

# Grafos Pfaffianos e Problemas Relacionados

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por Alberto Alexandre Assis Miranda e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 26 de outubro de 2009.



Cláudio Leonardo Lucchesi (Orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Miranda, Alberto Alexandre Assis

M672g Grafos pfaffianos e problemas relacionados/Alberto Alexandre  
Assis Miranda -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Cláudio Leonardo Lucchesi

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Computação.

1.Teoria dos grafos. 2.Teoria dos casamentos. 3.Teoria da  
computação. I. Lucchesi, Cláudio Leonardo. II. Universidade Estadual  
de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Título em inglês: Pfaffian graphs and related problems

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Graph theory. 2. Matching theory. 3. Theory of  
computation

Área de concentração: Matemática Discreta e Combinatória

Titulação: Doutor em Ciência da Computação

Banca examinadora: Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi (IC - UNICAMP)  
Prof. Dr. U. S. R. Murty (University of Waterloo)  
Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter (NCE – UFRJ)  
Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi (IME – USP)  
Prof. Dr. Orlando Lee (IC – UNICAMP)

Data da defesa: 26/10/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Ciência da Computação

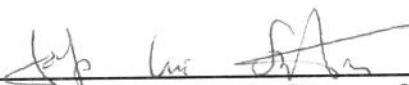
## TERMO DE APROVAÇÃO

Tese Defendida e Aprovada em 26 de outubro de 2009, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



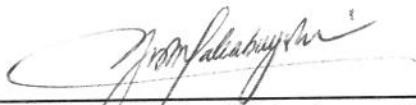
---

**Prof. Dr. U. S. R. Murty**  
University of Waterloo



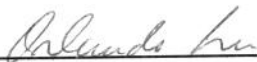
---

**Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter**  
NCE / UFRJ



---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Yoshiko Wakabayashi**  
IME / USP



---

**Prof. Dr. Orlando Lee**  
IC / UNICAMP



---

**Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi**  
IC / UNICAMP

# Grafos Pfaffianos e Problemas Relacionados

Alberto Alexandre Assis Miranda<sup>1</sup>

outubro de 2009

## Banca Examinadora:

- Cláudio Leonardo Lucchesi (Orientador)
- U. S. R. Murty  
University of Waterloo
- Jayme Luiz Szwarcfiter  
NCE - UFRJ
- Yoshiko Wakabayashi  
IME - USP
- Orlando Lee  
IC - UNICAMP
- Marcelo Henriques de Carvalho (suplente)  
FACOM - UFMS
- João Meidanis (suplente)  
IC - UNICAMP

---

<sup>1</sup>Suporte financeiro de: Bolsa da FAPESP (processo 05/04426-6) 2006–2009.

# Resumo

A área de grafos Pfaffianos apresenta muitos problemas em aberto. Nesta tese resolvemos dois problemas sobre grafos Pfaffianos. O primeiro problema resolvido é a obtenção de um algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos. Além disso, estendemos tanto o algoritmo como a caracterização de grafos quase-bipartidos Pfaffianos para a classe dos grafos meio-bipartidos. O segundo resultado é a obtenção de vários resultados estruturais básicos sobre grafos  $k$ -Pfaffianos. Utilizando esses resultados, obtivemos um contra-exemplo para a conjectura de Norine, que afirma que o número Pfaffiano de todo grafo é uma potência de quatro: apresentamos um grafo cujo número Pfaffiano é 6.

# Abstract

The area of Pfaffian graphs contains many open problems. In this thesis, we solve two problems related to Pfaffian graphs. The first result is a polynomial time algorithm to recognize near-bipartite Pfaffian graphs. Moreover, we extend this algorithm and the characterization of near-bipartite Pfaffian graphs to the class of half-bipartite graphs. The second result is obtaining several basic structural results concerning  $k$ -Pfaffian graphs. Using these results, we obtained a counter-example to Norine's conjecture, which states that the Pfaffian number of a graph is always a power of four: we present a graph whose Pfaffian number is 6.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e à minha irmã, pelo amor que é a base para eu ser o que sou hoje.

Agradeço à minha namorada, por ser minha carinhosa companheira, mesmo com a distância.

Agradeço aos meus amigos, e em especial à minha amiga Cândida pelos conselhos e ajuda.

Agradeço aos professores Murty, Marcelo, Orlando, Cid e ao Luidi pelas produtivas conversas.

Agradeço aos professores e funcionários do Instituto de Computação, pela ajuda prestada sempre que precisei, e pelo clima amigável.

Agradeço ao Professor Murty pelas valiosas observações que possibilitaram aperfeiçoar esta tese.

Agradeço à Fapesp pela bolsa.

Em especial, agradeço ao meu orientador Lucchesi pela grande amizade, pelas incontáveis horas de ajuda, pelos conselhos, pela diversão que foi trabalhar com ele e por me ensinar a pesquisar. Muito obrigado, Lucchesi. Felicidades, e muitos outros teoremas.

# Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Agradecimentos	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Grafos Pfaffianos . . . . .	1
1.1.1 Matrizes Antissimétricas e Pfaffiano . . . . .	2
1.1.2 Permanentes e Emparelhamentos Perfeitos . . . . .	4
1.1.3 Emparelhamentos Máximos . . . . .	5
1.1.4 Grafos $k$ -Pfaffianos . . . . .	5
1.1.5 Problemas de Grafos Pfaffianos . . . . .	7
1.2 Definições e Pré-Requisitos . . . . .	9
1.2.1 Grafos Pfaffianos . . . . .	9
1.2.2 Grafos $k$ -Pfaffianos . . . . .	17
1.3 Resultados Anteriores e Resultados da Tese . . . . .	19
1.4 Organização da Tese . . . . .	19
1.5 Novos Resultados Básicos . . . . .	20
1.5.1 Grafos Pfaffianos e seus Subgrafos Pfaffianos . . . . .	20
1.5.2 Contrações e Cortes Justos em Grafos $k$ -Pfaffianos . . . . .	23
<b>2 Grafos Quase-Bipartidos</b>	<b>25</b>
2.1 Algoritmo para Quase-Bipartidos . . . . .	25
2.2 Grafos Meio-Bipartidos . . . . .	26
2.3 Certificados para o Algoritmo . . . . .	28
2.4 Generalizações do Algoritmo . . . . .	29
<b>3 Grafos <math>k</math>-Pfaffianos</b>	<b>31</b>
3.1 Composição de Grafos Pfaffianos . . . . .	33



3.1.1	Composição de Orientações Pfaffianas . . . . .	33
3.1.2	O Grafo $G_{21}$ é 6-Pfaffiano e o grafo $G_{19} - e$ é 4-Pfaffiano . . . . .	36
3.2	Grafos 4-Pfaffianos . . . . .	37
3.2.1	Unicidade da Matriz Assinatura . . . . .	37
3.2.2	O Grafo $G_{19}$ não é 4-Pfaffiano . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>42</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>

# Lista de Tabelas

1.1	Matriz assinatura de $D$ . . . . .	7
-----	------------------------------------	---

# Lista de Figuras

1.1	O cubo e seus emparelhamentos perfeitos. . . . .	2
1.2	As 4 orientações da 4-dupla Pfaffiana $((D_1, D_2, D_3, D_4), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$ do $K_{3,3}$ . . . . .	6
1.3	Um grafo quase-bipartido e um grafo meio-bipartido . . . . .	11
1.4	O grafo orientado $D_1$ e seu grafo similar $D_1 \otimes C'$ . . . . .	15
1.5	Prova do Teorema 1.15. . . . .	15
1.6	Prova do Teorema 1.15. . . . .	17
2.1	Duas representações de uma $K_4$ -decoreção do $K_{3,3}$ . . . . .	28
2.2	Grafos $K_{3,3}$ , $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ citados no Teorema 2.6. . . . .	29
3.1	Os grafos $G_{19}$ e $G_{21}$ . . . . .	32
3.2	Decomposição de $K_{3,3} - S$ em dois $P_4$ 's, onde $S$ é um conjunto de três arestas. . . . .	36

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Grafos Pfaffianos

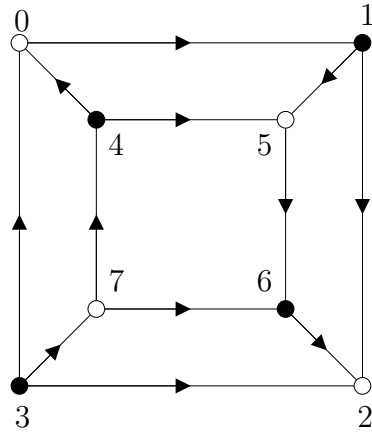
A definição de grafo Pfaffiano deriva da ideia de Tutte de usar o conceito de Pfaffiano na Teoria de Emparelhamentos. Em seu livro “Graph Theory As I Have Known It” [22], ele descreve como chegou à ideia de usar os Pfaffianos para determinar uma fórmula para o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo. Apesar de não ter sido bem sucedido em encontrar essa fórmula, Tutte conseguiu utilizar identidades envolvendo Pfaffianos para demonstrar o seu teorema famoso que caracteriza grafos que têm emparelhamentos perfeitos [21].

