 1-cortes e todos os seus 3-cortes separam  $Z$ . Todo corte de  $H$  com quatro ou menos arestas separa  $Z$  pois  $G$  é 5-aresta-conexo (Lema 3.37). Em particular, todo 3-corte de  $H$  separa  $Z$ . Suponha, por absurdo, que  $H$  tenha um 1-corte,  $D_H := \partial(Y)$ . Então,  $D_H$  separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  contenha apenas um vértice de  $Z$ , digamos  $z_i$ . Então,  $i = 1$  ou  $i = 3$ , caso contrário  $D_H$  contém duas ou mais arestas. Seja  $D_G := \partial(Y - z_i) = D_H \Delta \partial(z_i)$ . Então  $D_G$  é um corte em  $G$ . Mas  $D_G$  é na verdade um 2-corte, uma contradição. De fato,  $H$  e  $Z$  satisfazem a hipótese da Conjetura.

Vamos agora supor que  $e_2$  e  $e_3$  não são arestas paralelas e mostrar que são divisíveis em  $H$  segundo  $Z$ . Suponha por absurdo que algum corte especial  $D'_H = \partial(Y')$  de  $H$  segundo  $Z$  contenha ambas as arestas. Ajuste a notação de forma que  $Y'$  tenha no máximo um vértice de  $Z$ . Se  $D'_H$  for um 5-corte de  $H$  que não separa  $Z$ , então é também um corte de  $G$ . Pelo Lema 3.37,  $D'_H$  é trivial e sua praia unitária é  $Y'$ . Neste caso,  $e_2$  e  $e_3$  são paralelas, uma contradição. Podemos então supor que  $D'_H$  é um 3-corte. Como  $G$  é 5-aresta-conexo, então  $D'_H$  separa  $Z$ . Seja  $z_j$  o único vértice de  $Z$  em  $Y'$  e  $D'_G := \partial(Y' - z_j)$ . Certamente  $j \neq 2$ , pois  $D'_H$  tem apenas três arestas e duas delas são as arestas  $e_2$  e  $e_3$ . Assim,  $D'_G$  é um 2-corte de  $G$ , uma contradição. De fato,  $e_2$  e  $e_3$  são divisíveis em  $H$ .

Seja  $H'$  o grafo obtido a partir de  $H$  pela divisão de  $z_2$  em  $e_2$  e  $e_3$ . O tamanho de  $H'$  é menor que o de  $H$ , o qual, por sua vez, é menor que o de  $G_*$ , pelo Corolário 3.16. Como  $H'$  e  $Z$  satisfazem a hipótese da Conjetura, temos que  $H'$  tem uma 3-orientação. Pelo Lema 3.10,  $H$  tem uma 3-orientação  $D$  em que  $e_2$  e  $e_3$  são orientadas em sentidos opostos. Portanto, exatamente uma delas pertence ao par de arestas minoritárias de  $C$  em  $D$ . Pelo Lema 3.38, a outra aresta do par minoritário é  $e_1$ . Portanto,  $e_1$  é realmente adjacente a pelo menos um de  $\{e_2, e_3\}$  em  $J$ .  $\square$

Podemos agora retomar a demonstração do Lema 3.43. Suponha, por absurdo, que  $\bar{J}$  tenha pelo menos três arestas. Pelo Lema 3.44, todas as arestas de  $\bar{J}$  são adjacentes duas a duas. Então, ou  $\bar{J}$  tem um triângulo, ou tem uma estrela de três pontas. Considere primeiro o caso em que  $\bar{J}$  tem um triângulo. Ajuste a notação de forma que  $e_1e_2, e_1e_3$  e  $e_2e_3$  sejam as arestas do triângulo. Então, pelo Lema 3.45, as três arestas  $e_1, e_2$  e  $e_3$  do corte  $C$  são paralelas em  $G$ , uma contradição ao Lema da Multiplicidade pois  $G$  não

é  $\gamma$ . Podemos então supor que  $\overline{J}$  tem uma estrela de três pontas. Ajuste a notação de forma que  $e_1e_2$ ,  $e_1e_3$  e  $e_1e_4$  sejam as arestas da estrela. Então, pelo Lema 3.45, as três arestas  $e_2$ ,  $e_3$  e  $e_4$  do corte  $C$  são paralelas em  $G$ , novamente uma contradição ao Lema da Multiplicidade. De fato,  $\overline{J}$  tem no máximo duas arestas.  $\square$

#### TEOREMA 3.46

*Todo 7-corte  $C$  de  $G_\star$  que não separa  $S$  é um pente.*

Demonstração: Seja  $C$  um 7-corte de  $G_\star$  que não separa  $S$  e  $G_1$  e  $G_2$  as  $C$ -contrações de  $G_\star$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $S_i$  a contração de  $S$ , e  $J_i$  o grafo de compatibilidades de  $G_i$ . Ajuste a notação de forma que  $|S_1| \geq |S_2|$ . Como o corte  $C$  não separa  $S$ , então certamente  $\hat{S}_i = S_i$  para  $i = 1, 2$ . Assim,  $|S_2| = 0$  e  $|S_1| = |S| \leq 3$ . Pelo Lema 3.41,  $J_1$  tem pelo menos três arestas. Pelo Lema 3.43,  $\overline{J}_2$  tem no máximo duas arestas. Assim, existe uma mesma 3-orientação de  $C$  viável em ambas as  $C$ -contrações  $G_1$  e  $G_2$ . Portanto,  $G_\star$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato,  $G_\star$  é livre de 7-cortes que não são pentes e não separam  $S$ .  $\square$

#### Caso em que o Corte $C$ Separa $S$

Nesta seção vamos mostrar que todo 7-corte que separa  $S$  é um pente e assim concluir a demonstração de que todo 7-corte é um pente. Vamos supor que  $C$  é um 7-corte de  $G_\star$  que separa  $S$  e não é um pente e mostrar que existe uma 3-orientação de  $C$  que é viável em ambas as  $C$ -contrações. Para alcançar nosso objetivo vamos contar o número mínimo de 3-orientações não similares de cada uma das  $C$ -contrações, assim como fizemos na redução de 7-cortes que não separam  $S$  a pentes. Essa contagem é feita no Lema da Contagem (Lema 3.51). O importante Lema da Contagem é de demonstração bastante longa e depende de diversos outros lemas cujas demonstrações são também um tanto elaboradas. Quatro desses lemas, incluindo o muito utilizado Lema da Quádrupla, são demonstrados antes de enunciarmos o Lema da Contagem. Outros três lemas, ainda mais técnicos, são enunciados e demonstrados dentro da demonstração do Lema da Contagem. Só então no Teorema 3.55, demonstramos o resultado enunciado.

#### LEMA 3.47

*Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  tal que  $1 \leq |\hat{S}_G| \leq 2$  e  $e_1$  e  $e_2$  duas arestas paralelas de  $C$  em  $G$ . Então existe uma aresta  $f$  distinta de  $e_1$  e  $e_2$  e adjacente a ambas  $e_1$  e  $e_2$  no grafo de compatibilidades  $J$ .*

Demonstração: Seja  $H$  o grafo obtido a partir de  $G$  pela divisão do vértice de contração  $x$  em  $e_1$  e  $e_2$ . Seja  $S_H := \hat{S}_G \cup \{v_1\}$ . Então,  $2 \leq |S_H| \leq 3$ . Vamos mostrar que  $H$  e

$S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Suponha o contrário. Então, pelo Lema da Divisão,  $G$  tem um corte especial segundo  $S_H$ , digamos  $D_H := \partial(Y)$ , que contém as arestas  $e_1$  e  $e_2$ . Pelo Lema 3.37,  $D_H$  é trivial. Ajuste a notação de forma que  $Y$  não contenha o vértice de contração  $x$ . Então  $Y$  é a praia unitária de  $D_H$ , pelo Lema 3.14. Pelo Lema da Multiplicidade,  $D = \partial(v_1)$  é um 5-corte. Mas, como  $S_H$  contém  $v_1$  e  $\hat{S}_G$  é não vazio, o 5-corte  $D_H$  separa  $S_H$ , uma contradição. Portanto,  $H$  e  $S_H$  de fato satisfazem a hipótese da Conjetura. Então,  $H$  tem uma 3-orientação  $D$  em que  $e_1$  e  $e_2$  são orientadas em sentidos opostos. Portanto, uma destas, digamos  $e_1$ , juntamente com alguma outra aresta  $f$  de  $C$ , forma o par minoritário de  $C$  em  $D$ . Mas podemos reverter a orientação de  $e_1$  e de  $e_2$  e assim obter uma outra 3-orientação  $D'$  de  $H$  em que  $f$  e  $e_2$  formam o par minoritário de  $C$ . Então, de fato, existe um vértice  $f$  de  $J$  adjacente a ambas  $e_1$  e  $e_2$ .  $\square$

### LEMA 3.48

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  distinta de  $\gamma$  tal que  $|\hat{S}_G| = 1$ . Se  $\bar{J}$  tem uma estrela de quatro pontas com centro  $e_1$  e pontas  $e_4, e_5, e_6, e_7$ , então  $J$  contém a aresta  $e_2e_3$ .

Demonstração: Seja  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-3-5 em que as arestas  $e_2$  e  $e_3$  são incidentes em  $z_1$ , a aresta  $e_1$  é incidente em  $z_2$  e as arestas  $e_4, e_5, e_6$  e  $e_7$  são incidentes em  $z_3$ , conforme ilustrado na Figura 3.15. Seja  $S_H := \hat{S}_G \cup \{z_1, z_2\}$ .

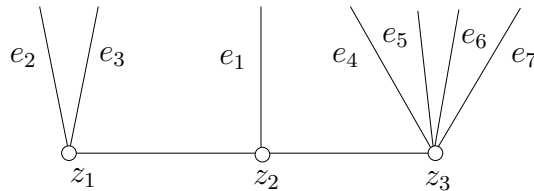


Figura 3.15: Arestas  $e_2$  e  $e_3$  incidentes em  $z_1$ ,  $e_1$  em  $z_2$  e as demais em  $z_3$

Vamos mostrar que o grafo  $H$ , juntamente com  $S_H$ , satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. A contração das arestas  $z_1z_2$  e  $z_2z_3$  de  $H$  leva ao grafo  $G$ , um grafo conexo. Logo,  $H$  também é conexo. Vamos mostrar que  $H$  é livre de 1-cortes e todos os seus 3-cortes separam  $S_H$ . Suponha, por absurdo, que  $H$  tenha um corte  $D_H := \partial(Y)$  que ou é um 1-corte ou é um 3-corte que não separa  $S_H$ . O grafo  $G$  é 3-aresta-conexo e tem um único 3-corte, trivial, cuja praia unitária contém o único vértice de  $\hat{S}_G$ . Assim,  $D_H$  não é um corte de  $G$ . Nessas condições,  $D_H$  separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $D_H$  contenha precisamente um vértice de  $Z$ , digamos,  $z_i$ . Seja  $D_G := \partial(Y - z_i) = D_H \Delta \partial(z_i)$ .

Vamos considerar inicialmente o caso em que  $i = 1$ . Nesse caso,  $D_H$  separa  $S_H$  e contém a aresta  $z_1z_2$ ; portanto,  $D_H$  é um 1-corte. Então  $D_G = \{e_2, e_3\}$ , uma contradição, pois  $G$  é 3-aresta-conexo. Vamos considerar agora o caso em que  $i = 2$ . Nesse caso,  $D_H$  separa  $S_H$  e não é um 1-corte pois contém as arestas  $z_1z_2$  e  $z_2z_3$ . Podemos então supor que  $i = 3$ . Nesse caso,  $D_G$  é um corte de  $G$  com um número par de arestas, e com não mais do que seis arestas. Mas  $G$  não tem nenhum 2-corte e nem 4-corte. Portanto,  $D_G$  é um 6-corte de  $G$ . Deduzimos que  $z_2z_3$  é a única aresta em comum entre  $D_H$  e  $\partial(z_3)$ . Portanto,  $D_G$  contém as quatro arestas de  $C$  incidentes em  $z_3$ . O corte  $D_G$  é um pente e, pelo Lema 3.14, seu cabo é  $Y - z_3$ . Por hipótese,  $|\hat{S}_G| = 1$ . Assim, um dos dois vértices de  $Y - z_3$ ,  $u_3$ , é o vértice de  $\hat{S}_G$ , de grau três, e o outro,  $u_5$ , tem grau cinco. Pelo Lema da Multiplicidade, precisamente uma aresta de  $C \cap \partial(z_3)$  incide em  $u_3$ , logo as três arestas restantes incidem em  $u_5$ . Novamente pelo Lema da Multiplicidade, o grafo  $G$  é  $\gamma$ , uma contradição à hipótese. De fato,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura.

Pelo Corolário 3.16, o tamanho de  $H$  é menor que o de  $G_*$ . Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação  $D$ . Pelo Lema 3.39, como  $e_1$  não é compatível com nenhuma das arestas de  $C$  incidentes em  $z_3$ , o par de arestas minoritárias de  $C$  em  $D$  é dado por  $e_2$  e  $e_3$ . De fato,  $J$  contém a aresta  $e_2e_3$ .  $\square$

#### LEMA 3.49

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  distinta de  $\gamma$  tal que  $|\hat{S}_G| = 1$ . Seja

$$P := \{\{e_1, e_5\}, \{e_6, e_7\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}$$

uma partição das arestas de  $C$ . Então,  $J$  tem uma aresta com ambos os extremos em um mesmo conjunto de  $P$ .

Demonstração: Seja  $H$  uma expansão de  $G$  do tipo 3-5-3 em que as arestas  $e_1$  e  $e_5$  são incidentes em  $z_1$ , as arestas  $e_2, e_3$  e  $e_4$  são incidentes em  $z_2$  e as arestas  $e_6$  e  $e_7$  são incidentes em  $z_3$ . Seja  $S_H := \hat{S}_G \cup \{z_1, z_3\}$ .

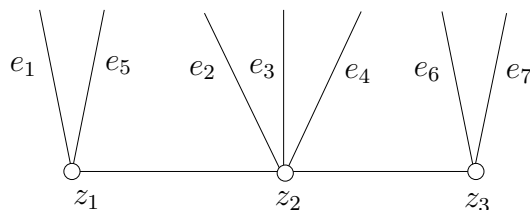


Figura 3.16: Arestas  $e_1$  e  $e_5$  incidentes em  $z_1$ ,  $e_2, e_3$  e  $e_4$  em  $z_2$  e  $e_6$  e  $e_7$  em  $z_3$

Vamos mostrar que o grafo  $H$ , juntamente com  $S_H$ , satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. A contração das arestas  $z_1z_2$  e  $z_2z_3$  de  $H$  leva ao grafo  $G$ , um grafo conexo. Logo,  $H$  também é conexo. Vamos mostrar que  $H$  é livre de 1-cortes e todos os seus 3-cortes separam  $S_H$ . Suponha, por absurdo, que  $H$  tenha um corte  $D_H := \partial(Y)$  que ou é um 1-corte ou é um 3-corte que não separa  $S_H$ . O grafo  $G$  é 3-aresta-conexo e tem um único 3-corte, trivial, cuja praia unitária contém o único vértice de  $\hat{S}_G$ . Assim,  $D_H$  não é um corte de  $G$ . Nessas condições,  $D_H$  separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $D_H$  contenha precisamente um vértice de  $Z$ , digamos,  $z_i$ . Seja  $D_G := \partial(Y - z_i) = D_H \Delta \partial(z_i)$ .

Se  $i = 1$  ou  $i = 3$ , então  $D_H$  separa  $S_H$  e contém a aresta  $z_1z_2$ . Logo,  $D_H$  é um 1-corte e  $D_G = C \cap \partial(z_i)$  é um 2-corte, uma contradição, pois  $G$  é 3-aresta-conexo. Podemos então supor que  $i = 2$ . Nesse caso,  $D_H$  contém as arestas  $z_1z_2$  e  $z_2z_3$ , portanto é um 3-corte. Então,  $D_G$  é um corte de  $G$  com duas ou quatro arestas, uma contradição pois  $G$  é 3-aresta-conexo e livre de 4-cortes (Lema 3.37). De fato,  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura.

Pelo Corolário 3.16, o tamanho de  $H$  é menor que o de  $G_*$ . Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação  $D$ . Pelo Lema 3.38, o par de arestas minoritárias de  $C$  em  $D$  incide em um mesmo vértice de  $Z$ . De fato,  $\bar{J}$  tem uma aresta com ambos os extremos em um mesmo conjunto de  $P$ .  $\square$

#### LEMA 3.50 (LEMA DA QUÁDRUPLA)

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_*$  distinta de  $\gamma$  tal que  $1 \leq |\hat{S}_G| \leq 2$ . Seja  $Q := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma quádrupla de vértices de  $J$  e  $m$  o número de pares de arestas paralelas de  $Q$  em  $G$ . Então, o subgrafo  $J[Q]$  do grafo de compatibilidades  $J$  gerado por  $Q$  contém pelo menos uma aresta. Além disso, se  $J[Q]$  não contém um par de arestas adjacentes, então ou (i)  $m = 2$  ou (ii)  $m = 1$  e  $|\hat{S}_G| = 2$ .

Demonstração: Seja  $H$  o grafo obtido a partir de  $G$  pela substituição do vértice de contração  $x$  por um conjunto  $Z$  de dois vértices,  $z_1$  e  $z_2$ , não adjacentes, em que  $z_1$  tem grau três e nele incidem as três arestas de  $C - Q$ , e  $z_2$  tem grau quatro e nele incidem as quatro arestas de  $Q$ , conforme ilustrado na Figura 3.17. Se  $H$  tem uma 3-orientação, então esta orienta um par das arestas incidentes em  $z_2$  no mesmo sentido e o par restante no sentido contrário. Nesse caso, necessariamente um desses dois pares será o par de arestas minoritárias de  $C$ . Assim, para garantir que  $J[Q]$  tenha pelo menos uma aresta, basta mostrarmos que  $H$  tem uma 3-orientação.

Seja  $S_H := \hat{S}_G \cup \{z_1\}$ . Claramente,  $|S_H| \leq 3$ . Vamos mostrar que  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. Vamos inicialmente mostrar que  $x$  não é um vértice de corte em  $G$ . Suponha o contrário. Então,  $\partial(x)$  inclui um corte de  $G$  com três ou menos arestas. Mas  $G$  é 3-aresta-conexo. Portanto,  $\partial(x)$  inclui um 3-corte. Como todo 3-corte de  $G$  é trivial, as três arestas desse 3-corte são paralelas, uma contradição



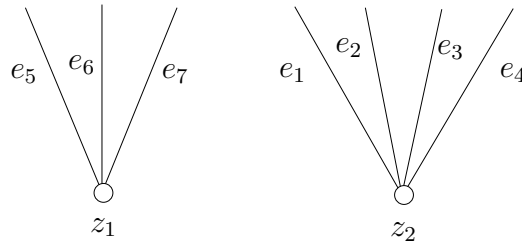


Figura 3.17: Arestas de  $C - Q$  incidem em  $z_1$  e arestas de  $Q$  em  $z_2$

uma vez que  $G$  não é  $\gamma$ . Então  $H$  é conexo, caso contrário  $x$  seria um vértice de corte em  $G$ . Agora vamos mostrar que  $H$  é livre de 1-cortes e todos os seus 3-cortes separam  $S_H$ . Suponha, por absurdo, que  $H$  tenha um corte  $D_H := \partial(Y)$  que ou é um 1-corte ou é um 3-corte que não separa  $S_H$ . Todo corte de  $H$  que não separa  $Z$  é também um corte de  $G$  e tem pelo menos três arestas, com igualdade somente se separa  $S_H$ . Então  $D_H$  separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $z_2$  pertença a  $Y$ . Seja  $D_G = \partial(Y - z_2) = D_H \Delta \partial(z_2)$ . Então,  $D_G$  é um corte de  $G$ . Seja  $\nu$  o número de arestas de  $z_2$  pertencentes a  $D_H$ . Temos então que

$$|D_G| = |D_H| + 4 - 2\nu.$$

Considere primeiro o caso em que  $D_H$  é um 1-corte. Neste caso,  $D_G$  é um 3-corte de  $G$  se  $\nu = 1$  ou um 5-corte de  $G$  se  $\nu = 0$ . Em qualquer dos casos, pelo Lema 3.37,  $D_G$  é um corte trivial de  $G$  e  $Y - z_2$  é a sua praia unitária (pelo Lema 3.14). As  $4 - \nu$  arestas de  $\partial(z_2) \cap D_G$  são todas paralelas, uma contradição ao Lema da Multiplicidade, uma vez que  $G$  não é  $\gamma$ . Podemos então supor que  $D_H$  é um 3-corte que não separa  $S_H$ . Neste caso, como  $G$  é 3-aresta-conexo, certamente  $\nu \leq 2$ . Considere primeiro o caso em que  $\nu = 2$ . Nesse caso,  $D_G$  é um 3-corte trivial de  $G$  e as duas arestas de  $\partial(z_2) \cap D_G$  são paralelas e incidentes em um vértice de grau três, uma contradição ao Lema da Multiplicidade. Considere agora o caso em que  $\nu = 1$ . Nesse caso,  $D_G$  é um 5-corte trivial de  $G$  e as três arestas de  $\partial(z_2) \cap D_G$  são paralelas, novamente uma contradição ao Lema da Multiplicidade pois  $G$  não é  $\gamma$ . Podemos então supor que  $\nu = 0$  e  $D_G$  é um 7-corte de  $G$ . Além disso, dado que  $z_1 \in S_H$  e  $D_H$  não separa  $S_H$ , temos que  $Y \cap S_H = \emptyset$  e portanto a praia  $Y - z_2$  de  $D_G$  também não contém vértices de  $S_H$ . Mas  $Y - z_2$  é também uma praia de  $D_G$  em  $G_*$ . Portanto,  $D_G$  não separa  $S$  em  $G_*$ . Pelo Teorema 3.46,  $D_G$  é um 7-pente e seu cabo é  $Y - z_2$  (pelo Lema 3.14). Então,  $\hat{S}_G$  tem precisamente dois vértices, ambos os quais pertencem a  $Y$ , uma contradição. Deduzimos assim que  $H$  e  $S_H$  realmente satisfazem a hipótese da Conjetura. Claramente,  $\text{tam}(H) = \text{tam}(G) + 1$ . Assim, pelo Lema 3.15, o tamanho de  $H$  é menor que o de  $G_*$ . Portanto,  $H$  tem uma 3-orientação e  $J[Q]$  tem pelo

menos uma aresta. Vamos agora mostrar a segunda parte da afirmação. Assim, vamos supor que  $J[Q]$  não contém um par de arestas adjacentes e mostrar que ou (i)  $m = 2$  ou (ii)  $m = 1$  e  $|\hat{S}_G| = 2$ .

Dado que  $G$  não é  $\gamma$ , temos que  $m \leq 2$ . Se  $m = 2$ , nada temos a provar. Podemos então supor que  $m \leq 1$ . Seja  $D_1$  uma 3-orientação de  $H$ . Ajuste a notação de forma que  $e_1$  e  $e_2$  formem o par de arestas minoritárias de  $C$  em  $D_1$ . No máximo um dentre os pares  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{e_3, e_4\}$  é de arestas paralelas em  $G$ . Definimos então o conjunto de vértices  $T$  da seguinte forma:

$$T := \begin{cases} S_H \cup \{v_1\}, & \text{se } e_1 \text{ e } e_2 \text{ forem paralelas,} \\ S_H \cup \{v_3\}, & \text{se } e_3 \text{ e } e_4 \text{ forem paralelas,} \\ S_H, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $H'$  o grafo obtido a partir de  $H$  pela divisão de  $z_2$  em  $e_1$  e  $e_2$ . Suponhamos que  $H'$  e  $T$  satisfaçam a hipótese da Conjetura dos 3-Cortes Separadores. O tamanho de  $H'$  é menor que o de  $H$ , o qual é menor que o tamanho de  $G_*$ . Então,  $H'$  tem uma 3-orientação. Pelo Lema 3.10,  $H$  tem uma 3-orientação  $D_2$ , distinta de  $D_1$ , em que  $e_1$  e  $e_2$  são orientadas em sentidos opostos. Ou seja, precisamente uma das arestas  $\{e_1, e_2\}$  pertence ao par de minoritárias de  $C$  em  $D_2$  e  $J[Q]$  tem um par de arestas adjacentes nesse caso. Portanto, para concluir a demonstração do lema basta mostrarmos que se  $H'$  e  $T$  não satisfazem a hipótese da Conjetura, então  $m = 1$  e  $|\hat{S}_G| = 2$ .

Suponha que  $H'$  e  $T$  não satisfaçam a hipótese da Conjetura. Sabemos que  $H$  e  $S_H$  satisfazem a hipótese da Conjetura. Logo, a menos que  $|T| > 3$ ,  $H$  e  $T$  também satisfazem a hipótese da Conjetura. Mas se  $|T| > 3$ , então um dos pares  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{e_3, e_4\}$  é de arestas paralelas e  $|S_H| = 3$ , ou seja,  $m = 1$  e  $|\hat{S}_G| = 2$ . Nesse caso, temos uma contradição à hipótese do Lema. Podemos então supor que  $|T| \leq 3$  e, portanto,  $H$  e  $T$  satisfazem a hipótese da Conjetura. Assim, como  $H'$  e  $T$  não satisfazem a hipótese da Conjetura, temos, pelo Lema da Divisão, que  $H$  tem um corte especial segundo  $T$  que contém ambas as arestas  $e_1$  e  $e_2$ . Seja  $D_H := \partial(Y)$  um tal corte de  $H$ . Considere primeiro o caso em que  $D_H$  é um corte de  $G$ , isto é,  $D_H$  não separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  não inclua  $Z$ . O corte  $D_H$  tem três ou cinco arestas, então, pelo Lema 3.37,  $D_H$  é trivial e sua praia unitária é  $Y$ . Como  $D_H$  inclui as arestas  $e_1$  e  $e_2$ , então estas são paralelas. Se  $D_H$  é um 3-corte, temos uma contradição ao Lema da Multiplicidade. Deduzimos então que  $D_H$  é um 5-corte. Como  $e_1$  e  $e_2$  são paralelas, então o vértice de  $Y$  pertence a  $T$ . Então, como  $z_1 \in \bar{Y}$ ,  $D_H$  separa  $T$ , uma contradição. Concluimos que  $G$  não tem um corte especial segundo  $T$  que contenha as arestas  $e_1$  e  $e_2$ . Pelo mesmo raciocínio,  $G$  também não tem um corte especial segundo  $T$  que contenha as arestas  $e_3$  e  $e_4$ . Podemos então supor que  $D_H$  separa  $Z$ . Ajuste a notação de forma que  $Y$  contenha  $z_2$ . Seja  $D_G = \partial(Y - z_2) = D_H \Delta \partial(z_2)$ . Então,  $D_G$  é um corte de  $G$ . Seja  $\nu$  o número de

arestas de  $z_2$  pretencentes a  $D_H$ . Temos então que

$$|D_G| = |D_H| + 4 - 2\nu,$$

sendo que  $2 \leq \nu \leq 4$ . Como  $G$  é 3-aresta-conexo, deduzimos que  $\nu \leq 3$ , com igualdade somente se  $D_H$  é um 5-corte. Como  $D_H$  é um corte especial segundo  $T$  e  $z_1 \in \overline{Y}$  pertence a  $T$ , então ou  $D_H$  é um 3-corte ou  $Y$  não contém vértices de  $T$ . Assim, se  $\nu = 2$ , como  $|D_H| = |D_G|$ , temos que  $D_G$  é um corte de  $G$  que é especial segundo  $T$  e contém as arestas  $e_3$  e  $e_4$ , uma contradição. Concluimos então que  $\nu = 3$  e, portanto,  $D_H$  é um 5-corte. Logo,  $D_G$  é um 3-corte. Então  $D_G$  é trivial e  $Y - z_2$  é unitário. Mas tanto o vértice de  $Y - z_2$  quanto  $z_1 \in \overline{Y}$  pertencem a  $T$ , portanto  $D_G$ , e também  $D_H$  separam  $T$ , uma contradição. Deduzimos finalmente que  $H$  não possui um corte especial segundo  $T$  que contenha  $e_1$  e  $e_2$ . Assim, vale a afirmação enunciada.  $\square$

**LEMA 3.51 (LEMA DA CONTAGEM)**

Seja  $G$  uma  $C$ -contração de  $G_\star$  distinta de  $\gamma$  tal que  $1 \leq |\hat{S}_G| \leq 2$  e sejam  $\delta$  e  $\Delta$  os graus mínimo e máximo dos vértices do grafo de compatibilidades  $J$ . Então as seguintes propriedades valem:

- (i) se  $|\hat{S}_G| = 1$  então  $|E(J)| \geq 12$ , com igualdade somente se  $\delta = 3$ ,
- (ii) se  $|\hat{S}_G| = 2$  então  $|E(J)| \geq 9$ , com igualdade somente se  $\Delta \geq 4$ .

Demonstração: Se  $G = \gamma$ , então  $|\hat{S}_G| = 1$  e, pela Proposição 3.36,  $J$  tem precisamente doze arestas e grau mínimo  $\delta = 3$ . Podemos então supor que  $G \neq \gamma$ . Se  $\delta \geq 4$  então  $|E(J)| \geq 7\delta/2 \geq 14$ . Portanto, podemos supor que  $\delta \leq 3$ . Além disso, se  $\delta = 3$ , então  $|E(J)| \geq 7\delta/2 \geq 11$  e (ii) vale nesse caso. Podemos então supor que

$$\delta \leq 3, \text{ com igualdade somente se } |\hat{S}_G| = 1. \quad (3.6)$$

Seja  $e_1$  um vértice de  $J$  de grau  $\delta$  e  $N(e_1) := e_2, e_3, \dots, e_{\delta+1}$  os vértices adjacentes a  $e_1$  em  $J$ . Seja  $B$  o conjunto de vértices de  $J$  que não pertencem a  $\{e_1\} \cup N(e_1)$  nem representam arestas paralelas de  $e_1$  em  $G$ .

**LEMA 3.52**

Se  $f$  é uma aresta de  $N(e_1)$  que não é múltipla com  $e_1$  em  $G$  então  $f$  é adjacente a pelo menos  $|B| - 2$  vértices de  $B$  em  $J$ , com igualdade somente se  $|\hat{S}_G| = 2$  e os dois vértices de  $B$  não adjacentes a  $f$  correspondem a arestas paralelas em  $G$ .

Demonstração: Sejam  $b_1$  e  $b_2$  dois vértices em  $B$  que não são adjacentes a  $f$  em  $J$ . Seja  $Q := \{e_1, f, b_1, b_2\}$ . Por definição de  $B$ ,  $e_1$  também não é adjacente nem a  $b_1$  nem a  $b_2$ .

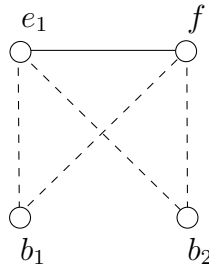


Figura 3.18: Ilustração da demonstração do Lema 3.52

A Figura 3.18 ilustra  $J[Q]$ , representando por arestas tracejadas as arestas de  $\bar{J}$ . Assim,  $J[Q]$  não tem um par de arestas adjacentes. Pelo Lema da Quádrupla, existe pelo menos um par de arestas de  $Q$  que são paralelas em  $G$ , com igualdade somente se  $|\hat{S}_G| = 2$ . Por hipótese,  $e_1$  e  $f$  não são paralelas em  $G$ . Por definição de  $B$ ,  $e_1$  não é múltipla nem com  $b_1$  nem com  $b_2$ . Observe que  $f$ , um vértice de  $N(e_1)$ , é adjacente a  $e_1$ , ao passo que os vértices de  $B$  não são. Concluímos que  $b_1$  e  $b_2$  constituem o único par de arestas paralelas de  $Q$  em  $G$ . Portanto, pelo Lema da Quádrupla,  $|\hat{S}_G| = 2$ .

A aresta  $f$  tem que ser adjacente a toda aresta  $b_3$  de  $B - \{b_1, b_2\}$ . Caso contrário, repetindo o raciocínio acima com o par  $\{b_1, b_3\}$  deduziríamos que  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são arestas paralelas em  $G$ , uma contradição dado que  $G \neq \gamma$ .  $\square$

Seja  $R := E(\bar{J}[B])$  o conjunto das arestas de  $\bar{J}$  induzido por  $B$ . Um *3-núcleo* é uma tripla ordenada  $(b_1, b_2, b_3)$  de vértices de  $B$  tais que  $R$  contém  $b_1b_2$  e  $b_1b_3$ , mas  $b_2$  e  $b_3$  são adjacentes em  $J$  e correspondem a arestas paralelas de  $G$ . Um *4-núcleo* é uma quádrupla ordenada  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  de vértices de  $B$  tais que  $R$  contém as quatro arestas do quadrilátero  $b_1b_2b_3b_4$ , mas os pares  $\{b_1, b_3\}$  e  $\{b_2, b_4\}$  são adjacentes em  $J$ , sendo que cada par corresponde a arestas paralelas de  $G$ .

### LEMA 3.53

Seja  $B_3 := \{b_1, b_2, b_3\}$  um conjunto de vértices de  $B$ . Se  $b_1b_2$  e  $b_1b_3$  são arestas de  $R$ , então,  $|\hat{S}_G| = 2$  e  $(b_1, b_2, b_3)$  é um 3-núcleo.

Demonstração: Considere a quádrupla  $Q := \{e_1, b_1, b_2, b_3\}$ . Pela definição de  $B$ ,  $e_1$  não é adjacente em  $J$  a nenhum dos demais vértices de  $Q$ . Por hipótese,  $b_1$  não é adjacente nem a  $b_2$  nem a  $b_3$  em  $J$ . Assim, pelo Lema da Quádrupla,  $b_2$  e  $b_3$  são adjacentes em  $J$ . A Figura 3.19 ilustra  $J[Q]$ , representando por arestas tracejadas as arestas de  $\bar{J}$ . Portanto,  $b_2b_3$  é a única aresta de  $J[Q]$ . Pelo Lema da Quádrupla novamente, existe pelo menos um par de arestas de  $Q$  que são paralelas em  $G$ , com igualdade somente se  $|\hat{S}_G| = 2$ . Pela

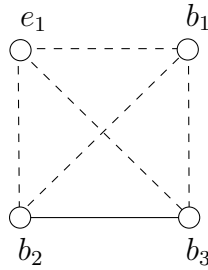


Figura 3.19: Ilustração da demonstração do Lema 3.53

definição de  $B$ ,  $e_1$  não é múltipla em  $G$  com nenhum dos demais vértices de  $Q$ . Certamente  $b_1$  não é múltipla em  $G$  nem com  $b_2$  nem com  $b_3$  pois não é adjacente a nenhuma delas em  $J$ , ao passo que  $b_2$  e  $b_3$  são adjacentes em  $J$ . Portanto,  $b_2$  e  $b_3$  constituem o único par de arestas de  $Q$  paralelas em  $G$ . De fato,  $|\hat{S}_G| = 2$  e  $(b_1, b_2, b_3)$  é um 3-núcleo.  $\square$

**LEMA 3.54**

Se  $R$  não é um emparelhamento, então  $|\hat{S}_G| = 2$  e  $B$  tem um 3-núcleo ou um 4-núcleo  $T$  tal que todo vértice de  $B - T$  é adjacente em  $J$  a cada vértice de  $T$ .

Demonstração: Por hipótese,  $R$  não é um emparelhamento. Portanto,  $B$  tem um conjunto  $B_3 := \{b_1, b_2, b_3\}$  de três vértices, tais que  $b_1$  não é adjacente nem a  $b_2$  nem a  $b_3$  em  $J$ . Pelo Lema 3.53, temos que  $|\hat{S}_G| = 2$  e  $(b_1, b_2, b_3)$  é um 3-núcleo. Assim,  $b_2$  e  $b_3$  são adjacentes em  $J$  e paralelas em  $G$ . Se cada vértice de  $B - B_3$  é adjacente em  $J$  a cada vértice de  $B_3$  então a afirmativa vale, com  $T = B_3$ .

Podemos portanto supor que  $B - B_3$  tem um vértice,  $b_4$ , que não é adjacente a pelo menos um vértice de  $B_3$ . Vamos mostrar que há um 4-núcleo envolvendo os vértices de  $T := B_3 \cup \{b_4\}$ , tal que todo vértice de  $B - T$  é adjacente em  $J$  a cada vértice de  $T$ . Suponha, por absurdo, que  $b_4$  e  $b_1$  não são adjacentes. Então  $R$  contém as arestas  $b_1b_2$  e  $b_1b_4$ . Pelo Lema 3.53,  $(b_1, b_2, b_4)$  é um 3-núcleo. Assim,  $b_2, b_3$  e  $b_4$  são paralelas, uma contradição à suposição inicial de que  $G \neq \gamma$  (Lema da Multiplicidade). Concluímos que  $b_4$  é adjacente a  $b_1$ . Por definição,  $b_4$  não é adjacente em  $J$  a algum vértice de  $B_3$ . Os vértices  $b_2$  e  $b_3$  correspondem a arestas paralelas em  $G$ . Portanto,  $b_4$  não é adjacente em  $J$  nem a  $b_2$  nem a  $b_3$ . Assim,  $b_2$  não é adjacente em  $J$  nem a  $b_1$  nem a  $b_4$ . Temos então, pelo Lema 3.53, que  $(b_2, b_1, b_4)$  é um 3-núcleo. Ou seja,  $b_1$  e  $b_4$  são paralelas em  $G$  e adjacentes em  $J$ . Assim,  $(b_1, b_2, b_4, b_3)$  é um 4-núcleo. Seja  $b_5$  um vértice de  $B - T$ . Suponha, por absurdo, que  $b_5$  não seja adjacente a algum vértice de  $T$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $b_1$  e  $b_5$  não são adjacentes. Novamente pelo Lema 3.53 temos que

$(b_1, b_2, b_5)$  é um 3-núcleo e, portanto,  $b_2, b_3$  e  $b_5$  são paralelas em  $G$ . Temos mais uma vez uma contradição à suposição inicial de que  $G \neq \gamma$ . De fato, a afirmativa vale.  $\square$

Podemos agora retomar a demonstração do Lema da Contagem. Esta se baseia na análise de casos. Na análise de cada caso, suporemos que os casos anteriores não se aplicam.

**CASO 1** *A aresta  $e_1$  é múltipla em  $G$ .*

Seja  $f$  uma aresta de  $G$  múltipla com  $e_1$ . Como  $G \neq \gamma$ , então, pelo Lema da Multiplicidade  $f$  é a única aresta de  $G$  múltipla com  $e_1$ .

**CASO 1.1** *Em  $J$ , o vértice  $f$  é adjacente ao vértice  $e_1$ .*

Vamos inicialmente mostrar que  $|\hat{S}_G| = 2$  neste caso. Sabemos que  $f$  é a única aresta de  $G$  múltipla com  $e_1$ . Portanto,  $B = C - e_1 - N(e_1)$ . Por (3.6) (vide página 75), temos que  $\delta \leq 3$ . Assim, deduzimos que  $|B| \geq 3$ . Seja  $\{b_1, b_2\}$  um par de vértices de  $B$ , seja  $Q := \{e_1, f, b_1, b_2\}$ . No grafo  $J$ , os vértices  $e_1$  e  $f$  não são adjacentes a nenhum dos vértices  $b_1$  e  $b_2$ . Logo, pelo Lema da Quádrupla, ou  $|\hat{S}_G| = 2$ , ou o número  $m$  de pares de arestas paralelas de  $Q$  em  $G$  é dois e  $b_1$  e  $b_2$  também correspondem a arestas paralelas em  $G$ . Se  $|\hat{S}_G| < 2$ , então esta conclusão vale para qualquer par  $\{b_1, b_2\}$  de vértices de  $B$ . Mas vimos que  $|B| \geq 3$  e sabemos que  $G \neq \gamma$ . Temos então uma contradição ao Lema da Multiplicidade. Portanto, podemos supor que  $\delta \leq 2$ . Assim, por (3.6), deduzimos que  $|\hat{S}_G| = 2$ .