Seja  $D$  um grafo orientado. Se  $u$  e  $v$  são vértices de  $D$ , então  $uv$  representa a aresta que liga  $u$  e  $v$ , com origem  $u$  e destino  $v$ . Fixe uma enumeração  $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$  de  $V(D)$ . Seja  $M := \{v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_nw_n\}$  um emparelhamento perfeito de  $D$ . Então, o *sinal*  $\text{sgn}(M, D)$  de  $M$  em  $D$  é o sinal da permutação:

$$\pi(M, D) := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ v_1 & w_1 & v_2 & w_2 & \dots & v_n & w_n \end{pmatrix},$$

onde o sinal  $\text{sgn}(\pi(M, D))$  de  $\pi(M, D)$  é igual a  $(-1)^t$ , e  $t$  é o número de inversões da permutação. Podemos ver que o sinal de  $M$  é independente da ordem em que as arestas de  $M$  são listadas. Denotamos o conjunto dos emparelhamentos perfeitos de  $G$  por  $\mathcal{M}(G)$ , ou simplesmente  $\mathcal{M}$  se  $G$  está subentendido. Dizemos que um grafo orientado  $D$  é *Pfaffiano* se todos os emparelhamentos perfeitos de  $D$  têm o mesmo sinal em  $D$ . Um grafo não-orientado é *Pfaffiano* se admite uma orientação Pfaffiana. Note que segue da definição que todo grafo sem emparelhamento perfeito é Pfaffiano. A adoção de outra enumeração de  $V(D)$  ou preserva o sinal de todos os emparelhamentos ou troca o sinal de todos os emparelhamentos. Portanto, a propriedade de ser Pfaffiano não depende da enumeração de vértices adotada. Como exemplo de um grafo Pfaffiano, podemos citar o cubo. Vide a

Figura 1.1. Como exemplo de grafo não-Pfaffiano, podemos citar o grafo  $K_{3,3}$ .



(a) Uma orientação Pfaffiana do cubo.

emparelhamento perfeito $M$	número de inversões de $\pi(M, D)$	$\text{sgn}(M, D)$
$((0, 1), (3, 2), (4, 5), (7, 6))$	2	1
$((0, 1), (3, 2), (7, 4), (5, 6))$	4	1
$((3, 0), (1, 2), (4, 5), (7, 6))$	4	1
$((3, 0), (1, 2), (7, 4), (5, 6))$	6	1
$((4, 0), (1, 5), (3, 2), (7, 6))$	8	1
$((3, 0), (1, 5), (6, 2), (7, 4))$	8	1
$((0, 1), (6, 2), (3, 7), (4, 5))$	6	1
$((4, 0), (1, 2), (3, 7), (5, 6))$	6	1
$((4, 0), (1, 5), (6, 2), (3, 7))$	8	1

(b) Emparelhamentos perfeitos do cubo e seus sinais relativos à enumeração  $(0, 1, \dots, 7)$ .

Figura 1.1: O cubo e seus emparelhamentos perfeitos.

### 1.1.1 Matrizes Antissimétricas e Pfaffiano

A seguir mostraremos como o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo Pfaffiano se relaciona com o Pfaffiano de uma matriz. Seja  $A := (a_{ij})_{2n \times 2n}$  uma matriz  $2n \times 2n$ . A matriz  $A$  é *antissimétrica* se  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo par de índices  $i, j$ , com  $1 \leq i, j \leq 2n$ . Seja  $Q := \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$  uma partição em pares dos inteiros de 1 a  $2n$ .

Seja

$$\begin{aligned}\pi_Q &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_n & j_n \end{pmatrix} \\ \langle a_Q \rangle &:= a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} \\ a_Q &:= \text{sgn}(\pi_Q) \langle a_Q \rangle.\end{aligned}$$

Observe que  $\pi_Q$  e  $\langle a_Q \rangle$  não estão unicamente definidos, pois eles dependem da ordem em que os elementos de cada par de  $Q$  são enumerados em  $\pi_Q$  em  $\langle a_Q \rangle$ . Além disso,  $\pi_Q$  depende da ordem em que os pares de  $Q$  são enumerados. No entanto, afirmamos que  $a_Q$  é bem definido. O valor de  $a_Q$  não depende da ordem em que os pares de  $Q$  são enumerados, pois a troca de posição de dois pares na enumeração altera o número de inversões de  $\pi_Q$  de um número par, e também mantém o valor de  $\langle a_Q \rangle$ . O valor de  $a_Q$  também não depende da ordem de enumeração de dois elementos de um par, pois sua troca altera o sinal de  $\pi_Q$ , mas como  $A$  é antissimétrica, o sinal de  $\langle a_Q \rangle$  também é trocado. O *Pfaffiano* da matriz antissimétrica  $A$  é definido como:

$$P(A) := \sum_Q a_Q,$$

onde a soma é feita sobre todas as partições  $Q$  de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  em pares. O seguinte resultado é conhecido desde o século 19, como pode ser visto no livro escrito por Muir [16] em 1882. Uma prova alternativa para este resultado pode ser encontrada no relatório técnico “Pfaffian Graphs” [14, Teorema 1.2].

TEOREMA 1.1

Seja  $A$  uma matriz antissimétrica. Então

$$\det(A) = (P(A))^2.$$

Como o cálculo do determinante toma tempo polinomial, é possível calcular o módulo do Pfaffiano de uma matriz antissimétrica em tempo polinomial.

Veremos agora a relação do Pfaffiano com o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo Pfaffiano. Seja  $D$  um grafo orientado simples com  $2n$  vértices. Seja  $A(D) = (a_{ij})_{2n \times 2n}$  uma matriz antissimétrica tal que:

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in E(D) \\ -1, & \text{se } (j, i) \in E(D) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, dizemos que  $A(D)$  é a *matriz antissimétrica de adjacência* de  $D$ . Seja  $M := \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}$  um emparelhamento perfeito de  $D$ . O emparelhamento  $M$

induz naturalmente uma partição  $Q(M)$  de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  em pares. Sendo assim, podemos definir  $a_{Q(M)}$ ,  $\pi_{Q(M)}$  e  $\langle a_{Q(M)} \rangle$ . Além disso, como  $D$  é um grafo orientado,  $M$  induz uma enumeração específica dos elementos de um par de  $Q(M)$ . Adotando esta enumeração, temos que  $\langle a_{Q(M)} \rangle$  é sempre igual a 1. Portanto,  $a_{Q(M)} = \text{sgn}(\pi_{Q(M)}) = \text{sgn}(\pi(M, D)) = \text{sgn}(M, D)$ . Então,

$$P(A(D)) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \text{sgn}(M, D).$$

No caso de grafos Pfaffianos, temos que  $\text{sgn}(M, D)$  é constante, para todo emparelhamento perfeito  $M$ , e pertence a  $\{-1, 1\}$ . Sendo assim, se  $D$  é um grafo orientado Pfaffiano,  $|P(A(D))|$  é igual ao número de emparelhamentos perfeitos de  $D$ . Além disso, vimos anteriormente que é possível calcular  $|P(A(D))|$  em tempo polinomial. De fato, podemos calcular o número de emparelhamentos de um grafo orientado Pfaffiano em tempo polinomial.

### 1.1.2 Permanentes e Emparelhamentos Perfeitos

A seguir veremos que o problema de contar emparelhamentos perfeitos de um grafo é  $\#P$ -completo. Seja  $A := (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz quadrada  $n \times n$ . Para cada permutação  $\pi$  dos inteiros de 1 a  $n$ , seja

$$a_\pi := a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

O *permanente*  $\text{prm}(A)$  de  $A$  é definido da seguinte forma:

$$\text{prm}(A) := \sum_{\pi} a_\pi,$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações  $\pi$  dos inteiros de 1 a  $n$ . Note que a definição de  $a_\pi$  difere da definição de  $\langle a_Q \rangle$  utilizada anteriormente na definição do Pfaffiano, sendo que  $a_\pi$  tem o dobro de fatores que  $\langle a_Q \rangle$ , para uma mesma matriz  $A$ .

Em 1979, Valiant [23] obteve o seguinte resultado. Uma prova alternativa pode ser encontrada no artigo de Ben-Dor e Halevi [1].

#### TEOREMA 1.2

*Calcular o permanente de uma matriz de zeros e uns é  $\#P$ -completo.*

Agora reduziremos o problema de calcular o permanente de uma matriz de zeros e uns ao problema de contar os emparelhamentos perfeitos de um grafo.

#### COROLÁRIO 1.3

*Contar os emparelhamentos os emparelhamentos perfeitos de um grafo é  $\#P$ -completo.*

Demonstração: Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  de zeros e uns. Defina o grafo  $G$  como sendo o grafo com bipartição  $\{B', B''\}$ , tal que  $B' := \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$  e  $B'' := \{b''_1, b''_2, \dots, b''_n\}$  e para cada par  $i, j$ , com  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $b'_i$  é ligado a  $b''_j$  por uma aresta se e somente se  $a_{ij} = 1$ . Pela definição de permanente, o número de emparelhamentos perfeitos de  $G$  é igual ao permanente de  $A$ .  $\square$

Sendo assim, temos que o problema de contar emparelhamentos perfeitos de um grafo é  $\#P$ -completo. No entanto, existe solução para este problema quando restrito aos grafos Pfaffianos que toma tempo polinomial. Esse é um dos motivos de nosso interesse em grafos Pfaffianos.

### 1.1.3 Emparelhamentos Máximos

Para os grafos Pfaffianos, está bem resolvido o problema de contagem do número de emparelhamentos perfeitos. No entanto, alguns grafos não têm nenhum emparelhamento perfeito. Para estes grafos pode ser interessante a contagem de seus emparelhamentos máximos. É possível reduzir o problema da contagem de emparelhamentos máximos de um grafo  $G$  ao problema de contagem de emparelhamentos perfeitos de um grafo  $H$ . Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, e  $r$  o número de vértices não cobertos por um emparelhamento máximo  $M$  de  $G$ . Seja  $H$  o grafo obtido de  $G$  pela adição de um conjunto  $S$  de  $r$  novos vértices, adjacentes em  $H$  a todos os vértices de  $V(G)$  e não adjacentes entre si. Cada emparelhamento máximo  $M$  de  $G$  deixa um conjunto  $R$  de vértices não cobertos. Em  $H$ ,  $M$  pode ser estendido a um emparelhamento perfeito casando-se os vértices de  $R$  com os vértices de  $S$ . Existem  $r!$  diferentes emparelhamentos perfeitos de  $H[R \cup S]$ , para qualquer  $R$ . Portanto, para cada emparelhamento máximo  $M$  de  $G$ , existem precisamente  $r!$  emparelhamentos perfeitos de  $H$  que contêm todas as arestas de  $M$ . Sendo assim, o número de emparelhamentos máximos de  $G$  é igual a  $|M(H)| / (r!)$ . Além disso, o número de bits de  $r!$  é polinomial em  $|V(G)|$ . Portanto, se  $H$  é Pfaffiano, podemos contar o número de emparelhamentos máximos de  $G$  em tempo polinomial.

### 1.1.4 Grafos $k$ -Pfaffianos

Grafos  $k$ -Pfaffianos são uma generalização de grafos Pfaffianos. Seja  $\mathbf{D} := (D_1, D_2, \dots, D_k)$  uma  $k$ -tupla de orientações de  $G$ . Dizemos que  $\mathbf{D}$  é uma  $k$ -orientação de  $G$ . Para cada emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ , a  $k$ -tupla

$$\mathbf{sgn}(M, \mathbf{D}) := (\mathbf{sgn}(M, D_1), \mathbf{sgn}(M, D_2), \dots, \mathbf{sgn}(M, D_k))$$

é chamada de *vetor assinatura de  $M$  relativo a  $\mathbf{D}$* . A *matriz assinatura de  $\mathcal{M}$  relativa a  $\mathbf{D}$*  é a matriz  $\mathbf{sgn}(\mathcal{M}, \mathbf{D})$  cujas linhas são  $\mathbf{sgn}(M, \mathbf{D})$ , para  $M \in \mathcal{M}$ . Se o sistema



$\text{sgn}(\mathcal{M}, \mathbf{D}) \mathbf{x} = \mathbf{1}$  tem uma solução, então dizemos que  $\mathbf{D}$  é Pfaffiana e, para qualquer solução  $\alpha$  deste sistema, dizemos que  $(\mathbf{D}, \alpha)$  é uma  $k$ -dupla Pfaffiana. Dizemos que  $G$  é  $k$ -Pfaffiano se ele tem uma  $k$ -orientação Pfaffiana. Note que  $G$  é 1-Pfaffiano se e somente se  $G$  é Pfaffiano. Podemos ver na Figura 1.2 uma 4-dupla Pfaffiana do  $K_{3,3}$ . Na Tabela 1.1 podemos ver a matriz assinatura desta 4-orientação Pfaffiana do  $K_{3,3}$ . (O  $K_{3,3}$  é o menor grafo não-Pfaffiano.)

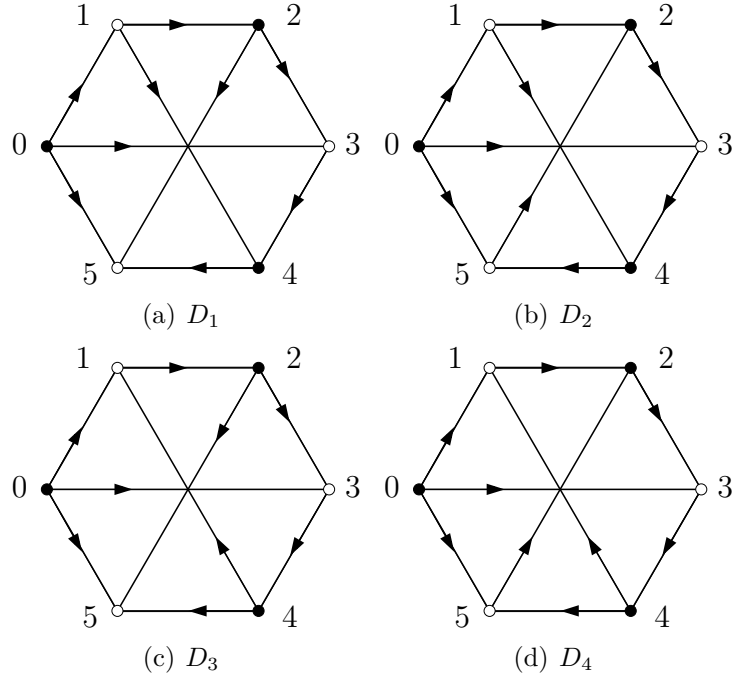


Figura 1.2: As 4 orientações da 4-dupla Pfaffiana  $((D_1, D_2, D_3, D_4), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$  do  $K_{3,3}$ .

Se  $(\mathbf{D}, \alpha)$  é uma  $k$ -dupla Pfaffiana,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \text{sgn}(M, D_i) = 1$ , para todo emparelhamento  $M$ . Então, temos:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}| &= \sum_{M \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^k \alpha_i \text{sgn}(M, D_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \sum_{M \in \mathcal{M}} \text{sgn}(M, D_i) \\
 &= \sum_{i=1}^k \alpha_i P(A(D_i))
 \end{aligned}$$

Nesse caso,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i P(A(D_i))$  é o número de emparelhamentos perfeitos do grafo. Vimos anteriormente que podemos determinar o módulo do Pfaffiano da matriz antissimétrica de

Emparelhamento perfeito $M$	$\text{sgn}(M, D_1)$	$\text{sgn}(M, D_2)$	$\text{sgn}(M, D_3)$	$\text{sgn}(M, D_4)$
$\{01, 23, 45\}$	+	+	+	+
$\{01, 25, 34\}$	+	-	+	-
$\{03, 12, 45\}$	+	+	+	+
$\{03, 25, 14\}$	-	+	+	-
$\{05, 12, 34\}$	+	+	+	+
$\{05, 14, 23\}$	+	+	-	-
$\alpha_i$	$\alpha_1 = 1/2$	$\alpha_2 = 1/2$	$\alpha_3 = 1/2$	$\alpha_4 = -1/2$

Tabela 1.1: Matriz assinatura de  $\mathbf{D}$ .

adjacência de um grafo em tempo polinomial. No entanto, dada uma  $k$ -dupla Pfaffiana de um grafo, para contarmos os emparelhamentos perfeitos dele, precisamos também do sinal do Pfaffiano, não só de seu módulo. É possível obter o valor exato do Pfaffiano da matriz antissimétrica de adjacência de um grafo em tempo polinomial. Vide o artigo de Galluccio e Loeb1 [6, Teorema 4.1, pág. 16]. Dessa forma, se  $k$  é limitado por um polinômio em  $|V(G)|$ , então, dada uma  $k$ -dupla Pfaffiana de um grafo  $G$ , podemos contar o número de emparelhamentos perfeitos de  $G$  em tempo polinomial. Novamente, temos um grande contraste com o caso geral, no qual contar emparelhamentos perfeitos é  $\#P$ -completo.