Pelo Lema 3.47, existe um vértice,  $g$ , que é adjacente em  $J$  tanto a  $e_1$  quanto a  $f$ . Logo,  $\delta = 2$ . Assim,  $|B| = 4$  e  $J - B$  é um triângulo. Considere inicialmente o caso em que  $|R| \leq 2$ . Então,  $J[B]$  tem quatro ou mais arestas. Ademais, pelo Lema 3.52, o vértice  $g$  é adjacente em  $J$  a dois ou mais vértices de  $B$ . Assim,  $J$  tem 9 ou mais arestas e o grau de  $g$  em  $J$  é quatro ou mais. A afirmativa vale nesse caso. Podemos portanto supor que  $|R| > 2$ . Dado que  $|B| = 4$ , deduzimos que  $R$  não é um emparelhamento. Pelo Lema 3.54,  $B$  tem um 3-núcleo ou um 4-núcleo  $T$  tal que todo vértice de  $B - T$  é adjacente a cada vértice de  $T$ . Mas  $|B| = 4$ . Se  $T$  for um 3-núcleo então  $|R| = 2$ . Deduzimos que  $T$  é um 4-núcleo. Nesse caso,  $J[B]$  consiste de apenas duas arestas, não adjacentes. Como  $\delta = 2$ , os quatro vértices de  $B$  são adjacentes a vértices de  $V(J) - B$ . Na verdade, os quatro vértices de  $B$  são adjacentes a  $g$  pois não são adjacentes a  $e_1$  por definição e nem a  $f$  que é múltipla de  $e_1$  em  $G$ . Concluimos que nesse caso  $J$  tem precisamente nove arestas, mas  $g$  tem grau 6. Logo,  $\Delta > 4$ . A afirmativa também vale neste caso.

**CASO 1.2** *Em  $J$ , o vértice  $f$  não é adjacente ao vértice  $e_1$ .*

Seja  $\{b_1, b_2\}$  um par de vértices de  $B$ . Seja  $Q := \{e_1, f, b_1, b_2\}$ . Os vértices  $e_1$  e  $f$  são ambos isolados em  $J[Q]$ . Pelo Lema da Quádrupla,  $b_1$  e  $b_2$  são adjacentes em  $J$ . Esta conclusão vale para todo par  $\{b_1, b_2\}$  de vértices de  $B$ . Portanto,  $J[B]$  é completo.

Considere inicialmente o caso em que  $|\hat{S}_G| = 1$ . Ainda pelo Lema da Quádrupla aplicado a  $Q$ , temos que o número  $m$  de pares de arestas paralelas de  $Q$  em  $G$  é dois. Como  $f$  é a única aresta múltipla com  $e_1$  em  $G$ , deduzimos que  $b_1$  e  $b_2$  correspondem a arestas paralelas em  $G$ . Esta conclusão vale para qualquer par  $\{b_1, b_2\}$  de vértices de  $B$ . Mas, pelo Lema da Multiplicidade, como  $G \neq \gamma$ , concluímos que neste caso  $B = \{b_1, b_2\}$ . Então,  $\delta = 3$ , conforme ilustrado na Figura 3.20. Seja  $g$  um dos três vértices de  $N(e_1)$ .

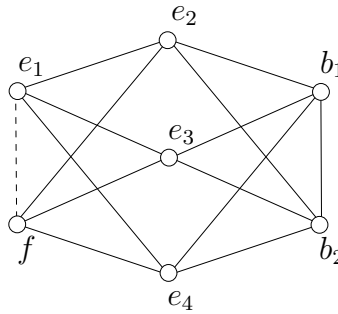


Figura 3.20: O grafo  $J$  no caso em que  $e_1$  e  $f$  são paralelas em  $G$  mas não adjacentes em  $J$  e  $|\hat{S}_G| = 1$

Suponha que  $g$  não seja adjacente em  $J$  a nenhum dos dois vértices de  $B$ . Nesse caso, aplicando o Lema da Quádrupla à quádrupla  $P := \{e_1, g, b_1, b_2\}$ , deduzimos que o número  $m$  de pares de arestas paralelas de  $P$  em  $G$  é dois. Como  $f$  é a única aresta múltipla com  $e_1$  em  $G$ ,  $g$  deve ser múltipla com  $b_1$  ou com  $b_2$  em  $G$ . Mas  $b_1$  e  $b_2$  são paralelas em  $G$  e  $G \neq \gamma$ , temos então uma contradição ao Lema da Multiplicidade. Concluimos assim que  $g$  é adjacente em  $J$  a pelo menos um vértice de  $B$ . Mas os dois vértices de  $B$  correspondem a arestas paralelas em  $G$ . Assim,  $g$  é adjacente a ambos os vértices de  $B$ . Essa conclusão vale para os três vértices de  $N(e_1)$  (Figura 3.20). Então, que  $J$  tem treze ou mais arestas neste caso.

Suponhamos agora que  $|\hat{S}_G| = 2$ . Por (3.6), temos que  $\delta \leq 2$ . Pelo Lema 3.47,  $N(e_1)$  não é vazio. Assim,  $1 \leq \delta \leq 2$ . Seja  $b = |B|$ . Cada um dos  $\delta$  vértices de  $N(e_1)$  é adjacente em  $J$  tanto a  $e_1$  quanto a  $f$ , e também a pelo menos  $b - 2$  vértices de  $B$ , pelo Lema 3.52. Além disso,  $J[B]$  é completo, portanto,

$$|E(J)| \geq \delta(2 + b - 2) + \frac{b(b-1)}{2}.$$

Se  $\delta = 1$ , então  $b = 4$  e  $|E(J)| \geq 10$  e a afirmativa vale nesse caso. Podemos portanto supor que  $\delta = 2$ . Nesse caso,  $b = 3$  e  $|E(J)| \geq 9$ , com igualdade somente se ambos os

vértices de  $N(e_1)$  são adjacentes a apenas um vértice de  $B$ . Suponhamos que ocorra a igualdade. Pelo Lema 3.52, dois vértices de  $B$ , digamos  $b_1$  e  $b_2$ , correspondem a arestas paralelas em  $G$ . Além disso, nenhum dos dois vértices de  $N(e_1)$  é adjacente nem a  $b_1$  nem a  $b_2$ . Assim, o terceiro vértice de  $B$ , distinto de  $b_1$  e de  $b_2$ , é adjacente a ambos os vértices de  $N(e_1)$  e tem portanto grau quatro em  $J$ , conforme ilustrado pela Figura 3.21. A afirmativa vale neste caso também.

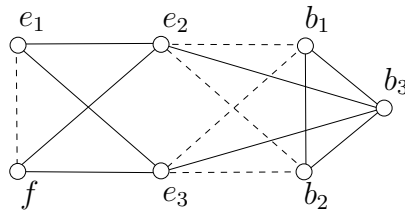


Figura 3.21: O grafo  $J$  no caso em que  $e_1$  e  $f$  são paralelas em  $G$  mas não adjacentes em  $J$  e  $|\hat{S}_G| = 2$

CASO 2 A aresta  $e_1$  não é múltipla em  $G$ .

CASO 2.1  $|\hat{S}_G| = 1$ .

CASO 2.1.1  $\delta \leq 2$ .

Se  $\delta = 0$  então  $e_1$  é um vértice universal de  $\overline{J}$ . Logo, pelo Lema 3.48,  $J - e_1$  é completo e  $J$  tem no mínimo quinze arestas. Nesse caso,  $J$  tem 15 arestas. Se  $\delta = 1$  então, novamente pelo Lema 3.48 o vértice  $e_2$  é universal em  $J$ . Pelo Lema 3.54, dado que  $|\hat{S}_G| = 1$ , temos que  $R$  é um emparelhamento. Como  $|B| = 5$ , então  $R$  tem no máximo duas arestas. Logo,  $J[B]$  tem oito ou mais arestas, perfazendo um total de quatorze arestas em  $J$ . Finalmente, suponhamos que  $\delta = 2$ . Nesse caso,  $e_1$  não é adjacente em  $J$  a nenhum dos quatro vértices  $e_4, e_5, e_6$  e  $e_7$ . Novamente pelo Lema 3.48, temos que  $e_2$  e  $e_3$  são adjacentes em  $J$ . Pelo Lema 3.54, dado que  $|\hat{S}_G| = 1$ , temos que  $R$  é um emparelhamento. Como  $|B| = 4$ , então  $R$  tem no máximo duas arestas e, portanto,  $J[B]$  tem quatro ou mais arestas. Pelo Lema 3.52, cada vértice de  $N(e_1)$  é adjacente a pelo menos três vértices de  $B$ , conforme ilustrado pela Figura 3.22. Portanto, temos um total de pelo menos  $3 + 6 + 4 = 13$  arestas em  $J$ . A afirmação vale neste caso também.

CASO 2.1.2  $\delta = 3$ .



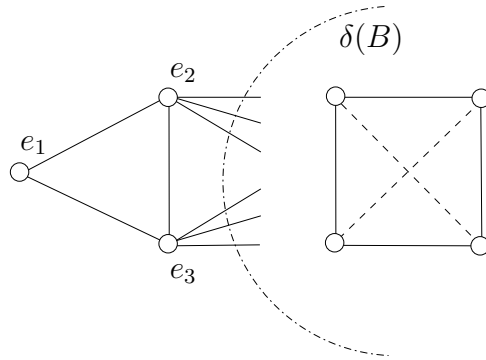


Figura 3.22: O grafo  $J$  no caso em que  $e_1$  não é múltipla em  $G$ , com  $|\hat{S}_G| = 1$  e  $\delta = 2$

Neste caso,  $|B| = 3$ . Então  $N(e_1) = \{e_2, e_3, e_4\}$  e  $B = \{e_5, e_6, e_7\}$ . Pelo Lema 3.54,  $R$  é um emparelhamento e, como  $|B| = 3$ ,  $J[B]$  tem duas ou mais arestas. Pelo Lema 3.52, cada vértice de  $N(e_1)$  é adjacente em  $J$  a pelo menos dois dos três vértices de  $B$ . Sendo assim, temos um total de pelo menos onze arestas, com igualdade somente se o conjunto  $N(e_1)$  for independente em  $J$  e o grafo  $J[B]$  tiver apenas duas arestas, conforme ilustrado pela Figura 3.23. Nesse caso, podemos ajustar a notação de forma que  $e_6$  e  $e_7$  não sejam

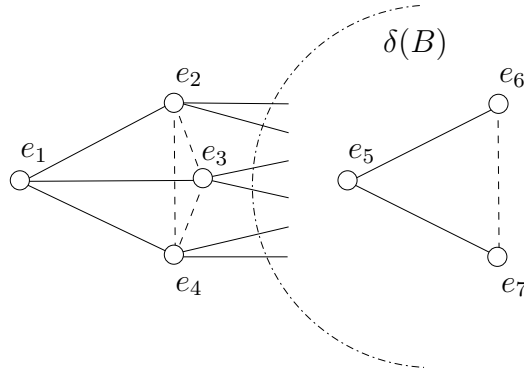


Figura 3.23: O grafo  $J$  no caso em que  $e_1$  não é múltipla em  $G$ , com  $|\hat{S}_G| = 1$  e  $\delta = 3$

adjacentes em  $J$ . Considere a partição  $P := \{\{e_1, e_5\}, \{e_6, e_7\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}$  das arestas de  $C$ . Pelo Lema 3.49,  $J$  tem uma aresta com ambos os extremos em um mesmo conjunto de  $P$ . Sabemos que  $e_1$  e  $e_5$  não são adjacentes em  $J$  por definição. Então, ou  $e_6$  e  $e_7$  são adjacentes, ou então  $N(e_1)$  não é independente em  $J$ . Em todas as alternativas, temos

$\delta$	$b$	$M$	$T_3$	$T_4$
0	6	12	10	10
1	5	8	7	6
2	4	4	4	2

Tabela 3.2: O número mínimo de arestas de  $J[B]$  de acordo com a sua estrutura

pelo menos doze arestas. A afirmação vale neste caso.

CASO 2.2  $|\hat{S}_G| = 2$ .

Por (3.6),  $\delta \leq 2$ . Então,  $|B| \geq 4$ . Seja  $b := |B|$ . Se  $R$  for um emparelhamento, então  $J(B)$  tem  $b(b-2)/2$  ou mais arestas. Pelo Lema 3.54, se  $B$  tem um 3-núcleo então  $J(B)$  tem  $3(b-3) + 1$  arestas e se  $B$  tem um 4-núcleo então  $J(B)$  tem  $4(b-4) + 2$  arestas. Temos então a Tabela 3.2 com limites inferiores para  $|E(J[B])|$ , onde a coluna  $M$  indica que  $R$  é um emparelhamento, as colunas  $T_3$  e  $T_4$  indicam que  $B$  tem um 3-núcleo ou um 4-núcleo,  $T$ , respectivamente, tal que todo vértice de  $B - T$  é adjacente a cada vértice de  $T$ .

CASO 2.2.1  $\delta < 2$ .

Se  $\delta = 0$ , então  $J[B]$  tem 10 ou mais arestas, e a afirmação vale neste caso. Suponhamos então que  $\delta = 1$ . Então,  $J[B]$  tem 6 ou mais arestas. Além disso, pelo Lema 3.52, o vértice de  $N(e_1)$  é adjacente a pelo menos três vértices de  $B$ , o que fornece um mínimo de dez arestas para  $J$ . A afirmativa também vale neste caso.

CASO 2.2.2  $\delta = 2$ .

Nesse caso,  $|B| = 4$ . Pelo Lema 3.52, temos que cada vértice de  $N(e_1)$  é adjacente a pelo menos dois vértices de  $B$ , totalizando um mínimo de quatro arestas entre vértices de  $N(e_1)$  e  $B$ . Vamos agora analisar a estrutura de  $J[B]$ . Se  $B$  não é um 4-núcleo então  $J[B]$  tem quatro ou mais arestas (vide Tabela 3.2) e, portanto,  $J$  tem pelo menos 10 arestas nesse caso. Podemos então supor que  $B$  é um 4-núcleo. Nesse caso,  $J[B]$  consiste de precisamente duas arestas, não adjacentes. Os vértices emparelhados de  $B$  correspondem a pares de arestas paralelas em  $G$ . Já analisamos o caso em que um vértice de grau mínimo corresponde a uma aresta múltipla em  $G$ . Assim, nenhum dos vértices de  $B$  pode ter grau mínimo em  $J$ . Logo, todos os quatro vértices de  $B$  são adjacentes a ambos os vértices de  $N(e_1)$ , conforme ilustrado pela Figura 3.24. Assim,  $J$  tem pelo menos doze arestas.  $\square$

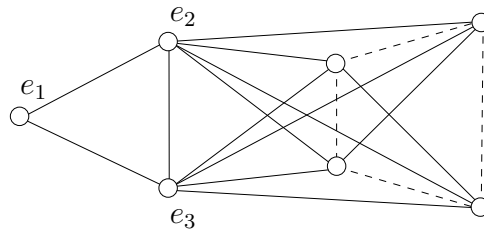


Figura 3.24: O grafo  $J$  no caso em que  $e_1$  não é múltipla em  $G$ , com  $|\hat{S}_G| = 2$  e  $\delta = 2$

### TEOREMA 3.55

Todo 7-corte  $C$  de  $G_\star$  que separa  $S$  é um pente.

Demonstração: Seja  $C$  um 7-corte de  $G_\star$  que separa  $S$  e  $G_1$  e  $G_2$  as  $C$ -contrações de  $G_\star$ . Para  $i = 1, 2$ , sejam  $x_i$  os vértices de contração,  $S_i$  a contração de  $S$ . Ajuste a notação de forma que  $|S_1| \geq |S_2|$ . Como o corte  $C$  separa  $S$ , então certamente  $\hat{S}_i = S_i - x_i$  para  $i = 1, 2$ . Assim,  $|\hat{S}_2| = 1$  e  $|\hat{S}_1| \leq 2$ .

Para  $i = 1, 2$ , seja  $J_i$  o grafo de compatibilidades de  $G_i$  e  $\delta_i$  e  $\Delta_i$  os graus mínimo e máximo de  $J_i$ . Vamos mostrar que existe pelo menos uma aresta comum a ambos  $J_1$  e  $J_2$ . Pelo Lema 3.51,  $|E(J_1)| \geq 12$ , com igualdade somente se  $\delta_1 = 3$  e  $|E(J_2)| \geq 9$ , com igualdade somente se  $\Delta_2 \geq 4$ . Considere primeiro o caso em que vale a desigualdade estrita em um dos dois grafos de compatibilidades. Então  $|E(J_1)| + |E(J_2)| \geq 22$ . Como tanto  $J_1$  quanto  $J_2$  tem no máximo 21 arestas, então existe pelo menos uma aresta comum a ambos. Podemos então supor que  $|E(J_1)| = 12$  e  $|E(J_2)| = 9$ . Pelo Lema 3.51, temos que  $\delta_1 = 3$  e  $\Delta_2 = 4$ . Seja  $f$  um vértice de grau máximo em  $J_2$ . O grau de  $f$  é pelo menos quatro em  $J_2$  e pelo menos três em  $J_1$ . Como ambos  $J_1$  e  $J_2$  têm apenas sete vértices, concluímos que existe pelo menos uma aresta comum a ambos.

Em ambas as alternativas, deduzimos que existe uma aresta comum a  $J_1$  e  $J_2$ . Ou seja, existe uma mesma 3-orientação de  $C$  viável em ambas as  $C$ -contrações  $G_1$  e  $G_2$ . Portanto,  $G_\star$  tem uma 3-orientação, uma contradição. De fato,  $G_\star$  é livre de 7-cortes que não são pentes e separam  $S$ .  $\square$

Finalmente, deduzimos dos Teoremas 3.46 e 3.55 que  $G_\star$  é livre de 7-cortes que não são pentes. Concluímos assim a demonstração do Teorema Principal.



## Capítulo 4

# Nova Demonstração do Teorema de Grötzsch

Neste capítulo apresentamos uma nova demonstração do Teorema de Grötzsch, que afirma que mapas planares sem laços e sem triângulos admitem uma 3-coloração de vértices. A demonstração aqui apresentada foi desenvolvida em conjunto com os professores Daniel Younger e Bruce Richter da University of Waterloo, situada em Ontário, no Canadá.

A demonstração original de Grötzsch [8] foi publicada em 1958. Diversas extensões e variações deste Teorema foram publicadas nos anos que se seguiram. Grünbaum [9] e Aksionov [1] estenderam o resultado para mapas planares com até três triângulos. Steinberg e Younger [23] apresentaram a versão dualizada da extensão de Grünbaum-Aksionov em termos de 3-fluxos e estabeleceram mais uma extensão para mapas imersíveis no plano projetivo. Thomassen [25] então apresentou uma demonstração do Teorema de Grötzsch que inclui uma extensão para 3-coloração de mapas imersíveis no plano projetivo e no toro. Posteriormente, Thomassen [26] apresentou outra demonstração do Teorema de Grötzsch, a qual não utiliza a Fórmula de Euler. Por esse motivo sua demonstração chama a atenção como um possível caminho para uma extensão mais geral do resultado, independente da superfície de imersão do grafo. No entanto, a demonstração de Thomassen ainda depende fortemente de outros aspectos de planaridade.

Esta demonstração mais recente de Thomassen [26], que não utiliza a Fórmula de Euler, trata de coloração por listas, um problema mais geral que coloração de vértices. Considere uma *função lista*  $L$  que associa a cada vértice do grafo  $G$  um conjunto  $L(v)$  não vazio, a *lista* de  $v$ . Uma *lista-coloração* (ou  $L$ -coloração) de  $G$  é uma coloração  $c$  tal que  $c(v) \in L(v)$  para todo vértice  $v$  de  $G$ . Dizemos que  $G$  é  $L$ -colorável se admite uma  $L$ -coloração. Dizemos que  $G$  é  $k$ -lista-colorável se é  $L$ -colorável para qualquer função lista  $L$  tal que  $|L(v)| = k$  para todo vértice  $v$  de  $G$ . Faremos um abuso de linguagem nos referindo a vértices com lista unitária como vértices *coloridos*.

Claramente, se  $G$  é  $k$ -lista-colorável então também é  $k$ -colorável. A recíproca não é verdadeira. Bondy e Murty [5, Figura 14.9] apresentam um exemplo de um grafo bipartido com listas  $L(v)$  de tamanho dois associadas aos seus vértices e que não é  $L$ -colorável.