Definimos o *número Pfaffiano* de um grafo  $G$ , denotado por  $\text{pf}(G)$ , como o menor  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -Pfaffiano. É interessante estudar o número Pfaffiano de grafos para analisar a complexidade de resolução do problema de se encontrar uma  $k$ -dupla Pfaffiana de um grafo. Suponha que exista um polinômio  $q$ , tal que  $\text{pf}(G) \leq q(|V(G)|)$ , para todo grafo  $G$ . Nesse caso, o problema de se encontrar uma  $k$ -dupla Pfaffiana de um grafo que se sabe que é  $k$ -Pfaffiano seria NP-difícil. Isso se deve ao fato de que poderíamos resolver o problema da contagem do número de emparelhamentos perfeitos de um grafo, uma vez obtida tal  $k$ -dupla.

### 1.1.5 Problemas de Grafos Pfaffianos

Da definição de grafo orientado Pfaffiano derivam duas versões interessantes de problemas sobre grafos Pfaffianos:

#### PROBLEMA 1.4 (PROBLEMA DO GRAFO PFAFFIANO NÃO-ORIENTADO)

Dado um grafo não-orientado  $G$ , decidir se  $G$  é Pfaffiano.

#### PROBLEMA 1.5 (PROBLEMA DO GRAFO PFAFFIANO ORIENTADO)

Dado um grafo orientado  $D$ , decidir se  $D$  é Pfaffiano.

Os Problemas 1.4 e 1.5 são polinomialmente equivalentes. Este resultado foi primeiramente obtido por Vazirani e Yannakakis [24]. Esta redução é baseada no sistema linear de equações sobre  $GF(2)$  (de tamanho exponencial) que pode ser definido para representar o problema de se decidir se um grafo é Pfaffiano, onde uma solução do sistema é uma orientação Pfaffiana do grafo. A redução é feita obtendo-se uma solução para uma base desse sistema, o que gera uma orientação do grafo que é Pfaffiana se e somente se o grafo for Pfaffiano. Portanto, dada uma instância de um destes problemas, por meio de operações que consomem tempo total polinomial é possível obter uma instância do outro problema cuja solução permite resolver o problema inicial.

Carvalho, Lucchesi e Murty descrevem um algoritmo polinomial que, dado um grafo não-orientado  $G$ , apresenta uma orientação  $D$  de  $G$  de forma que  $D$  é Pfaffiana se e somente se  $G$  é Pfaffiano [3, Teorema 3.9]. Chamamos uma tal orientação  $D$  de *orientação canônica* de  $G$ . Além disso, eles também apresentam um algoritmo polinomial que, dado um grafo orientado  $D$ , faz verificações preliminares em  $D$  possivelmente decidindo que  $D$  não é Pfaffiana, ou, alternativamente, decidindo que  $D$  é canônica [3, Corolário 3.11]. Desta forma, as duas versões do problema do grafo Pfaffiano são polinomialmente equivalentes.

Da definição de  $k$ -dupla Pfaffiana derivam duas versões interessantes de problemas sobre grafos  $k$ -Pfaffianos:

**PROBLEMA 1.6 (PROBLEMA DO GRAFO  $k$ -PFAFFIANO NÃO-ORIENTADO)**

*Dado um grafo não-orientado  $G$ , decidir se  $G$  é  $k$ -Pfaffiano.*

**PROBLEMA 1.7 (PROBLEMA DA  $k$ -DUPLA PFAFFIANA)**

*Dada uma  $k$ -dupla  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$ , decidir se  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana.*

Estes dois problemas estão ainda inteiramente em aberto. Tampouco se conhece qualquer relação entre estes dois problemas.

Além destes fatos interessantes sobre grafos Pfaffianos e sobre grafos  $k$ -Pfaffianos, o problema de se decidir se um dado grafo é Pfaffiano também está relacionado a outros problemas fundamentais de Teoria dos Grafos, e aparentemente não relacionados. Por exemplo, o problema de decidir se um dado grafo orientado tem ou não um ciclo orientado par é equivalente ao problema de decidir se um grafo bipartido dado é ou não Pfaffiano [24]. O problema está também relacionado a outras questões em Física, Química e Economia (veja o livro de Lovász e Plummer [11, Capítulo 8] e o artigo de McCuaig [12].)

Apesar destas propriedades interessantes de grafos Pfaffianos, pouco se sabe sobre estes grafos. Não existe uma caracterização para grafos Pfaffianos em geral, e nem existe algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos Pfaffianos. Por estes motivos, nos interessamos por pesquisar os grafos Pfaffianos e os grafos  $k$ -Pfaffianos.

## 1.2 Definições e Pré-Requisitos

Nesta seção apresentamos várias definições e resultados básicos que serão utilizados nesta tese. Sugerimos que o leitor pule para a Seção 1.3, voltando a esta seção na medida do necessário.

### 1.2.1 Grafos Pfaffianos

#### Grafos Cobertos por Emparelhamentos

Uma aresta  $e$  de um grafo  $G$  é *admissível* se  $G$  tem emparelhamento perfeito contendo  $e$ . Um grafo  $G$  é *coberto por emparelhamentos* se é conexo, tem pelo menos uma aresta e toda aresta de  $G$  é admissível. Uma aresta  $e$  de um grafo  $G$  é *obrigatória* se todos os emparelhamentos perfeitos de  $G$  contêm  $e$ . Uma aresta  $e := uw$  de  $G$  é admissível se e somente se  $G - u - w$  tem emparelhamento perfeito. Então, podemos determinar o conjunto das arestas admissíveis de  $G$  em tempo polinomial. Seja  $G$  um grafo,  $H$  o subgrafo obtido de  $G$  pela remoção das arestas não-admissíveis de  $G$ . Então, cada componente conexa não-trivial de  $H$  é coberta por emparelhamentos. Da definição de orientações Pfaffianas, imediatamente deduzimos que o grafo  $G$  é Pfaffiano se e somente se cada componente conexa de  $H$  é Pfaffiana. Portanto, o problema de reconhecimento de grafos Pfaffianos reduz-se imediatamente ao de reconhecimento de grafos cobertos por emparelhamentos Pfaffianos. Observações similares são verdadeiras para grafos orientados. Aplicaremos estas observações ao longo do restante da tese.

#### Decomposição em Orelhas

Uma *orelha* de um grafo conexo  $G$  é um caminho  $P$  de  $G$  com um número ímpar de arestas cujos vértices internos (se existirem) têm grau dois em  $G$ . Denotamos por  $G - P$  o grafo obtido pela remoção das arestas de  $P$  e dos vértices internos de  $P$ . Uma *orelha dupla* é um par de orelhas disjuntas de um grafo conexo  $G$ . Uma orelha  $R$  de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$  é *removível* se  $G - R$  é coberto por emparelhamentos, e caso  $R$  seja dupla nenhuma de suas orelhas constituintes seja removível. Seja

$$G = G_1, G_2, \dots, G_r$$

uma sequência de grafos cobertos por emparelhamentos em que para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ ,  $G_{i+1}$  é obtido de  $G_i$  mediante a remoção de orelha. Esta sequência é chamada de *decomposição em orelhas de  $G$  resultando em  $G_r$* . Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é *conforme* em  $G$  se  $G - V(H)$  tem emparelhamento perfeito. Note que se um grafo  $J$  é conforme em  $H$  e  $H$  é conforme em  $G$ , então  $J$  é conforme em  $G$ . O seguinte resultado pode ser encontrado no livro de Lovász e Plummer [11, Teorema 5.4.6].

**TEOREMA 1.8**

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos e  $H$  um subgrafo de  $G$  coberto por emparelhamentos. Então,  $G$  tem uma decomposição em orelhas resultando em  $H$  se e somente se  $H$  é um subgrafo conforme de  $G$ .

Além disso, este resultado pode ser refinado para o caso de grafos bipartidos, como pode ser visto no mesmo livro de Lovász e Plummer [11, Teoremas 4.1.1 e 4.1.6].

**TEOREMA 1.9**

Seja  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos e  $H$  um subgrafo de  $G$  coberto por emparelhamentos. Então,  $G$  tem uma decomposição em orelhas simples resultando em  $H$  se e somente se  $H$  é um subgrafo conforme de  $G$ .

**Grafos Quase-Bipartidos**

Dizemos que um grafo  $G$  é *quase-bipartido* se ele é não-bipartido, coberto por emparelhamentos e tem duas arestas  $e$  e  $f$  tais que  $G - e - f$  é bipartido e coberto por emparelhamentos. Vide Figura 1.3. Os grafos quase-bipartidos são importantes porque são os primeiros grafos não-bipartidos que aparecem em uma decomposição em orelhas removíveis de um grafo. Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos,  $H$  um subgrafo com bipartição  $\{U, W\}$ , gerador de  $G$ , contendo todas as arestas de  $G$  com um extremo em  $U$  e outro em  $W$ , e coberto por emparelhamentos. Se  $G[U]$  tem precisamente uma aresta, dizemos que  $G$  é *meio-bipartido*. Note que esta definição implica que  $G[W]$  tem pelo menos uma aresta. Além disso, se  $G[W]$  também tiver precisamente uma aresta, então  $G$  é quase-bipartido. De fato, os grafos quase-bipartidos são meio-bipartidos. A definição de grafos meio-bipartidos foi feita durante o desenvolvimento da pesquisa que levou a esta tese.

**Orientação de Ciclos Orientados**

Seja  $D$  um grafo orientado e  $C$  um ciclo de  $D$  de comprimento par. Como o número de arestas de  $C$  é par, a paridade do número de arestas para frente não depende da direção de percurso de  $C$ . Dizemos que  $C$  tem *orientação ímpar* se tem um número ímpar de arestas para frente, e tem *orientação par*, caso contrário. Para quaisquer dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , denotaremos por  $X \Delta Y$  a diferença simétrica de  $X$  e  $Y$ .

O seguinte resultado pode ser encontrado no livro de Lovász e Plummer [11, Lema 8.3.1]. A seguir apresentamos uma demonstração baseada na demonstração de Lovász e Plummer.

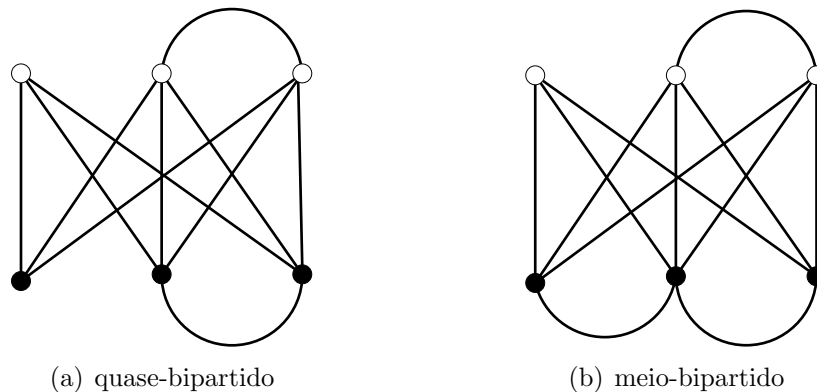


Figura 1.3: Um grafo quase-bipartido e um grafo meio-bipartido

**TEOREMA 1.10**

Seja  $D$  um grafo orientado. Sejam  $M_1$  e  $M_2$  dois emparelhamentos perfeitos de  $D$  e seja  $k$  o número de ciclos de  $D[M_1 \Delta M_2]$  com orientação par em  $D$ . Então,  $\text{sgn}(M_1, D)$  é igual a  $\text{sgn}(M_2, D)$  se e somente se  $k$  é par.

Demonstração: Nós queremos demonstrar que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\text{sgn}(M_1, D)\text{sgn}(M_2, D) = (-1)^k.$$

Primeiro veremos que se esta igualdade vale para alguma orientação, ela vale para todas as orientações. Considere a inversão de uma aresta  $e$ . Suponha, primeiramente, que  $e$  não pertence a  $M_1 \Delta M_2$ . Nesse caso,  $k$  é inalterado. Além disso,  $e$  ou está em  $M_1 \cup M_2$  ou não tem aresta nem em  $M_1$  nem em  $M_2$ . Sendo assim, o lado esquerdo da equação é alterado um número par (0 ou 2) de vezes. Portanto a igualdade se mantém. Suponha agora que  $e$  está em  $M_1 \Delta M_2$ . Nesse caso,  $k$  tem sua paridade alterada. Além disso, precisamente um emparelhamento dentre  $M_1$  e  $M_2$  tem a aresta  $e$ . Portanto, o lado esquerdo da igualdade é alterado precisamente uma vez. Então, podemos nos restringir a uma orientação arbitrária  $D$ . Iremos supor que  $D$  é tal que todo ciclo de  $M_1 \Delta M_2$  é um ciclo orientado em  $D$ .

Vimos anteriormente, na Seção 1.2.1, que a adoção de outra enumeração dos vértices de  $D$  ou altera o sinal de todos os emparelhamentos ou preserva o sinal de todos os emparelhamentos. Sendo assim, o lado esquerdo da igualdade tem seu sinal trocado um número par de vezes (0 ou 2). Além disso,  $k$  não depende da enumeração de  $V(D)$ . Então, podemos nos restringir a uma orientação arbitrária. Iremos supor que a enumeração de  $V(D)$  é tal que: (i) para toda aresta  $e$  de  $M_1 \cap M_2$ , a origem de  $e$  aparece na enumeração de  $V(D)$  exatamente antes do destino de  $e$ , (ii) para todo ciclo  $(v_1, v_2, \dots, v_\ell)$  de  $M_1 \Delta M_2$ ,

temos que  $(v_1, v_2) \in M_1$  e  $v_1, v_2, \dots, v_\ell$  aparecem consecutivamente e nesta ordem na enumeração de  $V(D)$ .

Dessa forma,  $\pi(M_1, D)$  é a permutação identidade, e  $\text{sgn}(M_1, D)$  é  $+1$ . Já  $\text{sgn}(M_2, D)$  é o produto dos sinais de  $k$  permutações  $\pi_i(M_2, D)$ , onde cada permutação

$$\pi_i(M_2, D) := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{\ell-1} & v_\ell \\ v_2 & v_3 & \dots & v_\ell & v_1 \end{pmatrix}$$

representa um ciclo  $Q_i$  de  $M_1 \Delta M_2$ . O sinal de  $\pi_i(M_2, D)$  é sempre  $-1$ , pois  $v_1$  participa de todas as inversões de  $\pi_i(M_2, D)$ , e está invertido com todos os demais  $\ell - 1$  elementos. Como  $\ell$  é par, temos um número ímpar de inversões, e o sinal de  $\pi_i(M_2, D)$  é igual a  $-1$ . De fato,  $\text{sgn}(M_2, D) = (-1)^k$ , e a igualdade segue disso.  $\square$

**TEOREMA 1.11** ([11, TEOREMA 8.3.2])

Seja  $D$  um grafo orientado e  $M$  um emparelhamento perfeito de  $D$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

1. o grafo orientado  $D$  é Pfaffiano;
2. todo ciclo  $M$ -alternado de  $D$  tem orientação ímpar;
3. todo ciclo conforme de  $D$  tem orientação ímpar.

Demonstração: Primeiramente veremos que os itens 1 e 2 são equivalentes. Suponha, primeiramente, que  $D$  seja Pfaffiano. Seja  $Q$  um ciclo  $M$ -alternado de  $D$ . Seja  $N := M \Delta E(Q)$ . Como  $D$  é Pfaffiano,  $\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(N, D)$ . Portanto, pelo Teorema 1.10,  $Q$  tem orientação ímpar. Suponha agora que todo ciclo  $M$ -alternado de  $D$  tenha orientação ímpar. Provaremos que isto implica que  $D$  é Pfaffiano. Seja  $N$  um emparelhamento perfeito de  $D$ . Seja  $\mathcal{Q}$  o conjunto dos ciclos de  $M \Delta N$ . Por hipótese, todo ciclo de  $\mathcal{Q}$  tem orientação ímpar. Portanto, pelo Teorema 1.10,  $\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(N, D)$ . Isso vale para todo emparelhamento perfeito  $N$  de  $G$ . Sendo assim,  $D$  é Pfaffiano.

Mostraremos agora que os itens 1 e 3 são equivalentes. Suponha, primeiramente, que  $D$  seja Pfaffiano. Seja  $Q$  um ciclo conforme de  $D$ . Como  $Q$  é conforme,  $D - V(Q)$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$ . Seja  $M$  uma extensão de  $M'$  a um emparelhamento perfeito de  $D$ . Seja  $N := M \Delta E(Q)$ . Como  $D$  é Pfaffiano,  $\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(N, D)$ . Portanto, pelo Teorema 1.10,  $Q$  tem orientação ímpar. Suponha agora que todo ciclo conforme de  $D$  tem orientação ímpar. Provaremos que isto implica que  $D$  é Pfaffiano. Sejam  $M$  e  $N$  dois emparelhamentos perfeitos de  $D$ . Mostraremos que  $\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(N, D)$ . Todo ciclo de  $M \Delta N$  é conforme e tem portanto orientação ímpar. Pelo Teorema 1.10,  $\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(N, D)$ .  $\square$

**COROLÁRIO 1.12**

Um grafo orientado  $D$  é Pfaffiano se e somente se todo subgrafo conforme (orientado) de  $D$  é Pfaffiano.