No trabalho de Thomassen [26] mencionado acima, é demonstrado que um grafo planar com cintura pelo menos cinco é 3-lista-colorável. A demonstração apresentada neste capítulo prova o mesmo resultado, porém, a hipótese do Teorema aqui demonstrado difere um pouco daquela apresentada por Thomassen. A fim de esclarecer e ressaltar essas diferenças, bem como simplificar e encurtar a demonstração apresentada neste capítulo, definimos a seguir as configurações  $\langle s, t \rangle$ .

## 4.1 Configurações $\langle s, t \rangle$

Seja  $G$  planar,  $\tilde{G}$  uma imersão planar de  $G$  com face externa  $\tilde{B}$  e  $L$  uma função lista de  $G$  tal que cada vértice possua uma lista com no máximo três cores. Particionamos os vértices de  $G$  em três conjuntos, de acordo com as cardinalidades das listas  $L$ . Denotamos por  $V_i(L)$  (ou simplesmente  $V_i$  quando  $L$  for subentendido) o conjunto dos vértices  $v$  de  $G$  tais que  $|L(v)| = i$ . Dados inteiros  $s$  e  $t$ , dizemos que a tripla  $(\tilde{G}, \tilde{B}, L)$  forma uma configuração  $\langle s, t \rangle$  se as seguintes condições são satisfeitas:

- a cintura de  $G$  é cinco ou mais.
- os vértices de  $V_1 \cup V_2$  e as arestas de  $G[V_1 \cup V_2]$  estão em  $\tilde{B}$ ;
- o subgrafo  $G[V_1]$  é conexo;
- nenhum vértice de  $V_1$  é adjacente a vértices de  $V_2$ ;
- a restrição de  $L$  a  $V_1$  é uma coloração própria de  $G[V_1]$ ; e
- $|V_1| \leq s$ ;
- $|E(G[V_2])| \leq t$ ;

Na Figura 4.1 mostramos ilustrações de grafos  $\langle 6, 0 \rangle$  e  $\langle 4, 1 \rangle$ . Os vértices de  $V_1$  são representados por quadrados pretos, os de  $V_2$  por quadrados brancos e os de  $V_3$  por círculos brancos. Esta convenção será utilizada em todas as figuras apresentadas neste capítulo. Nos casos em que não for necessário, ou mesmo não for possível, especificar a qual dos conjuntos  $\{V_1, V_2, V_3\}$  um vértice pertence, o representaremos por um hexágono.

No trabalho já mencionado de Thomassen [26], é demonstrado que configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  são  $L$ -coloráveis. Neste capítulo, demonstraremos que configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  e  $\langle 4, 1 \rangle$  são  $L$ -coloráveis. Em qualquer dos casos, temos demonstrações alternativas do Teorema de

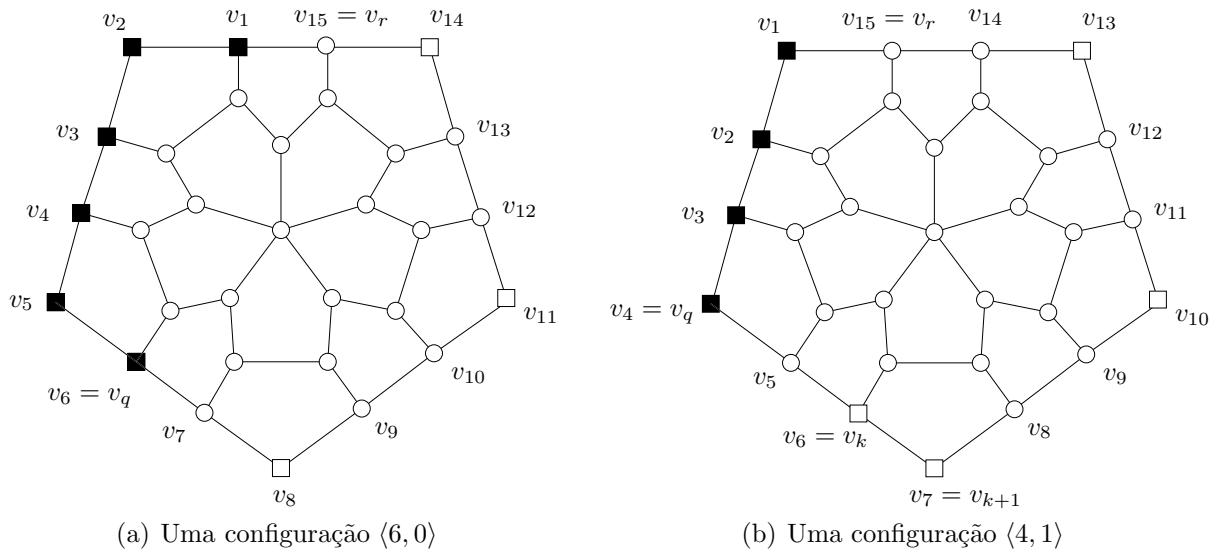


Figura 4.1: Exemplos de configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  e  $\langle 4, 1 \rangle$ . Os vértices de  $V_1$  são representados por quadrados pretos, os de  $V_2$  por quadrados brancos e os de  $V_3$  por círculos brancos

Grötzsch, pois este pode ser reduzido à  $L$ -coloração de configurações  $\langle 6, 0 \rangle$ , conforme mostramos a seguir.

## 4.2 Redução a Configurações $\langle 6, 0 \rangle$

Nesta seção vamos reduzir o Teorema de Grötzsch à demonstração de que configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  são  $L$ -coloráveis. Neste capítulo diremos que um ciclo de comprimento  $n$  é um *polígono* de  $n$  lados.

O Teorema de Grötzsch trata de grafos planares sem laços e sem triângulos. Seja  $G$  um tal grafo e  $\tilde{G}$  uma imersão planar de  $G$ . Se  $G$  possui cintura pelo menos cinco, então escolhamos uma face arbitrária para ser  $\tilde{B}$  e definimos uma função lista  $L$  da seguinte forma: escolhamos um vértice  $v$  qualquer de  $\tilde{B}$  ao qual atribuímos  $L(v) = a$ ; para os demais vértices  $u$  de  $G$  distintos de  $v$  atribuímos  $L(u) = \{a, b, c\}$ . Claramente, temos uma configuração  $(\tilde{G}, \tilde{B}, L)$  que é  $\langle 6, 0 \rangle$  e tal que toda  $L$ -coloração de  $G$  é uma 3-coloração. Podemos então supor que  $G$  possui arestas múltiplas ou quadriláteros.

Se  $G$  possui arestas múltiplas, simplesmente removemos uma das arestas. Qualquer 3-coloração do grafo resultante é também uma 3-coloração de  $G$ . Podemos então supor que  $G$  possui quadriláteros.

Dizemos que um polígono  $P$  de uma imersão  $\tilde{G}$  de  $G$  é *facial* se for o ciclo que delimita uma dada face; caso contrário, dizemos que  $P$  é *separador*. Qualquer ciclo separa o plano em dois discos planares. Da mesma forma, um polígono separador  $P$  particiona  $\tilde{G}$  em

dois submapas. Cada um deles contém, além dos vértices e arestas de  $P$ , os vértices e arestas dispostos em um dos discos planares delimitados por  $P$ .

Seja  $P := (v_0, v_1, v_2, v_3)$  um quadrilátero de  $\tilde{G}$ . Considere primeiro o caso em que  $P$  é facial. Nossa intenção é identificar os vértices  $v_0$  e  $v_2$ , obtendo assim um mapa menor  $\tilde{G}'$ . Seja  $u$  o vértice de  $G'$  resultante da identificação de  $v_0$  e  $v_2$ . Suponha que  $G'$  satisfaça a hipótese de indução e, portanto, admita uma 3-coloração própria  $c'$ . Estendemos  $c'$  a uma 3-coloração própria  $c$  de  $G$  simplesmente atribuindo a  $v_0$  e  $v_2$  a cor de  $u$  em  $c'$ . Podemos então supor que  $G'$  não satisfaz a hipótese de indução. Como  $G$  não tem triângulos,  $v_0$  e  $v_2$  não são adjacentes em  $G$ ; logo,  $G'$  não tem laços. Então,  $G'$  possui um triângulo, o qual deve conter o vértice  $u$ . Se  $(u, w_1, w_2)$  é um triângulo de  $G'$ , então este é a imagem de um caminho  $Q_{02} := (v_0, w_1, w_2, v_2)$  em  $G$ . Certamente  $w_1 \notin P$ , caso contrário  $(w_1, w_2, v_2)$  seria um triângulo de  $G$ , conforme ilustrado na Figura 4.2(a); analogamente,  $w_2 \notin P$ . Então,  $Q_{02}$  e o caminho  $(v_0, v_1, v_2)$  em  $P$  são internamente disjuntos, conforme ilustrado

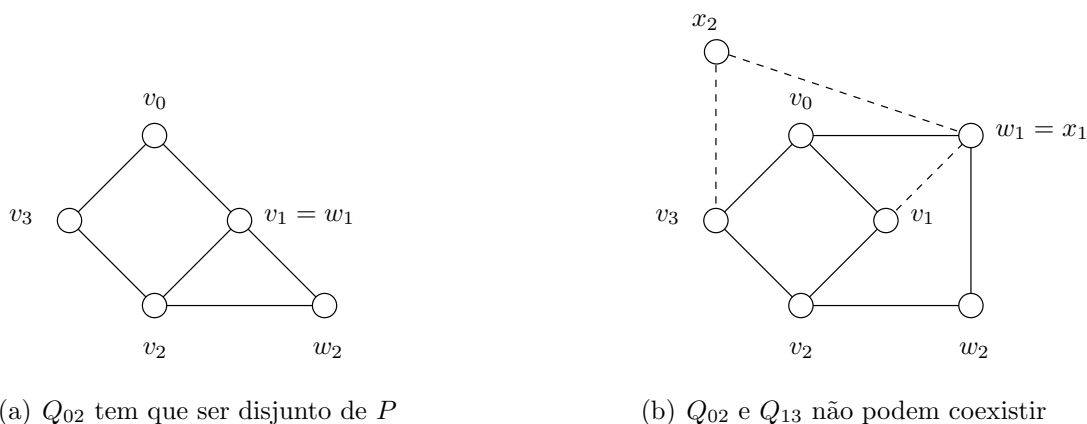


Figura 4.2: Redução de quadrilátero facial

na Figura 4.2(b). Então, para evitar a criação deste triângulo, identificamos  $v_1$  e  $v_3$  ao invés de  $v_0$  e  $v_2$ . Pelo mesmo raciocínio anterior, o mapa resultante só terá um triângulo se houver em  $G$  um caminho  $Q_{13} := (v_1, x_1, x_2, v_3)$  disjunto de  $P$ . No entanto, como  $G$  é planar e  $P$  é facial em  $\tilde{G}$ , o caminho  $Q_{13}$  não pode existir, senão teríamos  $x_1 = w_1$  ou  $x_1 = w_2$  (veja Figura 4.2(b)) e, em ambos os casos, haveria um triângulo em  $G$ . Portanto, é possível obter um mapa menor  $G'$  que satisfaz a hipótese de indução identificando algum par de vértices opostos de  $P$ .

Podemos então supor que  $P$  é um quadrilátero separador em  $\tilde{G}$ . Neste caso,  $P$  particiona naturalmente  $\tilde{G}$  em dois submapas,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , com apenas o quadrilátero  $P$  em comum e ambos menores que  $G$ , conforme ilustrado na Figura 4.3. Convencionamos que  $\tilde{G}_0$  é o mapa externo a  $P$ , isto é, aquele que contém a face externa  $\tilde{B}$ , bem como sua



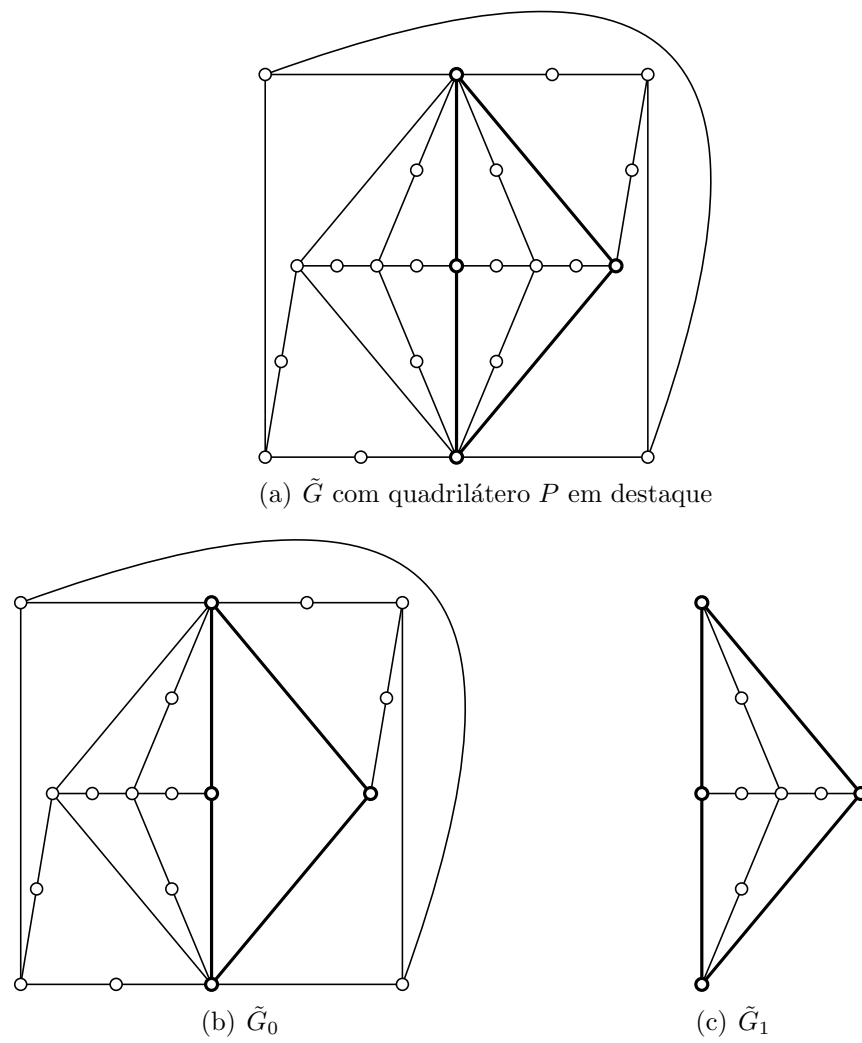


Figura 4.3: O quadrilátero separador  $P$  particiona  $\tilde{G}$  em  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$

fronteira. Então,  $\tilde{G}_1$  é o mapa interno a  $P$ . A face externa  $\tilde{B}_0$  de  $\tilde{G}_0$  é a própria face externa  $\tilde{B}$  de  $\tilde{G}$ , enquanto a face externa  $\tilde{B}_1$  de  $\tilde{G}_1$  é a união de todas as faces de  $\tilde{G}$  que são também faces de  $\tilde{G}_0$ . Dentre todos os quadriláteros separadores  $P$ , escolha um em que  $G_1$  seja minimal e, portanto, livre de quadriláteros separadores. Como  $G$  é livre de quadriláteros faciais, a minimalidade de  $G_1$  implica que  $P$  é seu único quadrilátero. Seja  $\tilde{G}'_1$  o mapa obtido a partir de  $\tilde{G}_1$  pela subdivisão da aresta  $v_0v_3$  de  $P$ . Claramente,  $\tilde{G}'_1$  tem cintura pelo menos cinco. Por hipótese de indução,  $G_0$  tem uma 3-coloração própria  $c_0$ . Em particular, esta coloração atribui cores aos vértices de  $P$ . Seja  $L_1$  uma função lista de  $G'_1$  tal que  $L_1(v)$  é uma lista unitária com a cor  $c_0(v)$  para os vértices  $v$  em  $P$  e, para os demais vértices,  $L_1(v)$  é uma lista com as três cores utilizadas em  $c_0$ . Note que a restrição de  $L_1$  aos vértices de  $P$  é uma coloração própria de  $G_1[V(P)]$  pois  $G'_1$  tem cintura pelo menos cinco. Então,  $(\tilde{G}'_1, \tilde{B}_1, L_1)$  é uma configuração  $\langle 4, 0 \rangle$  e, pelo Teorema 4.1 demonstrado na Seção 4.3 a seguir, admite uma  $L_1$ -coloração  $c'_1$ . A restrição  $c_1$  de  $c'_1$  a  $G_1$  é uma 3-coloração própria de  $G_1$  pois as cores de  $v_0$  e  $v_3$  já eram distintas em  $c_0$ . Deduzimos finalmente que  $G$  tem uma 3-coloração própria dada pela união de  $c_0$  e  $c_1$ . Concluímos assim a redução do Teorema de Grötzsch à lista-coloração de configurações  $\langle 6, 0 \rangle$ .

### 4.3 $L$ -coloração de Configurações $\langle 6, 0 \rangle$ e $\langle 4, 1 \rangle$

Nesta seção demonstraremos o seguinte teorema:

#### TEOREMA 4.1

*Toda configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  é  $L$ -colorável.*

Seja  $|L| = \sum_{v \in V(G)} |L(v)|$ . A demonstração segue por indução no *peso* da configuração, dado por  $|V(G)| + |L|$ . A base da indução é o grafo-vértice. Podemos supor que o grafo  $G$  é conexo, caso contrário aplicamos a hipótese de indução a cada componente conexa.

A demonstração será apresentada na forma de uma lista de reduções que mostram que sempre podemos reduzir a configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  em questão a uma outra configuração de peso menor que também seja  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$ . Estas reduções são divididas em dois conjuntos: as principais, apresentadas nas Seções 4.3.1 e 4.3.2, e as auxiliares, apresentadas na Seção 4.3.3.

A face externa  $\tilde{B}$  de  $\tilde{G}$  é delimitada por um passeio  $B = (v_1, v_2, \dots, v_r)$  da forma usual. Como a redução de vértices de corte faz parte das reduções auxiliares, no momento das reduções principais o passeio  $B$  será sempre um ciclo. Denotaremos por  $v_1, \dots, v_q$ , os vértices de  $B$  em  $V_1$ . Nos casos em que há uma (única) aresta em  $G[V_2]$ , esta será denominada *aresta especial* e seus extremos serão denotados  $v_k$  e  $v_{k+1}$ , conforme ilustrado na Figura 4.1.

Uma aresta  $v_i v_j$  com extremos em  $B$ , mas que não pertence a  $B$ , é uma *corda* de  $B$ . Um caminho  $(v_i, u, v_j)$  é uma *quase-corda* de  $B$  quando  $v_i$  e  $v_j$  pertencem a  $B$ , mas  $u$  não. Dizemos que  $v_i$  e  $v_j$  são os *extremos* da quase-corda. Uma quase-corda de  $B$  é *ruim* se ambos os seus extremos pertencem a  $V_1 \cup V_2$  ou apenas um deles pertence a  $V_1 \cup V_2$  e o outro é um dos dois vértices de  $V_3$  adjacentes em  $B$  a um dos extremos da aresta especial. Conforme mostraremos na Seção 4.3.3, é possível reduzir quase-cordas ruins, cordas e vértices de corte. Estas reduções, juntamente com a redução de pentágonos separadores, compõem o conjunto de reduções auxiliares.

As reduções principais são as reduções de configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  em si. Considere uma configuração  $(\tilde{G}, \tilde{B}, L)$  que é  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  e não possui nenhuma das configurações redutíveis apresentadas anteriormente. A redução de  $(\tilde{G}, \tilde{B}, L)$  se dá pela remoção de dois ou três vértices consecutivos de  $B$ , escolhidos criteriosamente. No caso de configurações  $\langle 6, 0 \rangle$ , os vértices escolhidos para a remoção são  $v_q$  e  $v_{q-1}$ . No caso de configurações  $\langle 4, 1 \rangle$ , o conjunto de vértices a ser removido depende de outras características estruturais da configuração. Porém, serão sempre vértices de um subcaminho de comprimento um ou dois do caminho  $v_{k-2}v_{k-1}v_kv_{k+1}v_{k+2}v_{k+3}$ . Lembramos que  $v_k$  e  $v_{k+1}$  denotam os extremos da aresta especial, conforme ilustrado na Figura 4.4.