Demonstração: (se) O grafo orientado  $D$  é um subgrafo conforme dele mesmo. (somente se) Seja  $D'$  um subgrafo conforme de  $D$ . Seja  $Q$  um ciclo conforme de  $D'$ . Então,  $Q$  é conforme em  $D$ . Como  $D$  é Pfaffiano, todos os seus ciclos conformes têm orientação ímpar. Em particular,  $Q$  tem orientação ímpar em  $D$ . No entanto,  $D'$  é restrição de  $D$ . Portanto,  $Q$  tem orientação ímpar em  $D'$ . Esta conclusão vale para todo ciclo conforme  $Q$  de  $D'$ . Logo,  $D'$  é Pfaffiano.  $\square$

**Similaridade**

Seja  $G$  um grafo. Então, para qualquer subconjunto  $X$  de  $V(G)$ , denotaremos por  $\partial_G(X)$  o conjunto de arestas com precisamente um extremo em  $X$ . Se  $G$  está subentendido escrevemos simplesmente  $\partial(X)$ . Dizemos que  $X$  e  $V(G) - X$  são as *praias* do corte  $\partial_G(X)$ .

Duas orientações de um grafo  $G$  são *similares* se o conjunto de arestas no qual as orientações diferem é um corte de arestas de  $G$ . Sejam  $D_1$  e  $D_2$  orientações similares de um grafo  $G$ , seja  $C$  o corte que é igual ao conjunto de arestas cujas orientações em  $D_1$  e  $D_2$  são distintas. Todo ciclo de  $G$  contém um número par de arestas em  $C$ . Em particular, um ciclo com comprimento par tem orientação ímpar em  $D_1$  se e somente se ele tem orientação ímpar em  $D_2$ . Consequentemente,  $D_1$  é Pfaffiano se e somente se  $D_2$  é Pfaffiano. Seja  $D$  um grafo orientado e  $S$  um subconjunto de  $E(D)$ . Definimos  $D \otimes S$  como a orientação obtida de  $D$  pela inversão das orientações das arestas de  $S$ . O seguinte resultado tem um papel importante nesta tese e é um caso particular de um resultado provado por Carvalho et al [3, Corolário 3.5]. A prova a seguir é baseada na demonstração feita por Carvalho et al.

**TEOREMA 1.13**

Todo grafo bipartido coberto por emparelhamentos e Pfaffiano tem uma única orientação Pfaffiana, a menos de similaridades.

Demonstração: Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas orientações Pfaffianas do grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G$ . Prova por indução. Se  $G = K_2$ , quaisquer duas orientações de  $G$  são similares. Portanto, podemos supor que  $G$  tem pelo menos duas arestas. Pelo Teorema 1.9,  $G$  tem uma orelha simples removível  $R$ . Seja  $M_1$  ( $M_2$ ) um emparelhamento perfeito de  $G$  contendo as arestas de ordem par (ímpar) em um percurso de  $R$ . Então,  $M_1 \triangle M_2$  tem um ciclo conforme  $Q$  contendo todas as arestas de  $R$ . As restrições  $D_1 - R$  e  $D_2 - R$  são Pfaffianas. Por hipótese de indução,  $D_1 - R$  e  $D_2 - R$  são similares. Seja



$C'$  o corte de  $G - R$  tal que  $(D_1 - R) \otimes C' = D_2 - R$ . Seja  $X$  a praia de  $C'$  em  $G - R$ . Seja  $C := \partial_G(X)$ . Então,  $D'_2 := D_2 \otimes C$  é similar a  $D_2$  e Pfaffiano. Além disso,  $D_1$  e  $D'_2$  concordam em todas as arestas de  $G - R$ . Como  $Q$  é conforme em  $G$ , a paridade de  $Q$  em  $D_1$  e em  $D_2$  é igual. Portanto, a paridade de  $R$  em  $D_1$  e em  $D'_2$  é igual. Sendo assim, existe um corte  $C'' = \partial(Y)$  de  $R$  tal que  $D_1 \otimes C''$  é igual a  $D'_2$ . Logo,  $D_1$  e  $D_2$  são similares. Esse argumento vale para todo par de orientações Pfaffianas  $D_1$  e  $D_2$  de  $G$ .  $\square$

#### PROPOSIÇÃO 1.14

Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $D$ , e  $C := \partial(X)$  um corte de  $D$ . Seja  $D' := D \otimes C$ . Então,  $\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(M, D')$  se e somente se  $|X|$  é par (o corte  $C$  é par).

### Contrações e Cortes Justos

O grafo obtido de  $G$  pela contração de um subconjunto  $X$  de  $V(G)$  a um único vértice e posterior remoção de laços resultantes é denotado por  $G/X \rightarrow x$ . Se  $C = \partial(X)$  onde  $X \subset V(G)$ , então os grafos  $G/X \rightarrow x$  e  $G/\overline{X} \rightarrow \overline{x}$  são chamados de  $C$ -contrações de  $G$ . Suponha também que  $G$  tem um emparelhamento perfeito. Um corte  $C$  é *justo em*  $G$  se todo emparelhamento perfeito de  $G$  tem precisamente uma aresta em  $C$ . Little e Rendl [10] provaram o seguinte resultado importante. Esta demonstração é baseada em uma demonstração encontrada em um artigo não publicado de Carvalho, Lucchesi e Murty [4].

#### TEOREMA 1.15

Seja  $C$  um corte justo de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$ . Então,  $G$  é Pfaffiano se e somente se ambas as  $C$ -contrações de  $G$  são Pfaffianas.

Demonstração: Sejam  $G_1 := G/X \rightarrow x$  e  $G_2 := G/\overline{X} \rightarrow \overline{x}$  as duas  $C$ -contrações de  $G$ . Seja  $D_i$  orientação Pfaffiana de  $G_i$ , para  $i = 1, 2$ . Seja  $S$  o conjunto das arestas de  $C$  que saem em  $D_1$  do vértice de contração  $\overline{x}$ . Todo par de arestas de  $C$  múltiplas em  $D_1$  são parte  $S$  ou parte de  $C - S$ . Portanto, o conjunto  $S$  é parte de um corte  $C'$  disjuncto de  $C - S$ . Vide Figura 1.4. Nós revertemos a orientação das arestas do corte  $C'$  em  $D_1$ , obtendo assim uma orientação similar. Podemos portanto supor que em  $D_1$  todas as arestas de  $C$  entram no vértice de contração  $\overline{x}$ . Analogamente, podemos supor que todas as arestas de  $C$  saem de  $x$  em  $D_2$ .

Seja  $D$  a orientação de  $G$  obtida pela união de  $D_1$  e  $D_2$ . Mostraremos que  $D$  é Pfaffiana. Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Como  $C$  é justo,  $M$  contém precisamente uma aresta em  $C$ , digamos  $e$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $M_i$  a restrição de  $M$  a  $G_i$ . Então,  $M_i$  é emparelhamento perfeito de  $G_i$ . Seja  $Q$  qualquer ciclo  $M$ -alternado de  $D$ . Mostraremos agora que  $Q$  tem orientação ímpar. Se  $Q$  não contém aresta de  $C$  então

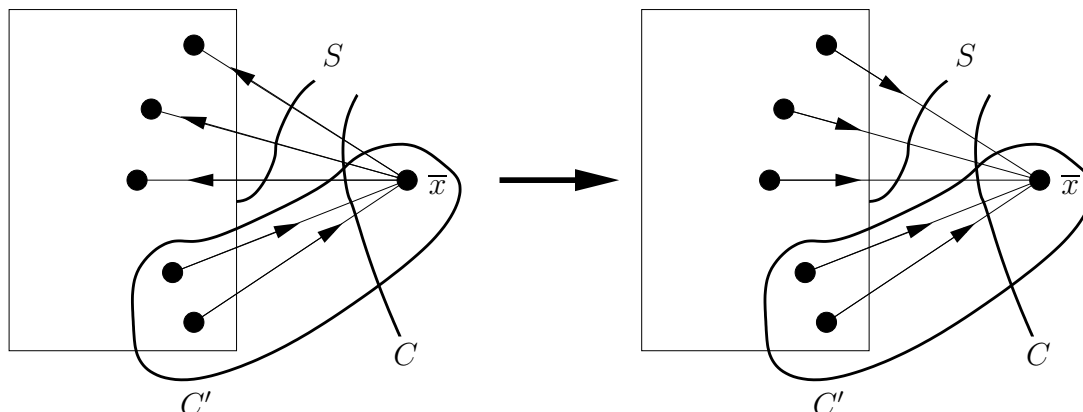


Figura 1.4: O grafo orientado  $D_1$  e seu grafo similar  $D_1 \otimes C'$ .

ele é  $M_i$ -alternado, para algum  $i \in \{1, 2\}$ . Nesse caso, como  $D_i$  é Pfaffiano, temos que  $Q$  tem orientação ímpar em  $D_i$ , e portanto  $Q$  tem orientação ímpar em  $D$ . Podemos portanto supor que  $Q$  contém arestas em  $C$ . Como  $C$  é justo, ele contém precisamente duas arestas: uma delas é  $e$ , a aresta de  $M$  em  $C$ ; seja  $f$  a outra aresta. Vide Figura 1.5. Então,  $Q = (v_2, e, v_1) \cdot Q_1 \cdot (w_1, f, w_2) \cdot Q_2$ , onde  $v_1$  é o término de  $e$  em  $\bar{X}$ ,  $v_2$  seu término em  $X$ ,  $w_1$  é o início de  $f$  em  $\bar{X}$ ,  $w_2$  seu término em  $X$ ,  $Q_1$  é um caminho  $M_1$ -alternado de comprimento par em  $G[\bar{X}]$  e  $Q_2$  é um caminho de comprimento par em  $G[X]$ . Então,  $(x, e, v_1) \cdot Q_1 \cdot (w_1, f, x)$  é um ciclo  $M_1$ -alternado de  $D_1$ . Como  $D_1$  é Pfaffiano e  $x$  é uma fonte de  $D_1$ , temos que o caminho  $Q_1$  tem orientação par em  $D_1$ . Analogamente, o caminho  $Q_2$  tem orientação par em  $D_2$ . Portanto,  $Q$  tem orientação ímpar em  $D$ . Esta conclusão vale para todo ciclo  $M$ -alternado  $Q$  de  $D$ . De fato,  $D$  é grafo orientado Pfaffiano.