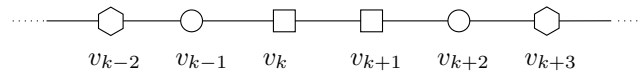


Figura 4.4: A vizinhança da aresta especial

Em qualquer dos casos, seja  $G'$  o grafo menor obtido após a remoção dos vértices de  $B$  selecionados. A imersão  $\tilde{G}'$  de  $G'$  considerada é precisamente aquela obtida a partir de  $\tilde{G}$  após a remoção dos vértices. Então, a face externa  $\tilde{B}'$  de  $G'$  será dada pela união de todas as faces que contém algum dos vértices removidos, o que inclui a face  $\tilde{B}$ .

Nosso objetivo é obter, por hipótese de indução, uma coloração da configuração de peso menor que seja extensível a uma  $L$ -coloração de  $G$ . Diferente do que acontece na maioria das demonstrações com esta estrutura, aqui colorimos os vértices antes de removê-los e restringimos a função lista para o grafo menor de forma que a extensão da coloração a  $G$  seja trivial. Para tal, ao removermos um vértice colorido  $v_i$  de  $B$ , é necessário remover também a cor de  $v_i$  da lista de todos os seus vizinhos. Seja  $L'$  a restrição de  $L$  a  $G'$  obtida dessa forma. Devemos ter o cuidado de colorir os vértices a remover, e que são adjacentes, com cores distintas. Assim, se a configuração de peso menor  $(\tilde{G}', \tilde{B}', L')$  obtida for  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$ , então  $G'$  terá uma  $L'$ -coloração que, unida à coloração dos vértices removidos, será uma  $L$ -coloração de  $G$ .

Vamos agora avaliar a possibilidade de  $(\tilde{G}', \tilde{B}', L')$  ser  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$ . Certamente, para qualquer vértice  $v$  de  $G'$ , a lista de  $v$  em  $L'$  possui no máximo uma cor a menos que sua lista em  $L$ , pois a cintura de  $G$  é pelo menos cinco e removemos no máximo

três vértices consecutivos. Além disso, sempre escolheremos os vértices a remover de forma que seja possível colorir-los sem reduzir as listas de seus vizinhos (não removidos) em  $V_2$ . Então,  $V_1(L') \subseteq V_1(L)$ . Portanto, o número de vértices coloridos não aumenta,  $G'[V_1(L')]$  é conexo, e a restrição de  $L'$  a  $V_1(L')$  é uma coloração de  $G'[V_1(L')]$ . Além disso, todo vértice de  $V_1(L') \cup V_2(L')$  pertence a  $\tilde{B}'$ , pois, ou este já era um vértice de  $V_1(L) \cup V_2(L)$  e estava no segmento de  $B$  preservado em  $B'$ , ou era um vizinho de um vértice removido e ambos certamente pertenciam a uma face comum. No entanto, é possível que tenham surgido adjacências indesejadas entre vértices de  $V_1(L')$  e de  $V_2(L')$ , ou mesmo entre dois vértices de  $V_2(L')$ , de forma que  $(\tilde{G}', \tilde{B}', L')$  não seja nem  $\langle 6, 0 \rangle$  e nem  $\langle 4, 1 \rangle$ . Nas Seções 4.3.1 e 4.3.2 mostramos que mesmo nesses casos é possível obter uma outra configuração de peso menor que seja  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$ , e cuja coloração obtida por hipótese de indução seja trivialmente estendida a uma  $L$ -coloração de  $G$ .

### 4.3.1 Configurações $\langle 6, 0 \rangle$

Vamos considerar inicialmente o caso em que a configuração é  $\langle 4, 0 \rangle$ . Neste caso,  $1 \leq q \leq 4$ . Mostraremos que é possível colorir pelo menos mais um vértice e ainda ter uma configuração  $\langle 6, 0 \rangle$ . Como  $G$  tem cintura pelo menos cinco, então  $r \geq 5$ . Logo,  $r \geq q + 1$  e portanto  $v_{q+1} \in V_3$ . A Figura 4.5 ilustra os três casos a serem considerados. Se  $r \geq q + 2$  e

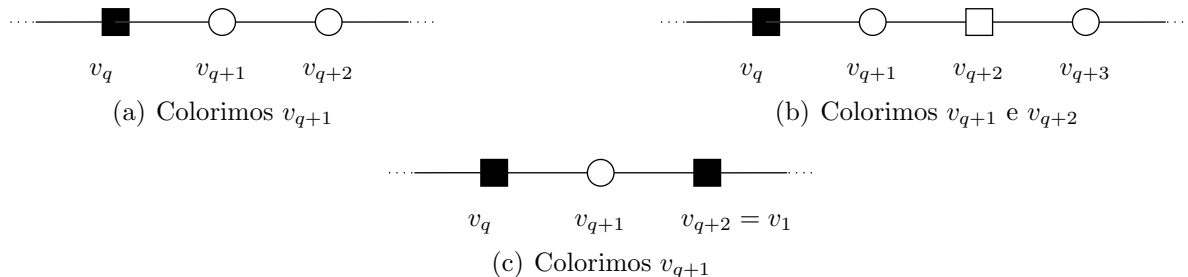


Figura 4.5: Caso em que há no máximo quatro vértices coloridos

$v_{q+2} \in V_3$  também, então colorimos  $v_{q+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_q$ . Com isso, temos uma nova configuração  $\langle 5, 0 \rangle$  de peso menor. Agora suponha que  $r \geq q + 2$  e  $v_{q+2} \in V_2$ . Então colorimos  $v_{q+1}$  como no caso anterior, e ainda colorimos  $v_{q+2}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_{q+1}$ . Temos então uma nova configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  de peso menor. Finalmente, suponha  $r = q + 1$  e portanto  $v_{q+2} \in V_1$ . Neste caso, colorimos  $v_{q+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_1$  e da de  $v_q$ . Em qualquer dos casos, como  $B$  é livre de cordas, o vértice  $v_{q+1}$  não possui nenhum outro vizinho além de  $v_{q+2}$  em  $V_1 \cup V_2$ . Como colorimos no máximo dois novos vértices, a configuração de peso menor assim obtida é  $\langle 6, 0 \rangle$ .

Podemos supor que  $q \geq 5$ . Neste caso, remova  $v_q$  e  $v_{q-1}$ . Para cada vértice removido, a sua cor deve ser removida das listas de seus respectivos vizinhos, conforme ilustrado na Figura 4.6. Seja  $X$  o conjunto dos vértices cujas listas foram reduzidas. Como a cintura de

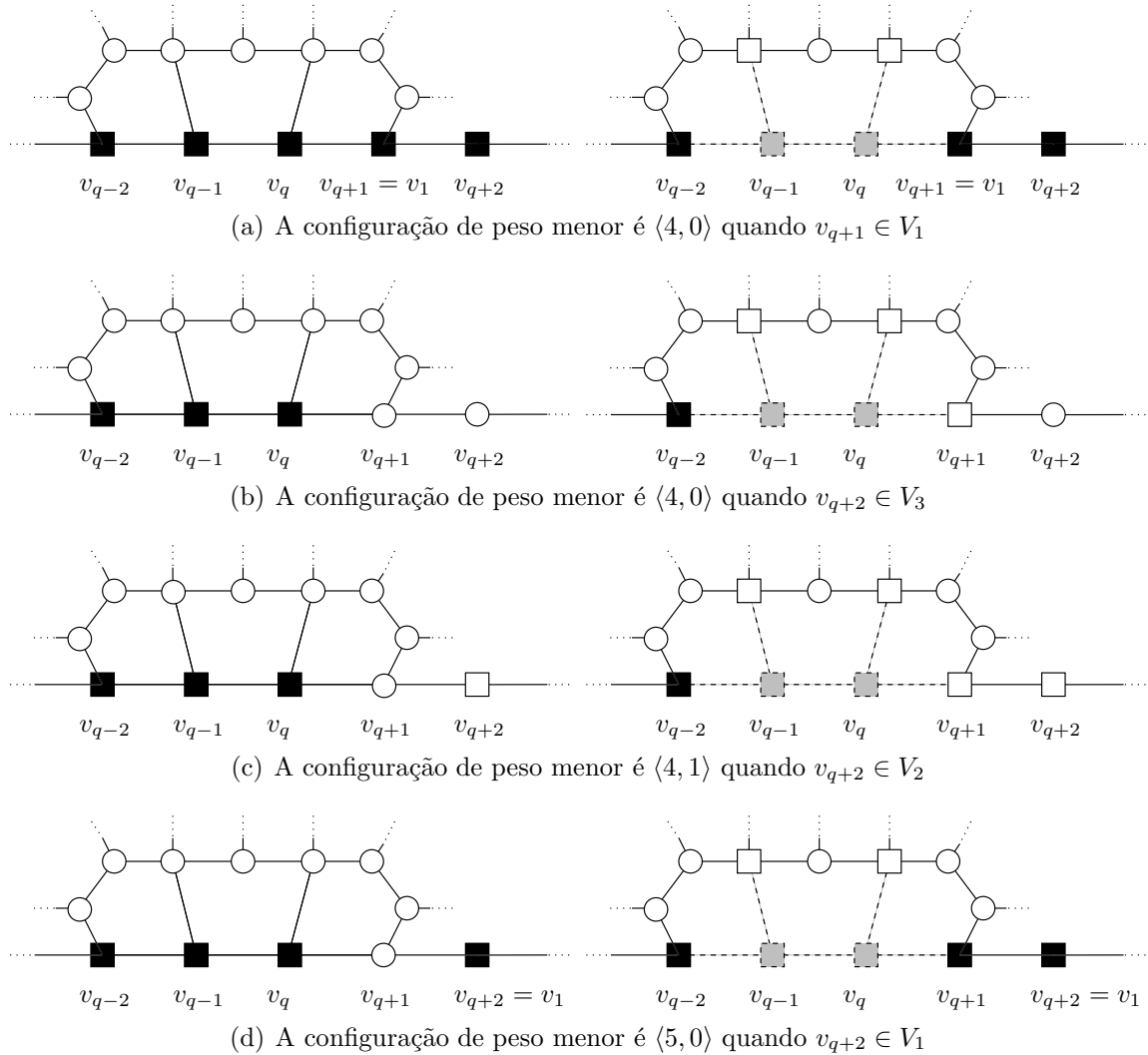


Figura 4.6: Remoção de  $v_{q-1}$  e  $v_q$

$G$  é pelo menos cinco e removemos apenas dois vértices de  $B$ , então certamente nenhum par de vértices de  $X$  é adjacente. Além disso,  $G$  é livre de cordas e de quase-cordas ruins. Então,  $v_{q-2}$  e  $v_{q+1}$  são os únicos vértices adjacentes aos vértices removidos que podem pertencer a  $X$  e ser ainda adjacentes a outros vértices de  $V_1 \cup V_2$ . Como  $q \geq 3$ , então  $v_{q-2} \in V_1$  e certamente não pertence a  $X$ . Se  $v_{q+1} \in V_1$  também, então  $q = r$  e todos os vértices de  $B$  pertencem a  $V_1$  (Figura 4.6(a)). Neste caso, nenhum vértice de  $X$  é adjacente a vértices de  $V_1 \cup V_2$  e a nova configuração obtida é  $\langle 4, 0 \rangle$ . Podemos então

supor que  $v_{q+1} \notin V_1$  e portanto  $v_{q+1} \in V_3$ . Lembramos que, nesse caso,  $v_{q+1}$  é o único vértice de  $X$  que pode talvez ser adjacente a um vértice de  $V_1 \cup V_2$ . Ademais, o único vizinho de  $v_{q+1}$  que pode pertencer a  $V_1 \cup V_2$  é  $v_{q+2}$ . Se  $v_{q+2} \in V_3$  (Figura 4.6(b)), então a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 0 \rangle$ . Se  $v_{q+2} \in V_2$  (Figura 4.6(c)), a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 1 \rangle$ , pois, apesar de  $v_{q+1}v_{q+2}$  ser uma adjacência entre vértices com listas de tamanho dois, removemos dois vértices coloridos. Finalmente, se  $v_{q+2} \in V_1$ , ou seja  $v_{q+2} = v_1$  (Figura 4.6(d)), colorimos  $v_{q+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_1$ . A configuração de peso menor obtida é  $\langle 5, 0 \rangle$ . Em qualquer dos casos, podemos aplicar a hipótese de indução à configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  de peso menor, obtendo assim uma lista-coloração que é trivialmente estendida a uma  $L$ -coloração de  $G$ .

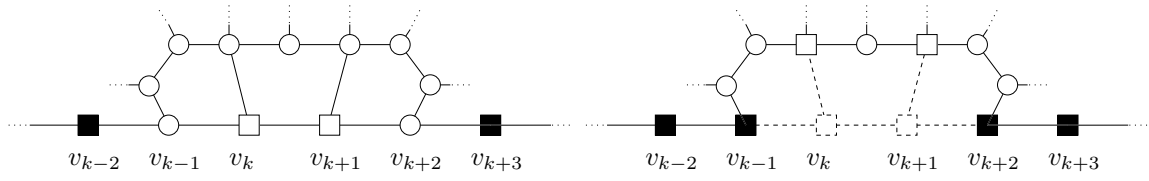
Note que apesar de termos considerado  $q \geq 5$  na redução acima, é suficiente exigir  $q \geq 3$  para que o raciocínio esteja correto.

### 4.3.2 Configurações $\langle 4, 1 \rangle$

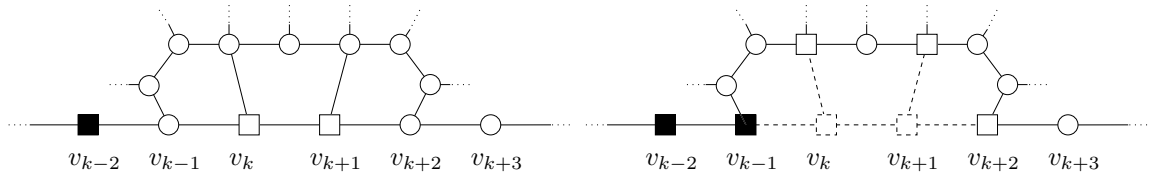
Se  $G$  não tem aresta especial, então  $(\tilde{G}, \tilde{B}, L)$  é  $\langle 4, 0 \rangle$  (e também  $\langle 6, 0 \rangle$ ) e aplicamos a redução anterior. Podemos então supor que existe uma aresta especial. Lembramos que essa aresta é denotada por  $v_kv_{k+1}$ . Então, ambos  $v_{k-1}$  e  $v_{k+2}$  pertencem a  $V_3$ , conforme ilustrado pela Figura 4.4 apresentada na página 91.

Considere primeiro o caso em que nem  $v_{k-2}$  nem  $v_{k+3}$  pertencem a  $V_2$ . Neste caso, os vértices coloridos e removidos são  $v_k$  e  $v_{k+1}$ , conforme ilustrado pela Figura 4.7. Colorimos  $v_k$  com uma cor arbitrária de sua lista e  $v_{k+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_k$ . Removemos ambos e removemos também as suas cores das listas de seus respectivos vizinhos. Seja  $X$  o conjunto dos vértices cujas listas foram reduzidas. Como a cintura de  $G$  é pelo menos cinco e removemos apenas dois vértices de  $B$ , então certamente nenhum par de vértices de  $X$  é adjacente. Além disso,  $G$  é livre de cordas e de quase-cordas ruins. Portanto, os únicos vértices de  $X$  que podem talvez ser adjacentes a vértices de  $V_1 \cup V_2$  são  $v_{k-1}$  e  $v_{k+2}$ . Ademais, os únicos vizinhos de  $v_{k-1}$  e  $v_{k+2}$  que podem pertencer a  $V_1 \cup V_2$  são, respectivamente,  $v_{k-2}$  e  $v_{k+3}$ . Pela hipótese do caso, nenhum deles pertence a  $V_2$ . Se  $v_{k-2} \in V_1$ , colorimos  $v_{k-1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_{k-2}$  (Figuras 4.7(a) e 4.7(b)). Analogamente, se  $v_{k+3} \in V_1$ , colorimos  $v_{k+2}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_{k+3}$  (Figuras 4.7(a) e 4.7(c)). A configuração de peso menor obtida possui no máximo dois vértices coloridos a mais. Além disso, não há mais aresta especial. Portanto, a configuração é  $\langle 6, 0 \rangle$ . Podemos então supor que ambos  $v_{k-2}$  e  $v_{k+3}$  pertencem a  $V_3$  (Figura 4.7(d)). Neste caso, nenhum vértice de  $X$  é adjacente a vértices de  $V_1 \cup V_2$  e a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 0 \rangle$ .

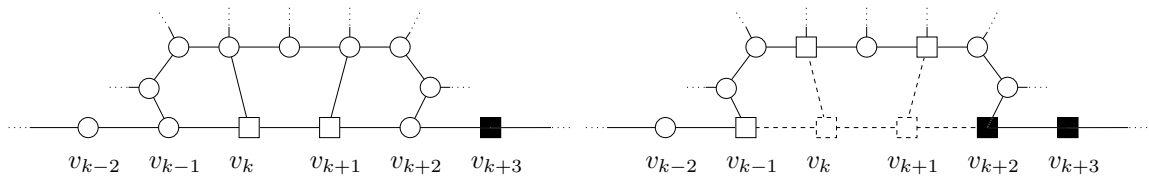
Considere agora o caso em que pelo menos um de  $v_{k-2}$  e  $v_{k+3}$  pertence a  $V_2$ . Ajuste a notação, se necessário, de forma que  $v_{k-2} \in V_2$ . Neste caso, nenhum dos cinco vértices



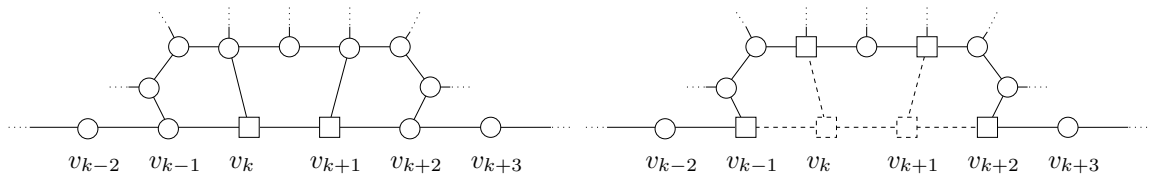
(a) A configuração de peso menor é  $\langle 6, 0 \rangle$  quando ambos  $v_{k-2}$  e  $v_{k+3}$  pertencem a  $V_1$



(b) A configuração de peso menor é  $\langle 5, 0 \rangle$  quando apenas  $v_{k-2}$  pertence a  $V_1$



(c) A configuração de peso menor é  $\langle 5, 0 \rangle$  quando apenas  $v_{k+3}$  pertence a  $V_1$



(d) A configuração de peso menor é  $\langle 4, 0 \rangle$  quando ambos  $v_{k-2}$  e  $v_{k+3}$  pertencem a  $V_3$

Figura 4.7: Remoção de  $v_k$  e  $v_{k+1}$  no caso em que nem  $v_{k-2}$  nem  $v_{k+3}$  pertence a  $V_2$

$v_{k-2}, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}$  pertence a  $V_1$ . Por hipótese,  $G[V_1]$  é conexo e, portanto,  $V_1$  é não vazio. Logo,  $B$  tem mais do que cinco vértices. O conjunto de vértices a ser removido depende da existência de uma face pentagonal contendo simultaneamente os vértices  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$ . A Figura 4.8 ilustra as duas únicas possibilidades de existência de uma tal face. Lembramos que uma tal face pentagonal não pode ter todos os vértices na face  $\tilde{B}$ , pois  $G$

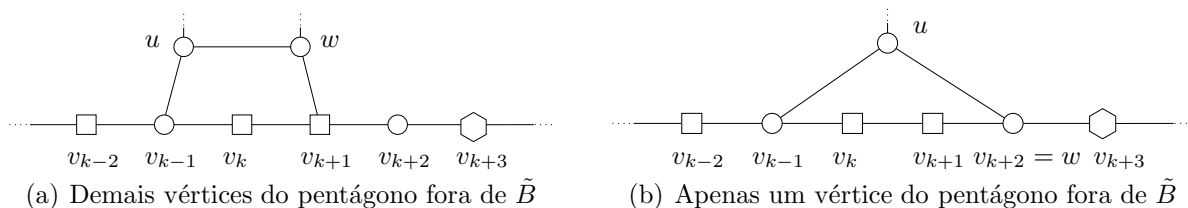


Figura 4.8: Faces pentagonais distintas contendo  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$

é livre de cordas. Analogamente, se uma tal face pentagonal tem apenas um vértice  $u$  fora de  $\tilde{B}$ , este deve ter como vizinhos  $v_{k-1}$  e  $v_{k+2}$ , caso contrário haveria uma quase-corda ruim com ambos os extremos,  $v_{k-2}$  e  $v_{k+1}$ , em  $V_2$ .