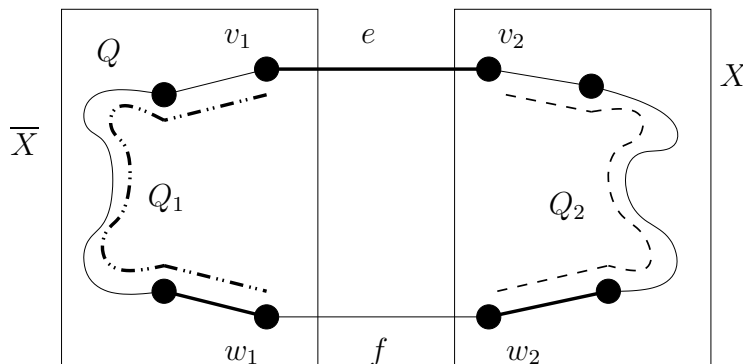


Figura 1.5: Prova do Teorema 1.15.

Provaremos agora que se  $G$  é Pfaffiano, então suas duas  $C$ -contrações são Pfaffianas. Vimos anteriormente que  $G_1 = G/X \rightarrow x$  e  $G_2 = G/\bar{X} \rightarrow \bar{x}$  são as duas  $C$ -contrações de  $G$ . Por hipótese,  $G$  tem uma orientação Pfaffiana, digamos  $D_0$ . Descreveremos um procedimento para obter uma orientação  $D$  de  $G$  a partir de  $D_0$  e mostrar que ambas as  $C$ -contrações de  $D$  são Pfaffianas, provando que  $G_1$  e  $G_2$  também são Pfaffianos.

Seja  $V_1$  o conjunto de vértices de  $V(G_1) - x = \bar{X}$  que são incidentes em arestas de  $C$ . Analogamente, seja  $V_2$  o conjunto de vértices de  $V(G_2) - \bar{x} = X$  que são incidentes em arestas em  $C$ . Definimos agora o subconjunto (possivelmente vazio)  $W$  de  $V_1 \cup V_2$  e mostramos que a orientação  $D$  de  $G$ , obtida de  $D_0$  pela reversão das orientações de arestas de  $\partial(W)$ , é uma orientação Pfaffiana de  $G$  tal que cada  $C$ -contração de  $D$  também é Pfaffiana.

Para isso, seja  $e := v_1v_2$  uma aresta de  $C$ , com  $v_1$  sendo seu extremo em  $\bar{X}$  e  $v_2$  seu extremo em  $X$ . Então, o vértice  $v_1$  está em  $V_1$  e o vértice  $v_2$  está em  $V_2$ . Por hipótese, o corte  $C$  é justo. Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$  que contém somente a aresta  $e$  em  $C$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $M_i$  a restrição de  $M$  a  $G_i$ . Então,  $M_i$  é um emparelhamento perfeito de  $G_i$  que contém a aresta  $e$ .

Seja  $w_2$  qualquer vértice de  $V_2 - v_2$ . Veja a Figura 1.6. Mostraremos agora que existe em  $G[X]$  um caminho  $M$ -alternado  $P(w_2)$  que liga os vértices  $v_2$  e  $w_2$ . Para tanto, note que como  $w_2$  está em  $V_2$ , então ele é incidente em uma aresta de  $C$ , digamos  $f$ . Como  $C$  é um corte justo,  $G$  tem um emparelhamento perfeito  $N$  que contém somente a aresta  $f$  em  $C$ . Seja  $Q$  o ciclo  $M, N$ -alternado que contém a aresta  $f$ . Então,  $Q$  contém em  $C$  precisamente as arestas  $e$  e  $f$ . Seja  $P(w_2)$  o segmento de  $Q$  em  $G[X]$  que liga  $v_2$  a  $w_2$ . Claramente,  $P(w_2)$  é  $M$ -alternado. Analogamente, para cada aresta  $w_1$  de  $V_1 - v_1$ , defina o caminho  $P(w_1)$  como sendo o caminho  $M$ -alternado de  $G[\bar{X}]$  que liga  $v_1$  a  $w_1$ . Definimos agora  $W$  como sendo o subconjunto de  $(V_1 - v_1) \cup (V_2 - v_2)$  que consiste dos vértices  $w$  tais que  $P(w)$  tem orientação ímpar em  $D_0$ .

Seja  $D$  a orientação de  $G$  obtida da orientação  $D_0$  pela reversão das arestas do corte  $\partial(W)$ . Como  $D$  e  $D_0$  são similares,  $D$  é Pfaffiana. Além disso, como nem  $v_1$  nem  $v_2$  estão em  $W$ , a reversão das arestas de  $\partial(W)$  preserva a paridade do caminho  $P(w)$  se e somente se  $w$  não estiver em  $W$ . Por definição,  $w$  está em  $W$  se e somente se  $P(w)$  tiver orientação ímpar em  $D_0$ . Deduzimos que  $P(w)$  tem orientação ímpar em  $D$ , para cada vértice  $w$  em  $(V_1 - v_1) \cup (V_2 - v_2)$ .

Sejam  $D_1 := D/X \rightarrow x$  e  $D_2 := D/\bar{X} \rightarrow \bar{x}$  as duas  $C$ -contrações de  $D$ . Então, para  $i = 1, 2$ ,  $D_i$  é uma orientação de  $G_i$ . Para provar que  $D_1$  é Pfaffiana, seja  $Q_1$  um ciclo  $M_1$ -alternado qualquer de  $G_1$ . Mostramos agora que  $Q_1$  tem orientação ímpar em  $D_1$ . Se as arestas de  $Q_1$  formam um ciclo em  $G$ , então  $Q_1$  é um ciclo  $M$ -alternado de  $G$ . Nesse caso,  $Q_1$  tem orientação ímpar em  $D$ , e portanto orientação ímpar em  $D_1$ . Podemos supor que as arestas de  $Q_1$  não formam um ciclo em  $G$ . Veja Figura 1.6. Então,  $Q_1$  contém a aresta

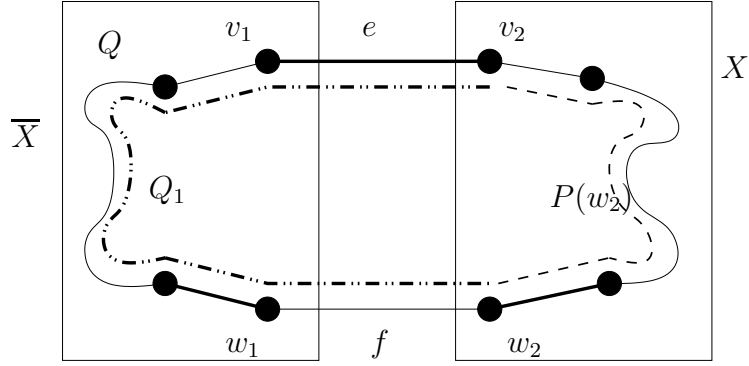


Figura 1.6: Prova do Teorema 1.15.

$e$  e também uma aresta  $f$  de  $C$  cujo extremo  $w_2$  em  $X$  é distinto de  $v_2$ . Seja  $Q$  o ciclo de  $G$  formado pelas arestas de  $E(Q_1) \cup E(P(w_2))$ . Então,  $Q$  é  $M$ -alternado, e portanto sua orientação é ímpar em  $D$ . Como  $P(w_2)$  tem orientação par em  $D$ , temos que  $Q_1$  tem orientação ímpar em  $D$ , e portanto sua orientação é ímpar em  $D_1$ . Esta conclusão vale para todo ciclo  $M_1$ -alternado  $Q_1$  de  $G_1$ . Deduzimos que  $D_1$  é Pfaffiano. Um argumento análogo pode ser usado para demonstrar que  $D_2$  é Pfaffiano. Como afirmamos,  $D$  é um grafo Pfaffiano e ambas as suas  $C$ -contrações são Pfaffianas.  $\square$

### 1.2.2 Grafos $k$ -Pfaffianos

#### Posto da Matriz Assinatura

Utilizaremos o seguinte teorema conhecido como Teorema de Rouché-Capelli. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro “Applied Linear Algebra” de Noble e Daniel [17, Teorema (4.13)].