Suponha que exista uma face pentagonal contendo simultaneamente os vértices  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$ . Então, os vértices coloridos e removidos são  $v_{k-1}$  e  $v_{k-2}$ , conforme ilustrado pela Figura 4.9. Colorimos  $v_{k-1}$  com uma cor de sua lista distinta das duas de  $v_k$ , e colorimos  $v_{k-2}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_{k-1}$ . Removemos ambos e removemos também as suas cores das listas de seus respectivos vizinhos. Seja  $X$  o conjunto dos vértices cujas listas foram reduzidas. Note que a cor de  $v_{k-1}$  foi escolhida de forma a garantir que  $v_k \notin X$ . Além disso, o grau de  $v_k$  na nova configuração é um. Como sua lista ainda possui duas cores, podemos remover  $v_k$  e qualquer coloração da configuração de peso menor obtida pode ser estendida trivialmente. Como a cintura de  $G$  é pelo menos cinco e removemos apenas dois vértices de  $B$ , então certamente nenhum par de vértices de  $X$  é adjacente. Além disso,  $G$  é livre de cordas e de quase-cordas ruins. Portanto, o único vértice de  $X$  que pode talvez ser adjacente a um vértice de  $V_1 \cup V_2$  é  $v_{k-3}$ . Ademais, o único vizinho de  $v_{k-3}$  que pode pertencer a  $V_1 \cup V_2$  é  $v_{k-4}$ . Se  $v_{k-4} \in V_3$  (Figura 4.9(a)), então a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 0 \rangle$ . Se  $v_{k-4} \in V_2$  (Figura 4.9(b)), a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 1 \rangle$ , pois o número de vértices coloridos foi preservado,  $v_k$  foi removido e apenas uma nova aresta especial foi criada, a saber  $v_{k-3}v_{k-4}$ . Finalmente, se  $v_{k-4} \in V_1$ , ou seja  $v_{k-4} = v_q$  (Figura 4.9(c)), colorimos  $v_{k-3}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_q$ . A configuração de peso menor obtida é  $\langle 5, 0 \rangle$ .

Podemos então supor que não existe uma face pentagonal contendo simultaneamente os vértices  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$ . Então, os vértices coloridos e removidos são  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$ , conforme ilustrado pela Figura 4.10. Colorimos  $v_{k-1}$  com uma cor de sua lista distinta das duas de  $v_{k-2}$ ,  $v_k$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_{k-1}$ , e  $v_{k+1}$  com uma cor de



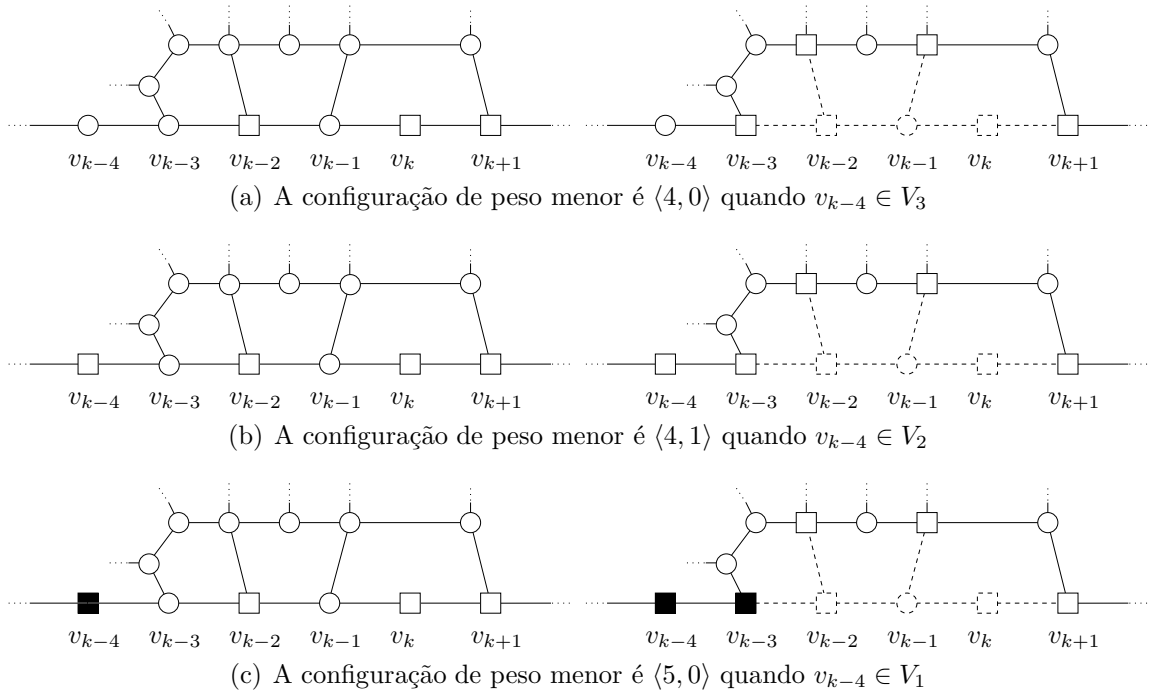


Figura 4.9: Remoção de  $v_{k-1}$  e  $v_{k-2}$  quando há face pentagonal contendo  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$

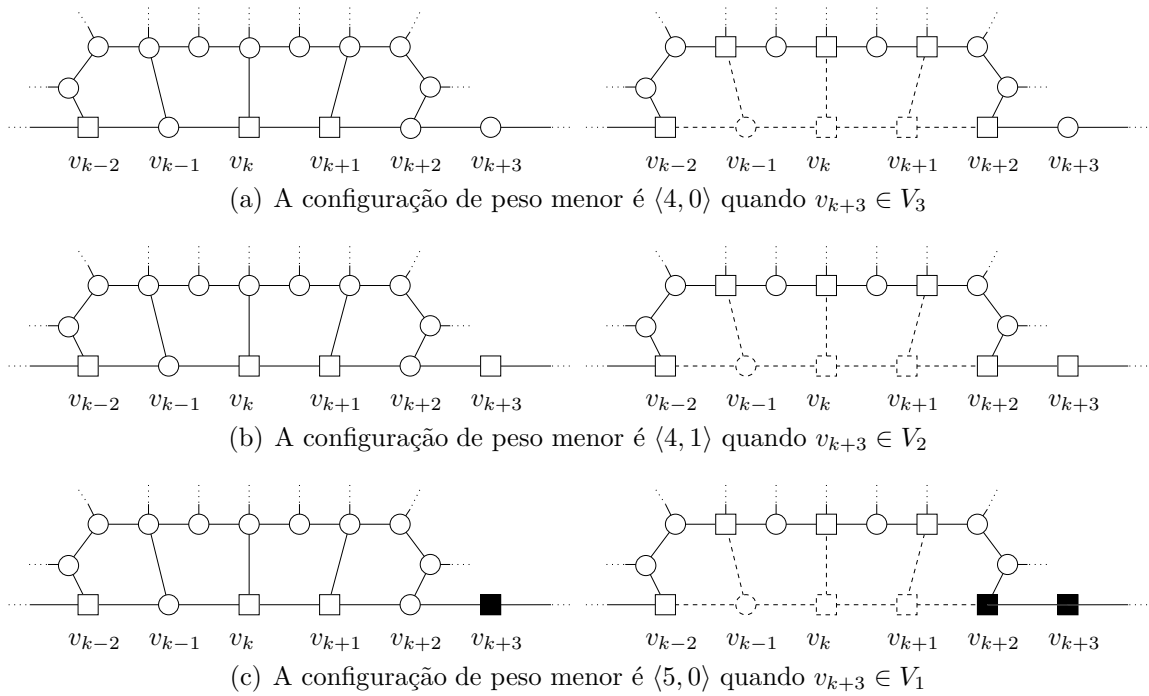


Figura 4.10: Remoção de  $v_{k-1}$ ,  $v_k$  e  $v_{k+1}$  quando não há face pentagonal que os contém

sua lista distinta da de  $v_k$ . Removemos os três vértices e removemos também as suas cores das listas de seus respectivos vizinhos. Seja  $X$  o conjunto dos vértices cujas listas foram reduzidas. Note que a cor de  $v_{k-1}$  foi escolhida de forma a garantir que  $v_{k-2} \notin X$ . Suponha que tenhamos um par de vértices de  $X$  adjacentes, digamos  $u$  e  $w$ . Como a cintura de  $G$  é pelo menos cinco, certamente um dos vértices, digamos  $u$ , é adjacente a  $v_{k-1}$  e o outro,  $w$ , é adjacente a  $v_{k+1}$ , conforme ilustrado pela Figura 4.8. Então,  $(u, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, w)$  forma em  $G$  um pentágono, que deve ser facial pois  $G$  é livre de pentágonos separadores. Isso é uma contradição à hipótese do caso. Deduzimos então que não existe pentágono  $(u, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, w)$  e, portanto, nenhum par de vértices de  $X$  é adjacente. Além disso,  $G$  é livre de cordas e de quase-cordas ruins. Portanto, o único vértice de  $X$  que pode talvez ser adjacente a um vértice de  $V_1 \cup V_2$  é  $v_{k+2}$ . Ademais, o único vizinho de  $v_{k+2}$  que pode pertencer a  $V_1 \cup V_2$  é  $v_{k+3}$ . Se  $v_{k+3} \in V_3$  (Figura 4.10(a)), então a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 0 \rangle$ . Se  $v_{k+3} \in V_2$  (Figura 4.10(b)), a configuração de peso menor obtida é  $\langle 4, 1 \rangle$ , pois o número de vértices coloridos foi preservado,  $v_k$  e  $v_{k+1}$  foram removidos e apenas uma nova aresta especial foi criada, a saber  $v_{k+2}v_{k+3}$ . Finalmente, se  $v_{k+3} \in V_1$ , ou seja  $v_{k+3} = v_1$  (Figura 4.10(c)), colorimos  $v_{k+2}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_1$ . A configuração de peso menor obtida é  $\langle 5, 0 \rangle$ .

Em qualquer dos diversos casos, podemos aplicar a hipótese de indução à configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  de peso menor, obtendo assim uma lista-coloração que é trivialmente estendida a uma  $L$ -coloração de  $G$ . Concluímos assim a demonstração, fazendo uso das reduções auxiliares demonstradas a seguir.

### 4.3.3 Reduções Auxiliares

As reduções auxiliares, de pentágonos separadores, quase-cordas ruins, cordas e vértices de corte, são todas imprescindíveis para a redução principal de configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$ . Todas elas seguem a mesma idéia geral de particionar  $\tilde{G}$  em dois submapas  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$  com poucos vértices em comum. O objetivo de obter essa tal partição é poder aplicar a hipótese de indução aos dois submapas separadamente de forma que as listas-colorações obtidas por indução formem, quando combinadas, uma lista-coloração de  $G$ . Para tal é necessário estabelecer uma ordem para a aplicação da indução nos dois submapas de forma que as cores obtidas por indução para os vértices comuns do primeiro mapa sejam transferidas para o segundo antes de aplicarmos a indução neste. Convencionaremos que  $\tilde{G}_0$  será o mapa no qual aplicaremos a indução primeiro. O aspecto mais importante das reduções auxiliares é garantir que poderemos aplicar a hipótese de indução a  $\tilde{G}_1$  após ter colorido os vértices comuns a  $G_0$ . Veremos em detalhes que em todos os casos isso será possível, ainda que tenhamos de colorir alguns poucos vértices a mais, além dos comuns a  $G_0$ .

### Polígonos Pequenos Separadores

Nesta seção apresentamos uma redução de pentágonos, hexágonos e heptágonos separadores. No entanto, ressaltamos que apenas a redução de pentágonos separadores é necessária na demonstração do Teorema 4.1.

Seja  $P$  um pentágono, hexágono ou heptágono separador de  $\tilde{G}$ . Então,  $P$  particiona naturalmente  $\tilde{G}$  em dois submapas,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , com apenas o polígono  $P$  em comum e ambos menores que  $G$ . Convencionamos que  $\tilde{G}_0$  é o mapa externo a  $P$ , isto é, aquele que contém a face externa  $\tilde{B}$ , bem como sua fronteira. Então,  $\tilde{G}_1$  é o mapa interno a  $P$ . A face externa  $\tilde{B}_0$  de  $\tilde{G}_0$  é a própria face externa  $\tilde{B}$  de  $\tilde{G}$ . Já a face externa  $\tilde{B}_1$  de  $\tilde{G}_1$  é a união de todas as faces de  $\tilde{G}$  que são também faces de  $\tilde{G}_0$ , ou seja, são todas as faces de  $\tilde{G}_0$ , exceto aquela delimitada por  $P$ .

Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $L_\ell$  a restrição de  $L$  a  $V(G_\ell)$ . Aplicamos a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_0, \tilde{B}_0, L_0)$  e assim obtemos uma  $L_0$ -coloração  $c_0$  de  $G_0$ . Em particular, todos os vértices de  $P$  recebem uma cor em  $c_0$ . Restringimos as listas dos vértices de  $P$  em  $L_1$  às suas respectivas cores em  $c_0$ , obtendo assim  $L'_1$ . Note que  $G_1$  tem cintura pelo menos cinco e, portanto,  $P$  não tem cordas. Assim, a restrição de  $L'_1$  aos vértices de  $P$  é uma coloração própria de  $G_1[V(P)]$ . Então, se  $P$  é um pentágono ou um hexágono,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$  é uma configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  e, por hipótese de indução, admite uma  $L'_1$ -coloração  $c_1$ . Alternativamente, se  $P$  é um heptágono, existe pelo menos um vértice  $v$  de  $P$  cujos vértices adjacentes em  $P$  têm cores distintas em  $L'_1$ . Seja  $L''_1$  a função lista obtida a partir de  $L'_1$  pela adição à lista de  $v$  das cores de seus dois vizinhos. Então,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L''_1)$  é uma configuração  $\langle 6, 0 \rangle$  e, por hipótese de indução, admite uma  $L''_1$ -coloração  $c_1$ . Pela definição de  $L''_1$ , temos que  $c_1$  é também uma  $L'_1$ -coloração, ou seja,  $c_0$  e  $c_1$  coincidem em  $P$ . Em qualquer dos casos, deduzimos que  $G$  tem uma  $L$ -coloração dada pela união de  $c_0$  e  $c_1$ .

### Quase-Cordas Ruins, Cordas e Vértices de Corte

Nesta seção mostraremos que é possível reduzir as quase-cordas ruins de  $B$ , as cordas de  $B$  e também os vértices de corte. Faremos um abuso de linguagem admitindo que um único vértice como um caminho de comprimento zero e extremos idênticos.

Seja  $P$  um caminho de  $G$  com ambos os extremos em  $B$  e que seja uma quase-corda ruim, uma corda ou um vértice de corte de  $B$ . O *índice* de um tal caminho  $P$  é dado pelo número de extremos de  $P$  que pertencem a  $V_1$ . Os Lemas 4.2, 4.3 e 4.4 a seguir demonstram que é possível reduzir  $P$ , seja qual for o seu índice. Vale lembrar que quando  $P$  é um único vértice, de corte, este tem índice no máximo um. Quando  $P$  for uma corda, seu índice também será no máximo um, pois toda aresta que une dois vértices de  $V_1$  pertence a  $B$ , por hipótese. Logo, se  $P$  tem índice dois, então certamente é uma quase-corda ruim.

LEMA 4.2

O passeio  $B$  é livre de quase-cordas ruins, cordas e vértices de corte com índice zero.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $B$  tenha uma quase-corda ruim, uma corda ou um vértice de corte  $P$  de índice zero. O caminho  $P$  naturalmente particiona  $\tilde{G}$  em dois submapas,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , com apenas os vértices e as arestas de  $P$  em comum. Vale lembrar que no caso particular em que  $P$  é um vértice de corte e este é comum a mais de dois blocos, há mais de uma partição  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$  possível. Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $S_\ell$  o grafo  $B \cap G_\ell$ , que, juntamente com  $P$ , compõem  $B_\ell$ , o passeio que delimita a face externa  $\tilde{B}_\ell$  de  $G_\ell$ . Dentre todos os vértices de corte, cordas e quase-cordas ruins de  $B$  de índice zero existentes, escolha um caminho  $P$  e a respectiva partição  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , de forma que  $G_0$  contenha todos os vértices de  $V_1$  e  $G_1$  seja minimal. O critério de escolha de  $P$ ,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$  garante que  $G_1$  é 2-conexo e, portanto,  $B_1$  é um ciclo. Sejam  $v_i$  e  $v_j$  os extremos de  $P$ , com  $v_i = v_j$  no caso em que  $P$  é apenas um vértice de corte. Ajuste a notação de forma que  $i < j$  e  $S_1 = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1}, v_j$ , conforme ilustrado na Figura 4.11. Como  $G$  tem

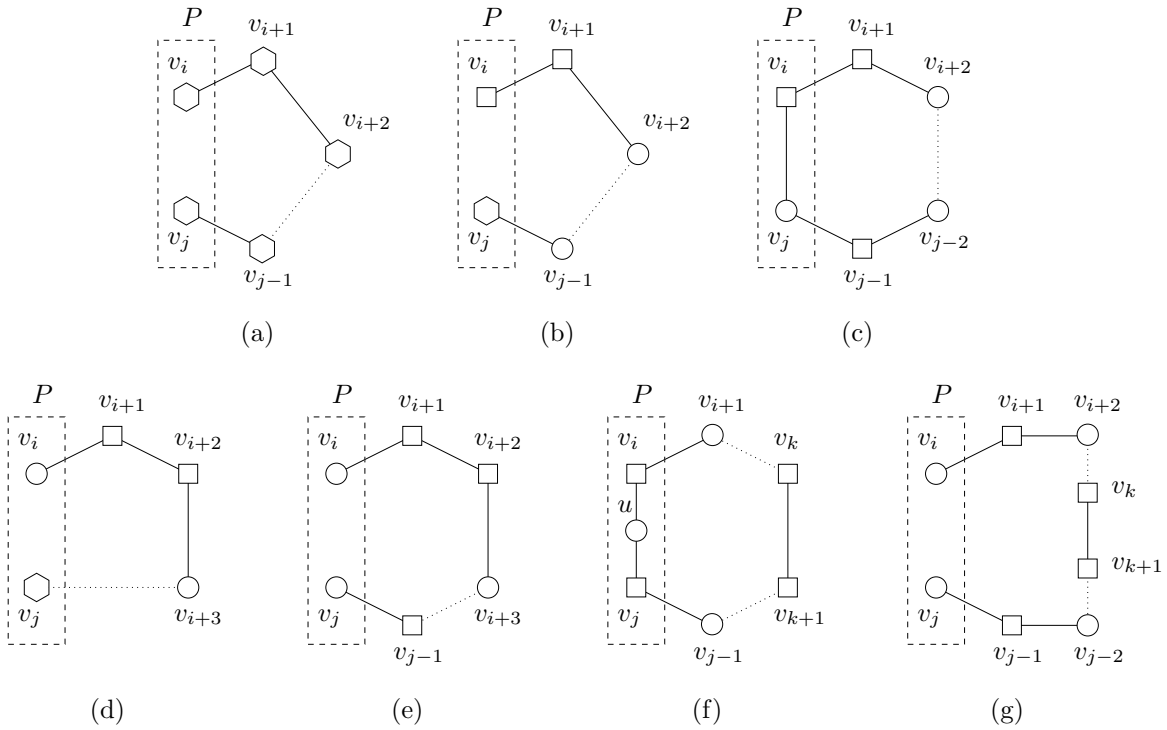


Figura 4.11: Algumas configurações de  $B_1$  quando  $P$  tem índice zero

cintura pelo menos cinco, temos que

$$j \geq i + 3, \tag{4.1}$$

com igualdade somente se  $P$  é uma quase-corda.

Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $L_\ell$  a restrição de  $L$  a  $V(G_\ell)$ . Aplicamos a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_0, \tilde{B}_0, L_0)$  e assim obtemos uma  $L_0$ -coloração  $c_0$  de  $G_0$ . Em particular, todos os vértices de  $P$  recebem uma cor em  $c_0$ . Restringimos as listas dos vértices de  $P$  em  $L_1$  às suas respectivas cores em  $c_0$ , obtendo assim  $L'_1$ .

De imediato, a minimalidade de  $G_1$  implica que o ciclo  $B_1$  não possui cordas com ambos os extremos em  $S_1$ . Suponha que exista uma corda  $e = uw$  em  $B_1$ . Então  $P$  é uma quase-corda de  $B$  e um dos extremos de  $e$ , digamos  $u$ , é o vértice interno de  $P$ . Além disso, o outro extremo de  $e$ ,  $w$ , pertence a  $V_3$ , caso contrário ou  $v_iuw$  ou  $v_juw$  é uma quase-corda ruim de índice zero de  $B_1$ , contradizendo a minimalidade de  $G_1$ . Portanto, todas as arestas de  $G_1$  que ligam dois vértices de  $V_1(L'_1) \cup V_2(L'_1)$  são arestas de  $B_1$ .

A restrição de  $L'_1$  a  $G_1[V_1(L'_1)]$  é uma coloração própria. Portanto, podemos aplicar a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$ , que será  $\langle 3, 1 \rangle$ , a menos que um dos vértices  $v_{i+1}$  e  $v_{j-1}$  pertença a  $V_2$ . Neste caso, precisamos colorir mais alguns vértices de  $G_1$  para que possamos então aplicar a hipótese de indução. Analisaremos a seguir os vários casos, de acordo com o nível de proximidade da aresta especial aos extremos de  $P$ .

Considere primeiro o caso em que  $v_i v_{i+1}$  é a aresta especial, conforme ilustrado nas Figuras 4.11(b) e 4.11(c). Colorimos  $v_{i+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_i$ . O conjunto dos vértices coloridos, composto pelos vértices de  $P$  e  $v_{i+1}$ , tem uma coloração própria. É possível que ainda não possamos aplicar a hipótese de indução se  $v_{j-1}$  também pertencer a  $V_2$ . Neste caso, colorimos  $v_{j-1}$ , com uma cor de sua lista distinta da de  $v_j$ . Novamente o conjunto dos vértices coloridos, que agora também inclui  $v_{j-1}$ , tem uma coloração própria. Em ambas as alternativas, seja  $L''_1$  a função lista assim obtida. Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L''_1)$  a vértices de  $V_2(L''_1)$ . No caso em que  $v_{j-1} \in V_3$  temos no máximo quatro vértices coloridos, dependendo do comprimento de  $P$ . No caso em que  $v_{j-1} \in V_2$ , então  $v_j \in V_3$  e  $P$  necessariamente é uma corda pois  $v_i$  é um dos extremos da aresta especial e, portanto,  $P$  não pode ser uma quase-corda ruim. Logo, também neste caso temos no máximo quatro vértices coloridos. Concluimos que  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L''_1)$  é  $\langle 4, 0 \rangle$  em ambos os casos. A mesma conclusão vale no caso análogo em que  $v_j v_{j-1}$  é a aresta especial.

Considere agora o caso em que  $v_{i+1} v_{i+2}$  é a aresta especial, conforme ilustrado nas Figuras 4.11(d) e 4.11(e). Colorimos  $v_{i+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_i$  e colorimos  $v_{i+2}$  com uma cor de sua lista distinta desta recém-atribuída a  $v_{i+1}$ . Vamos agora mostrar que o conjunto dos vértices coloridos, composto pelos vértices de  $P$ ,  $v_{i+1}$  e  $v_{i+2}$ , tem uma coloração própria. Para tal, basta mostrar que  $v_j$  não coincide com  $v_{i+2}$  e nem é adjacente a  $v_{i+2}$ . Os vértices  $v_j$  e  $v_{i+2}$  são distintos por (4.1). Ainda por (4.1), os vértices  $v_j$  e  $v_{i+2}$  não são adjacentes, a menos que  $P$  seja uma quase-corda. Neste caso, como esta deve ser ruim e de índice zero, e seu extremo  $v_i$  pertence a  $V_3$ , concluimos que  $v_j$  pertence a  $V_2$ . Então certamente  $v_j$  e  $v_{i+2}$  não são adjacentes pois há uma única aresta

especial. De fato, o conjunto dos vértices coloridos, composto pelos vértices de  $P$ ,  $v_{i+1}$  e  $v_{i+2}$ , tem uma coloração própria. É possível que ainda não possamos aplicar a hipótese de indução se  $v_{j-1}$  também pertencer a  $V_2$ . Neste caso, colorimos  $v_{j-1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_j$ . Novamente o conjunto dos vértices coloridos, que agora também inclui  $v_{j-1}$ , tem uma coloração própria. Em ambas as alternativas, seja  $L'_1$  a função lista assim obtida. Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L'_1)$  a vértices de  $V_2(L'_1)$ . No caso em que  $v_{j-1} \in V_3$  temos no máximo cinco vértices coloridos, dependendo do comprimento de  $P$ . No caso em que  $v_{j-1} \in V_2$ , então  $v_j \in V_3$  e  $P$  certamente não é uma quase-corda pois não é ruim, já que tem ambos os extremos em  $V_3$ . Logo, também neste caso temos no máximo cinco vértices coloridos. Concluimos que  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$  é  $\langle 5, 0 \rangle$  em ambos os casos. A mesma conclusão vale no caso análogo em que  $v_{j-1}v_{j-2}$  é a aresta especial.

Podemos então supor que a aresta especial, se existir, não incide em  $v_{i+1}$  e nem em  $v_{j-1}$ . Se  $P$  for uma quase-corda, então ambos seus extremos pertencem a  $V_2$  e ambos  $v_{i+1}$  e  $v_{j-1}$  pertencem a  $V_3$  (Figura 4.11(f)). Nesse caso, não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L'_1)$  a vértices de  $V_2(L'_1)$  e os vértices coloridos de  $L'_1$  têm uma coloração própria. Então,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$  é  $\langle 3, 1 \rangle$  e podemos aplicar a hipótese de indução. Podemos então supor que  $P$  é uma corda ou um vértice de corte. Neste caso, se  $v_{i+1}$  pertencer a  $V_2$  (Figura 4.11(g)), colorimos  $v_{i+1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_i$ . Analogamente, se  $v_{j-1}$  pertencer a  $V_2$  (Figura 4.11(g)), colorimos  $v_{j-1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_j$ . Seja  $L''_1$  a função lista assim obtida. Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L''_1)$  a vértices de  $V_2(L''_1)$  e os vértices coloridos de  $L''_1$  têm uma coloração própria. Então,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L''_1)$  é  $\langle 4, 1 \rangle$  e podemos aplicar a hipótese de indução.

Em todos os casos analisados conseguimos estender a  $L_0$ -coloração de  $G_0$  a uma  $L$ -coloração de  $G$ .  $\square$

### LEMA 4.3

*O passeio  $B$  é livre de quase-cordas ruins, cordas e vértices de corte com índice um.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $B$  tenha uma quase-corda ruim, uma corda ou um vértice de corte  $P$  de índice um. O caminho  $P$  naturalmente particiona  $\tilde{G}$  em dois submapas,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , com apenas os vértices e as arestas de  $P$  em comum. Vale lembrar que no caso particular em que  $P$  é um vértice de corte e este é comum a mais de dois blocos, há mais de uma partição  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$  possível. Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $S_\ell$  o grafo  $B \cap G_\ell$ , que, juntamente com  $P$ , compõem  $B_\ell$ , o passeio que delimita a face externa  $\tilde{B}_\ell$  de  $G_\ell$ . Dentre todos os vértices de corte, cordas e quase-cordas ruins de  $B$  de índice um existentes, escolha um caminho  $P$  e a respectiva partição  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , de forma que  $|V_1 \cap V(G_1)|$  seja mínimo e, em caso de empate,  $G_1$  seja minimal. O critério de escolha de  $P$ ,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$  garante que  $G_1$  é 2-conexo e, portanto,  $B_1$  é um ciclo. Sejam  $v_i$  e  $v_j$  os

extremos de  $P$ , com  $v_i = v_j$  no caso em que  $P$  é apenas um vértice de corte. Ajuste a notação de forma que  $v_i \in V_1$ ,  $i < j$  e  $S_1 = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ . Por hipótese,  $G[V_1]$  é conexo. Logo, para  $\ell = 0, 1$ ,  $G_\ell[V_1 \cap V(G_\ell)]$  é um caminho de  $S_\ell$  que contém  $v_i$ . Ademais, pela minimalidade de  $|V_1 \cap V(G_1)|$ , temos que

$$|V_1 \cap V(G_1)| \leq 3, \quad (4.2)$$

com igualdade somente se não há aresta especial.

Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $L_\ell$  a restrição de  $L$  a  $V(G_\ell)$ . Aplicamos a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_0, \tilde{B}_0, L_0)$  e assim obtemos uma  $L_0$ -coloração  $c_0$  de  $G_0$ . Em particular, todos os vértices de  $P$  recebem uma cor em  $c_0$ . Restringimos as listas dos vértices de  $P$  em  $L_1$  às suas respectivas cores em  $c_0$ , obtendo assim  $L'_1$ .

Afirmamos que só há uma corda  $e$  em  $B_1$  quando  $P$  é uma quase-corda e  $e$  liga o vértice interno de  $P$  a um vértice de  $V_3$ . Suponha, por absurdo, que exista uma corda  $e$  com ambos os extremos em  $S_1$ . Por hipótese,  $B$  não tem cordas de índice dois. Se nenhum extremo de  $e$  pertence a  $V_1$ , então  $e$  é uma corda de índice zero, uma contradição ao Lema 4.2. Se  $e$  tem um extremo em  $V_1$ , então  $e$  é uma corda de índice um, uma contradição à definição de  $P$  e  $G_1$ . Agora suponha, novamente por absurdo, que  $P$  seja uma quase-corda e  $e$  seja uma corda de  $B_1$  que liga o vértice interno  $u$  de  $P$  a um vértice  $w$  de  $V_1 \cup V_2$ , conforme ilustrado na Figura 4.12. Se  $w \in V_2$ , então  $v_j u w$  é uma quase-

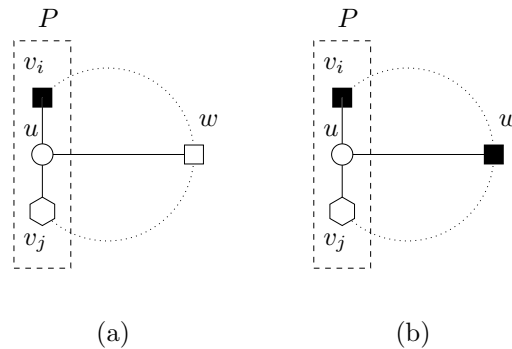


Figura 4.12: Corda ligando o vértice interno  $u$  de  $P$  a um vértice  $w$  de  $V_1 \cup V_2$

corda ruim de índice zero (Figura 4.12(a)), uma contradição ao Lema 4.2. Se  $w \in V_1$ , então  $v_j u w$  é uma quase-corda ruim de índice um (Figura 4.12(b)), uma contradição à definição de  $P$  e  $G_1$ . Então, de fato, toda corda  $e$  de  $B_1$  liga um vértice de  $V_3$  em  $S_1$  ao vértice interno de  $P$ . Deduzimos que todas as arestas de  $G_1$  que ligam dois vértices de  $V_1(L'_1) \cup V_2(L'_1)$  são arestas de  $B_1$ .

Afirmamos também que  $v_{j-1}$  não pertence a  $V_1$ . Suponha o contrário (Figura 4.13(a)). Por hipótese,  $v_j$  não pertence a  $V_1$ . Mas  $v_j$  é adjacente em  $B$  a  $v_{j-1}$ , o qual pertence a

$V_1$ ; logo,  $v_j \in V_3$ . Todos os vértices do caminho  $v_i v_{i+1} \dots v_{j-1}$  pertencem a  $V_1$ , conforme ilustrado pela Figura 4.13(a). De (4.2) e da restrição de cintura de  $G$  deduzimos que  $B_1$

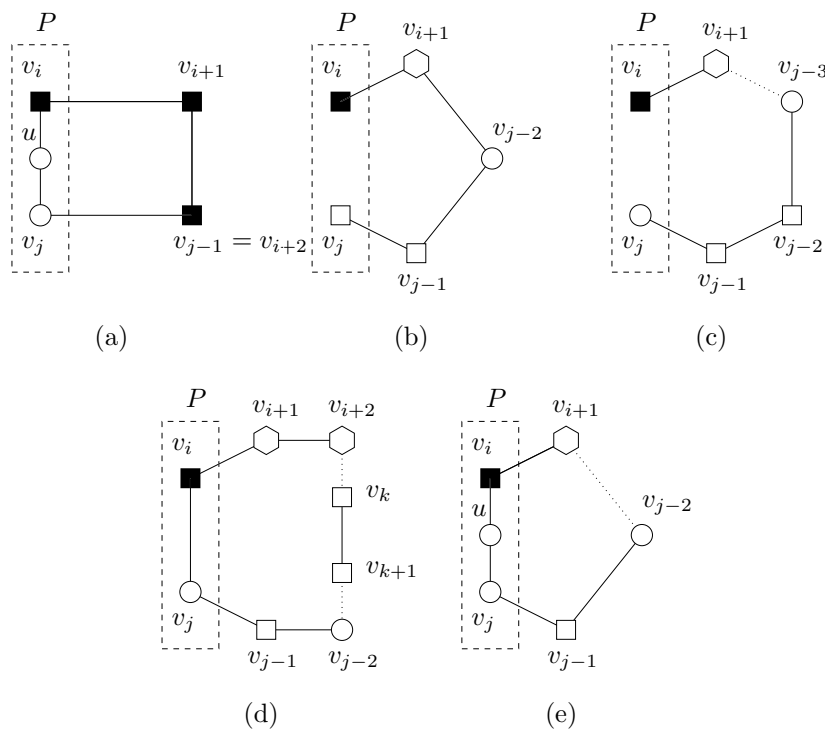


Figura 4.13: Algumas configurações de  $B_1$  quando  $P$  tem índice um

tem precisamente cinco vértices,  $P$  é uma quase-corda e não existe aresta especial. Mas, como  $v_j \in V_3$ , então a quase-corda  $P$  não é ruim, uma contradição.

Em resumo, todas as arestas de  $G_1$  que ligam dois vértices de  $V_1(L'_1) \cup V_2(L'_1)$  são arestas de  $B_1$  e  $v_{j-1}$  não pertence a  $V_1$ . Deduzimos a partir desses dois fatos que a restrição de  $L'_1$  a  $G_1[V_1(L'_1)]$  é uma coloração própria. Portanto, podemos aplicar a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$ . Por (4.2), a configuração  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$  será  $\langle 4, 1 \rangle$  ou  $\langle 5, 0 \rangle$ , a menos que  $v_{j-1}$  pertença a  $V_2$ . Neste caso, precisamos colorir mais alguns vértices de  $G_1$  para que possamos então aplicar a hipótese de indução. Analisaremos a seguir os vários casos, de acordo com o nível de proximidade da aresta especial aos extremos de  $P$ . Em todos os casos, a existência da aresta especial torna a inequação (4.2) estrita.

Considere primeiro o caso em que  $v_j v_{j-1}$  é a aresta especial, conforme ilustrado na Figura 4.13(b). Neste caso,  $v_{j-2} \in V_3$  e, portanto,  $v_j$  é o único vizinho colorido de  $v_{j-1}$ . Colorimos  $v_{j-1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_j$ . Seja  $L''_1$  a função lista assim obtida. Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L''_1)$  a vértices de  $V_2(L''_1)$  e os vértices coloridos de  $L''_1$  têm uma coloração própria. Além disso,  $L''_1$  possui no máximo cinco vértices coloridos, pois vale a inequação estrita em (4.2). Então,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L''_1)$  é  $\langle 5, 0 \rangle$



e podemos aplicar a hipótese de indução.

Considere agora o caso em que  $v_{j-1}v_{j-2}$  é a aresta especial, ilustrado na Figura 4.13(c). Então,  $v_{j-3} \in V_3$  e, portanto,  $v_j$  é o único vizinho colorido de  $v_{j-1}$  e  $v_{j-2}$  não tem vizinhos coloridos. Colorimos  $v_{j-1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_j$  e colorimos  $v_{j-2}$  com uma cor de sua lista distinta desta recém-atribuída a  $v_{j-1}$ . Seja  $L''_1$  a função lista assim obtida. Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L''_1)$  a vértices de  $V_2(L''_1)$  e os vértices coloridos de  $L''_1$  têm uma coloração própria. Além disso,  $L''_1$  possui no máximo seis vértices coloridos, pois vale a inequação estrita em (4.2). Então,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L''_1)$  é  $\langle 6, 0 \rangle$  e podemos aplicar a hipótese de indução.

Podemos então supor que a aresta especial, se existir, não incide em  $v_{j-1}$ . Continuamos no caso em que  $v_{j-1} \in V_2$ . Então, ambos  $v_j$  e  $v_{j-2}$  pertencem a  $V_3$ . Colorimos  $v_{j-1}$  com uma cor de sua lista distinta da de  $v_j$ . Seja  $L''_1$  a função lista assim obtida. Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L''_1)$  a vértices de  $V_2(L''_1)$ . Como  $v_{j-2} \in V_3$ , os vértices coloridos de  $L''_1$  têm uma coloração própria. Se  $P$  for uma quase-corda, e isto acontece somente se  $v_{j+1}v_{j+2}$  for a aresta especial, vale a inequação estrita em (4.2) e  $L''_1$  possui no máximo cinco vértices coloridos (Figura 4.13(e)). Podemos então supor que  $P$  não é uma quase-corda. Como  $v_i \in V_1$  e  $v_j \in V_3$ , então certamente,  $P$  é uma corda. Neste caso, por (4.2),  $L''_1$  possui no máximo cinco vértices coloridos, com igualdade somente se a aresta especial não existe (Figura 4.13(d)). Concluimos que, em ambos os casos,  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L''_1)$  é  $\langle 5, 0 \rangle$  ou  $\langle 4, 1 \rangle$  e podemos aplicar a hipótese de indução.

Em todos os casos analisados conseguimos estender a  $L_0$ -coloração de  $G_0$  a uma  $L$ -coloração de  $G$ .  $\square$

#### LEMA 4.4

*O ciclo  $B$  é livre de quase-cordas ruins com índice dois.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $B$  tenha uma quase-corda ruim  $P$  de índice dois. O caminho  $P$  naturalmente particiona  $\tilde{G}$  em dois submapas,  $\tilde{G}_0$  e  $\tilde{G}_1$ , com apenas os vértices e as arestas de  $P$  em comum. Pelos Lemas 4.2 e 4.3,  $G$ , e portanto  $G_0$  e  $G_1$ , são todos 2-conexos. Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $S_\ell$  o segmento de  $B$  que, juntamente com  $P$ , compõem  $B_\ell$ , o ciclo que delimita a face externa  $\tilde{B}_\ell$  de  $G_\ell$ . Sejam  $v_i$  e  $v_j$  os extremos de  $P$ . Ajuste a notação de forma que  $i < j$  e  $S_1 = v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ . Por hipótese,  $G[V_1]$  é um subgrafo conexo de  $B$  e  $\{v_i, v_j\} \subseteq V_1$ . Logo, todos os vértices de pelo menos um dos segmentos  $S_0$  ou  $S_1$  pertencem a  $V_1$ . Ajuste a notação de forma que  $V(S_0) \subseteq V_1$ . A cintura de  $G$  é pelo menos cinco. Então,  $S_0$  contém pelo menos quatro vértices. Deduzimos que  $|V_1 \cap V(G_1)| \leq 4$ , sendo que  $V_1 \cap V(G_1) = \{v_i, v_j\}$  quando existe a aresta especial (Figura 4.14(d)). Portanto, ou  $G_1[V_1 \cap V(G_1)]$  é  $S_1$  ou é composto por dois componentes conexos, ambos segmentos de  $S_1$  com no máximo três vértices, um contendo  $v_i$  e o outro contendo  $v_j$  (Figura 4.14).

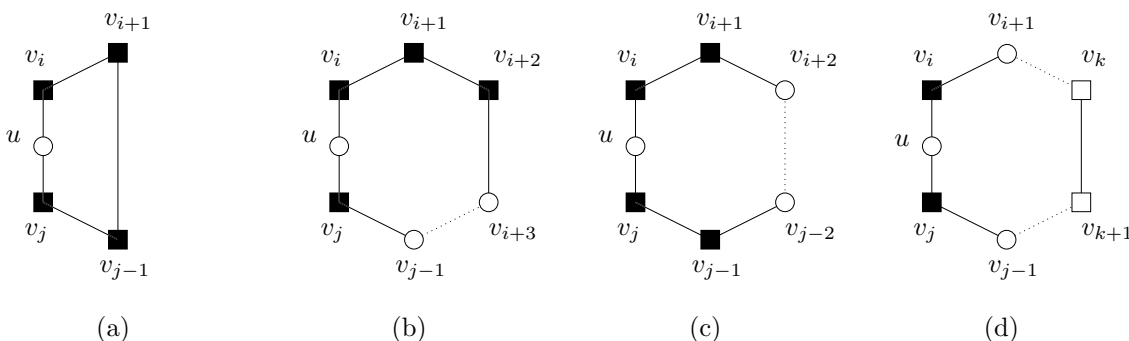


Figura 4.14: Algumas configurações de  $B_1$  quando  $P$  tem índice dois

Para  $\ell = 0, 1$ , denotamos por  $L_\ell$  a restrição de  $L$  a  $V(G_\ell)$ . Aplicamos a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_0, \tilde{B}_0, L_0)$  e assim obtemos uma  $L_0$ -coloração  $c_0$  de  $G_0$ . Em particular, todos os vértices de  $P$  recebem uma cor em  $c_0$ . Restringimos as listas dos vértices de  $P$  em  $L_1$  às suas respectivas cores em  $c_0$ , obtendo assim  $L'_1$ .

Afirmamos que só há uma corda  $e = uv$  em  $B_1$  quando esta liga o vértice interno  $u$  de  $P$  a um vértice de  $V_3$ . Suponha, por absurdo, que exista uma corda  $e$  com ambos os extremos em  $S_1$ . Se nenhum extremo de  $e$  pertence a  $V_1$ , então  $e$  é uma corda de índice zero, uma contradição ao Lema 4.2. Por hipótese,  $B$  não tem cordas de índice dois. Então,  $e$  é uma corda de índice um, uma contradição ao Lema 4.3. Agora suponha, novamente por absurdo, que  $e$  seja uma corda de  $B_1$  que liga o vértice interno  $u$  de  $P$  a um vértice  $w$  de  $V_1 \cup V_2$ , conforme ilustrado na Figura 4.15. Se  $w \in V_2$ , então ambas as quase-cordas

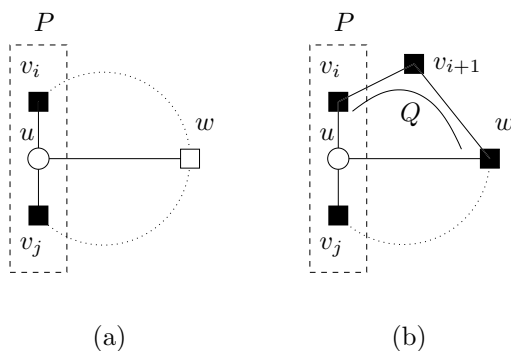


Figura 4.15: Corda ligando o vértice interno  $u$  de  $P$  a um vértice  $w$  de  $V_1 \cup V_2$

$v_iuw$  e  $v_juw$  são ruins e de índice um (Figura 4.15(a)), uma contradição ao Lema 4.3. Se  $w \in V_1$ , então pelo menos um dos dois segmentos de  $S_1$ , o de  $v_i$  a  $w$  ou de  $v_j$  a  $w$ , tem todos os seus vértices em  $V_1$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que o segmento  $Q$  de  $v_i$  a  $w$  tem todos os seus vértices em  $V_1$  (Figura 4.15(b)). Mas sabemos que  $Q$  tem

no máximo três vértices. Logo, a união do segmento  $Q$  e do caminho  $v_i, u, w$  forma um ciclo de tamanho quatro ou menos, uma contradição à restrição de cintura de  $G$ . Então, de fato, toda corda  $e$  de  $B_1$  liga um vértice de  $V_3$  em  $S_1$  ao vértice interno de  $P$ .

Deduzimos que todas as arestas de  $G_1$  que ligam dois vértices de  $V_1(L'_1) \cup V_2(L'_1)$  são arestas de  $B_1$ . Além disso, Não existe aresta em  $G_1$  ligando vértices de  $V_1(L'_1)$  a vértices de  $V_2(L'_1)$  e os vértices coloridos de  $L'_1$  têm uma coloração própria. Como  $|V_1 \cap V(G_1)| \leq 4$  se  $G$  não tem aresta especial e  $V_1 \cap V(G_1) = \{v_i, v_j\}$  caso contrário, concluímos que  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$  é  $\langle 5, 0 \rangle$  ou  $\langle 3, 1 \rangle$ . Portanto, podemos aplicar a hipótese de indução a  $(\tilde{G}_1, \tilde{B}_1, L'_1)$  e assim conseguimos estender a  $L_0$ -coloração de  $G_0$  a uma  $L$ -coloração de  $G$ .  $\square$

## 4.4 Observações Finais

No que tange a lista-colorações de configurações  $\langle s, t \rangle$ , sabemos que o valor seis é o limite superior para o valor de  $s$ . Na Figura 4.16 temos um exemplo de um grafo  $\langle 7, 0 \rangle$  que não admite uma lista-coloração de seus vértices. Indicamos, entre colchetes, as listas de cores

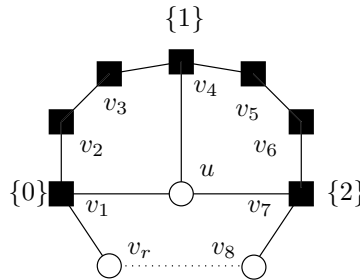


Figura 4.16: Uma configuração  $\langle 7, 0 \rangle$  que não admite uma lista-coloração de seus vértices.

dos vértices relevantes apenas. Estamos supondo que todos os vértices de  $V_3$  possuem a mesma lista de cores, especificamente,  $\{0, 1, 2\}$ . Então, nenhuma cor da lista de  $u$  pode ser utilizada pois seus três vizinhos foram coloridos com as três cores de sua lista.

Para lista-colorações de configurações  $\langle s, 1 \rangle$ , o limite superior para o valor de  $s$  é quatro. Na Figura 4.17 temos um exemplo de um grafo  $\langle 5, 1 \rangle$  que não admite uma lista-coloração de seus vértices. A convenção de notação e especificação das listas é a mesma de antes. Se atribuirmos a cor 0 a  $v_6$ , somos forçados a atribuir cor 1 a  $v_7$ , cor 0 para  $v_8$  e cor 1 a  $v_9$ . Nesse caso, nenhuma cor da lista de  $u$  pode ser utilizada pois seus três vizinhos foram coloridos com as três cores de sua lista. Por simetria, mesmo que a cor atribuída a  $v_6$  seja 1, o grafo não terá uma lista coloração.

Por outro lado, estes não são limites inferiores. Sabemos, por exemplo, que o teorema continua válido se mudarmos a hipótese para admitir configurações  $\langle 5, 0 \rangle$  e  $\langle 3, 1 \rangle$  ao invés

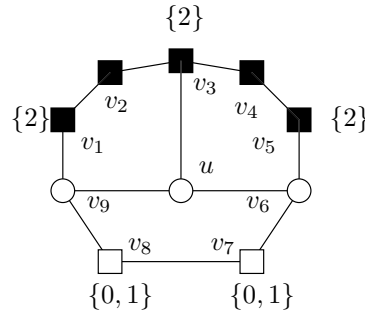


Figura 4.17: Uma configuração  $\langle 5, 1 \rangle$  que não admite uma lista-coloração de seus vértices.

de  $\langle 6, 0 \rangle$  e  $\langle 4, 1 \rangle$ . Para tal, basta fazermos alguns ajustes na demonstração apresentada. O mais importante dos ajustes é que, nessa nova hipótese, reduzimos apenas as *cordas ruins*, isto é, aquelas com um extremo em  $V_1 \cup V_2$  ou em um vértice de  $V_3$  que é adjacente em  $B$  a um dos extremos da aresta especial. Há ainda indícios de que seja possível admitir na hipótese configurações  $\langle 4, 0 \rangle$  e  $\langle 1, 1 \rangle$ . No entanto, essa mudança já requer adaptações mais substanciais na demonstração. Em particular, as definições de cordas e quase-cordas ruins devem ser ainda mais restritas.

# Capítulo 5

## Conclusão

Introduzimos nesta tese, no Capítulo 2, o conceito de grafos fluxo-críticos. Este é uma analogia ao conceito de grafos cor-críticos baseada na relação de dualidade que existe entre os dois problemas para grafos imersíveis no plano. Estudamos duas classes de grafos fluxo-críticos em particular, os aresta-críticos e os vértice-críticos. Vimos que todo contra-exemplo mínimo para qualquer uma das Conjeturas de Tutte é vértice-crítico ou aresta-crítico, fato que nos motivou a estudar propriedades de grafos nessas duas classes. Apresentamos nos Teoremas 2.13 e 2.17 caracterizações de grafos nessas classes relativas à remoção e à adição de arestas: os grafos aresta-críticos são aqueles em que a remoção de qualquer aresta decrementa o número de fluxo do grafo e os vértice-críticos são aqueles em que a operação de adição de qualquer aresta decrementa o número de fluxo do grafo. Com base nessas caracterizações e no Lema 2.11, demonstramos os Teoremas 2.15 e 2.18, análogos para grafos aresta-críticos e vértice-críticos ao Teorema de Dirac para grafos cor-críticos. Estes dois Teoremas, por sua vez, nos permitiram mostrar que contra-exemplos mínimos para as Conjeturas dos 5-Fluxos, dos 4-Fluxos e dos 3-Cortes Separadores são todos 3-conexos. Destes três resultados, apenas a demonstração de 3-conexidade de contra-exemplos mínimos para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores parece ser nova, mas é interessante observar que esta técnica nos permitiu demonstrar os três resultados de forma homogênea. No âmbito mais técnico, citamos ainda como contribuição deste capítulo o Lema 2.11 que afirma que todo grafo que tem um  $k$ -fluxo tem em particular um  $k$ -fluxo em que o peso de uma aresta especificada é um.

No Capítulo 3, demonstramos o Teorema 3.1 que afirma, entre outras coisas, que em todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-Cortes Separadores todo vértice tem grau cinco, exceto talvez no máximo três de grau três, e que todo corte pequeno, com três a sete arestas, é um pente. Segue destes fatos que os contra-exemplos mínimos para esta conjetura são 8-ciclicamente-aresta-conexos, 3-conexos e 4-ciclicamente-conexos, propriedades até então desconhecidas. O Teorema 3.1 pode ser visto como uma dualização

da redução apresentada na Seção 4.3.3, mas com uma diferença importante: o Teorema 3.1 vale para grafos em geral e não apenas para planares. De fato, a observação da existência dessa redução, que ocorreu cronologicamente antes da demonstração do Teorema 3.1, serviu de inspiração para o nosso estudo de redução de cortes pequenos não triviais a pentes. Uma outra importante fonte de inspiração para a demonstração do Teorema 3.1 foi a demonstração de Kochol [15] de que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 5-Fluxos é 6-ciclicamente-aresta-conexo. A demonstração de Kochol se baseia na mesma idéia que usamos no Teorema 3.1, a de buscar combinar os fluxos obtidos nas duas  $C$ -contrações de um corte pequeno  $C$  para obter um fluxo para o grafo original.

Em nossa primeira versão da demonstração do Teorema 3.1, usávamos freqüentemente a idéia de contar o número de 3-orientações não similares em cada  $C$ -contração do corte  $C$  para concluir, usando o Princípio da Casa do Pombo, a existência de uma orientação do corte viável em ambas as  $C$ -contrações. Na versão aqui apresentada conseguimos restringir o uso desta técnica à redução dos 7-cortes. O aspecto interessante desta nova versão é que traz à tona mais propriedades estruturais das contrações de cortes pequenos, em particular dos de tamanho cinco e seis. Isso tornou a nova versão bem mais simples e mais legível que a primeira e nos dá esperança de que seja possível melhorar a redução de 7-cortes de forma parecida. Ainda assim, a demonstração do Teorema 3.1 apresentada nesta tese é bastante longa e complicada. Traz muita repetição de idéias, indício forte de que é possível melhorar a fatoração das demonstrações. No entanto, várias de nossas tentativas em melhor fatorar os lemas nos levaram apenas a lemas de enunciado e demonstração muitos complexos, que comprometem a legibilidade da demonstração.

No Capítulo 4 apresentamos uma nova demonstração do Teorema de Grötzsch que não depende da utilização da Fórmula de Euler, como ocorre na demonstração original. A primeira demonstração com tal característica foi dada por Thomassen [26], que considerou apenas configurações  $\langle 6, 0 \rangle$ . Em nossa demonstração seguimos a mesma idéia de Thomassen, mas consideramos configurações  $\langle 4, 1 \rangle$  além das configurações  $\langle 6, 0 \rangle$  em nossa hipótese. A inclusão de configurações  $\langle 4, 1 \rangle$  na hipótese parece permitir uma descrição mais precisa dos vários casos a serem tratados, resultando assim em uma demonstração mais fácil de acompanhar e mais crível, apesar de mais longa. Assim, acreditamos que a demonstração apresentada neste capítulo é uma contribuição importante para o estudo do problema de lista-coloração de configurações  $\langle s, t \rangle$ . Observamos ainda que esta demonstração dá um algoritmo polinomial para encontrar uma 3-coloração de vértices de grafos planares livres de triângulos.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. A. Aksionov. On the extension of the 3-coloring of planar graphs (in Russian). *Diskret Analiz.*, 16:3–19, 1974.
- [2] K. Appel and W. Haken. Every map is four colorable, Part I: Discharging. *Illinois J. Math.*, 21:429–490, 1977.
- [3] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every map is four colorable, Part II: Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21:491–567, 1977.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier North Holland, 1976.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [6] L. M. de Almeida e Silva. Fluxos inteiros em grafos. Master’s thesis, Departamento de Ciência da Computação – UNICAMP, 1991. Em Português.
- [7] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1996.
- [8] H. Grötzsch. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, 8:109–120, 1958.
- [9] B. Grünbaum. Grötzsch’s Theorem on 3-colorings. *Michigan Math Journal*, 10:303–310, 1963.
- [10] P. J. Heawood. Map-Color Theorem. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2:193–200, 1890.
- [11] F. Jaeger. On nowhere-zero flows in multigraphs. In *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference*, volume 15, pages 373–378. Utilas Math., Winnipeg, 1976.
- [12] F. Jaeger. Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 26:205–216, 1979.

- [13] P. A. Kilpatrick. *Tutte's First Colour-Cycle Conjecture*. PhD thesis, University of Cape Town, 1975.
- [14] M. Kochol. Superposition and constructions of graphs without nowhere-zero  $k$ -flows. *Europ. J. Combinatorics*, 23:281–306, 2002.
- [15] M. Kochol. Reduction of the 5-flow conjecture to cyclically 6-edge-connected snarks. *J. Combin. Theory Ser. B*, 90:139–145, 2004.
- [16] M. Kochol. Restrictions on smallest counterexamples to the 5-flow conjecture. *Combinatorica*, 1:83–89, 2006.
- [17] U. S. R. Murty. Comunicação pessoal.
- [18] N. Robertson, D. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas. The four color theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70:2–44, 1997.
- [19] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Tutte's edge colouring conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70:166–183, 1997.
- [20] P. D. Seymour. Nowhere-zero 6-flows. *J. Combin. Theory Ser. B*, 30:130–135, 1981.
- [21] P. D. Seymour. Nowhere-zero flows. In R. L. Graham and L. L. M. Grötschel, editors, *Handbook of Combinatorics*, chapter 4, pages 289–299. Elsevier, 1995.
- [22] R. Steinberg. Grötzsch's theorem dualized. Master's thesis, University of Waterloo, 1976.
- [23] R. Steinberg and D. H. Younger. Grötzsch's Theorem for the projective plane. *Ars Combinatoria*, 28:15–31, 1989.
- [24] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62:180–181, 1994.
- [25] C. Thomassen. Grötzsch's 3-colour theorem and its counterpart for the torus and the projective plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62:268–279, 1994.
- [26] C. Thomassen. A short list colour proof of Grötzsch's Theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 88:189–192, 2003.
- [27] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Can. J. Math.*, 6:80–91, 1954.



- [28] W. T. Tutte. On the algebraic theory of graph colorings. *J. Combin. Theory*, 1:15–50, 1966.
- [29] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [30] D. H. Younger. Integer flows. *J. Graph Theory*, 7:349–357, 1983.
- [31] C.-Q. Zhang. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*. Marcel Dekker, 1997.

# Índice Remissivo

- C*-contração, 38
- X*-contração, 37
  - de  $S$ , 38
  - própria, 38
- $k$ -cíclicamente
  - aresta-conexo, 31
  - conexo, 31
- $k$ -coloração
  - de faces, 1
  - de vértices, 2
- $k$ -fluxo, 3
  - modular, 2
    - parcial, 3
    - suporte, 3
  - parcial, 3
  - suporte, 3
- 3-núcleo, 76
- 3-orientação, 5
  - $C$ -similar, 44
  - de 5-corte
    - aresta minoritária, 50
  - de 6-corte
    - $C$ -orientada, 53
    - equipartição, 53
  - de 7-corte
    - arestas compatíveis, 61
    - arestas incompatíveis, 61
    - arestas minoritárias, 61
    - viável, 44
- 4-núcleo, 76
- configuração  $\langle s, t \rangle$ , 86
- índice de caminho, 99
- aresta especial, 90
- corda, 91
- peso, 90
- quase-corda, 91
  - extremos, 91
  - ruim, 91
- Conjetura
  - dos 3-Cortes Separadores, 6, 29, 36
  - dos 3-Fluxos, 5
  - dos 4-Fluxos, 4, 15, 29
  - dos 5-Fluxos, 4, 15, 29
  - dos Três 3-Cortes, 6, 36
- corte
  - de arestas, 3
  - especial segundo  $T$ , 41
  - praias de um, 5
  - que separa  $S$ , 5
  - trivial, 5
- cor da face, 1
- expansão, 45
- fluxo líquido
  - em um corte, 4
  - em um vértice, 2
- função peso, 2
- grafo
  - $L$ -colorável, 85
  - $k$ -lista-colorável, 85
  - de compatibilidades, 61

- de incompatibilidades, 61
- grafos críticos
  - $k$ -aresta-críticos, 12
  - $k$ -vértice-críticos, 12
  - aresta-críticos, 8, 12
    - propriedades, 23
  - cor-críticos, 8, 12
    - propriedades, 17
  - fluxo-críticos, 8, 12
  - vértice-críticos, 8, 12
    - propriedades, 27
- Lema
  - da Contagem, 75
  - da Divisão, 41
  - da Multiplicidade, 46
  - da Quádrupla, 72
  - da Regularidade, 41
- lista-coloração, 85
  - função lista, 85
  - lista de um vértice, 85
- minor*, 4
- número
  - cromático, 12
  - de fluxo, 8
- operação de redução, 12
- penete, 31
  - cabo de um, 31
- pentetes, 8
  - pequenos, 33
- peso, 2
- polígono, 87
  - facial, 87
  - separador, 87
- tamanho de grafo, 15, 31
- Teorema
  - das Cinco Cores de Heawood, 1
  - das Quatro Cores, 1
  - de Dirac, 8, 25, 28
  - de Grötzsch, 2, 87
  - Principal, 31
- trilha  $\varphi$ -orientada, 18
- vértice
  - colorido, 85
  - divisível segundo  $T$ , 41
  - divisão de, 40