#### TEOREMA 1.16

Considere o sistema de equações lineares  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Exatamente uma das três seguintes possibilidades acontece:

1. O posto da matriz aumentada  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$  é maior do que o posto de  $\mathbf{A}$ , e não existe solução para  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ;
2. O posto de  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$  é igual ao posto de  $\mathbf{A}$ , que é igual ao número de variáveis, e o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tem exatamente uma solução;
3. O posto de  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$  é igual ao posto de  $\mathbf{A}$ , que é estritamente menor do que o número de variáveis, e o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tem infinitas soluções.

Seja  $p(\mathbf{A})$  o posto de uma matriz  $\mathbf{A}$ .

COROLÁRIO 1.17

Suponha que o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  seja tal que  $p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$ , onde  $n$  é o número de variáveis do sistema. Então, existe uma solução  $\mathbf{x}_0$  deste sistema onde uma variável de  $\mathbf{x}_0$  tem valor zero.

Demonstração: Seja  $m = p(\mathbf{A})$ . Então,  $\mathbf{A}$  tem  $m$  colunas linearmente independentes. Renomeie as variáveis de  $\mathbf{x}$ , se necessário, de forma que as  $m$  primeiras colunas de  $\mathbf{A}$  sejam linearmente independentes. Denote por  $\mathbf{B}$  a submatriz de  $\mathbf{A}$  que consiste das  $m$  primeiras colunas de  $\mathbf{A}$ , e por  $\mathbf{N}$  a submatriz de  $\mathbf{A}$  formada pelas demais  $n - m$  colunas. Analogamente, seja  $\mathbf{x}_B$  o vetor das primeiras  $m$  variáveis de  $\mathbf{x}$ , e seja  $\mathbf{x}_N$  o vetor das últimas  $n - m$  variáveis. Com esta notação, o sistema de equações  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  é equivalente ao sistema

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}.$$

Como  $(\mathbf{B}|\mathbf{b})$  é submatriz de  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ , temos que  $p(\mathbf{B}|\mathbf{b}) \leq p(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = m$ . Portanto, temos que  $p(\mathbf{B}) = p(\mathbf{B}|\mathbf{b}) = m$ , e o sistema  $\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$  tem solução. Seja  $\mathbf{x}_B = \mathbf{s}_B$  uma solução desse sistema. Então,  $\mathbf{x}_B = \mathbf{s}_B$ ,  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  é uma solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .  $\square$

## Similaridade

Vimos anteriormente que duas orientações de um grafo são similares se o conjunto de arestas nas quais elas discordam é um corte. Dizemos que duas  $k$ -orientações  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  de  $G$  são *similares* se existe bijeção  $f$  entre as orientações de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  tal que  $D$  é similar a  $f(D)$  para toda  $D$  em  $\mathbf{D}$ . O seguinte resultado pode ser facilmente deduzido da Proposição 1.14.

PROPOSIÇÃO 1.18

Sejam  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  duas  $k$ -orientações similares de  $G$ . Então,  $\mathbf{D}$  é  $k$ -Pfaffiano se e somente se  $\mathbf{D}'$  é  $k$ -Pfaffiano.

COROLÁRIO 1.19

Seja  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma  $k$ -dupla Pfaffiana de um grafo  $G$ . Então,  $G$  tem uma  $k$ -dupla Pfaffiana  $(\mathbf{D}', \boldsymbol{\alpha}')$  tal que  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}'$  são similares e  $\alpha'_i = |\alpha_i|$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Uma  $k$ -dupla Pfaffiana  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  de  $G$  é *normal* se  $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ .

COROLÁRIO 1.20

Todo grafo  $G$  tem uma  $\text{pf}(G)$ -dupla Pfaffiana normal.

## 1.3 Resultados Anteriores e Resultados da Tese

Em 1963, Kasteleyn [8] provou que todo grafo planar é Pfaffiano. Em 1998, McCuaig [12] e, independentemente, Robertson, Seymour e Thomas [19] apresentaram um algoritmo polinomial para decidir se um grafo bipartido é Pfaffiano. Em 2006, apresentamos uma demonstração alternativa para a corretude deste algoritmo na dissertação de mestrado [13]. Sendo assim, com os resultados descritos na Seção 1.2.1, podemos concluir que o Problema do grafo Pfaffiano orientado e o Problema do grafo Pfaffiano não-orientado (Problemas 1.5 e 1.4) estão resolvidos para a classe dos grafos bipartidos e para a classe dos grafos planares. Até recentemente, estas eram as únicas classes para as quais esses problemas tinham sido resolvidos. Nesta tese, apresentamos algoritmos polinomiais de nossa autoria para a classe dos quase-bipartidos e para a classe dos meio-bipartidos. Estes resultados foram publicados na revista “Discrete Applied Mathematics” [15].

Em 1975, Little [9] caracterizou os grafos bipartidos Pfaffianos. Em 2001, Fischer e Little [5] caracterizaram os grafos quase-bipartidos Pfaffianos. Os grafos *sólidos* são uma generalização de grafos bipartidos cobertos por emparelhamentos. Recentemente, em um resultado ainda não publicado, Carvalho, Lucchesi e Murty [4] caracterizaram os grafos sólidos Pfaffianos. Estas eram as únicas classes para as quais se conhecia caracterização dos grafos Pfaffianos. Nesta tese, mostramos a caracterização de nossa autoria para a classe dos grafos meio-bipartidos.

Em 1999, Galluccio e Loeb1 [6] e, independentemente, Tesler [20] provaram que um grafo imersível em uma superfície orientável de genus  $g$  tem número Pfaffiano no máximo  $4^g$ . Além disso, em 2006, Norine [18] provou que um grafo é 4-Pfaffiano se e somente se ele tem um desenho no toro no qual todo emparelhamento perfeito tem um número par de cruzamentos. Neste mesmo artigo, Norine provou que todo grafo 3-Pfaffiano é Pfaffiano e que todo grafo 5-Pfaffiano é 4-Pfaffiano. Em seguida, Norine conjecturou que o número Pfaffiano de todo grafo é uma potência de quatro. Nesta tese, apresentamos contra-exemplos para esta conjectura, exibindo grafos com número Pfaffiano 6.

## 1.4 Organização da Tese

Esta tese tem a seguinte organização. No Capítulo 1, apresentamos as definições importantes, nomenclaturas e resultados básicos sobre grafos Pfaffianos. Em seguida, neste mesmo capítulo, apresentamos um pequeno histórico dos problemas e resultados sobre grafos Pfaffianos e onde esta tese se insere neles. Em seguida, ainda neste capítulo, apresentamos alguns resultados básicos novos. No Capítulo 2, apresentamos um algoritmo polinomial para decidir se um grafo quase-bipartido é Pfaffiano. Em seguida, neste mesmo capítulo, apresentamos uma caracterização dos grafos meio-bipartidos Pfaffianos,

e a aplicação do algoritmo de reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos para a obtenção de um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos meio-bipartidos Pfaffianos. No Capítulo 3, apresentamos um contra-exemplo para a conjectura de que o número Pfaffiano de todo grafo é potência de quatro. Finalmente, no Capítulo 4, mostramos algumas questões em aberto relacionadas aos resultados que a tese gerou.

## 1.5 Novos Resultados Básicos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos que obtivemos que serão úteis nos capítulos posteriores.

### 1.5.1 Grafos Pfaffianos e seus Subgrafos Pfaffianos

Vimos que  $\mathcal{M}$  denota o conjunto dos emparelhamentos perfeitos de  $G$ .

Os seguintes resultados têm um papel importante nesta tese.

TEOREMA 1.21

Seja  $D$  um grafo orientado,  $e := xy$  uma aresta de  $D$ . Então,

1. se  $D - x - y$  não tem emparelhamento perfeito, então  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $D - e$  é Pfaffiano;
2. se  $D - e$  não tem emparelhamento perfeito, então  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $D - x - y$  é Pfaffiano.

Demonstração: Se  $D$  é Pfaffiano então os subgrafos  $D - e$  e  $D - x - y$  de  $D$ , ambos conformes, são também Pfaffianos, pelo Corolário 1.12. Para provar o item 1, suponha que  $D - x - y$  não tem emparelhamento perfeito e  $D - e$  é Pfaffiano. Então nenhum emparelhamento perfeito de  $D$  contém  $e$ . Sendo assim, todo emparelhamento perfeito de  $D$  é emparelhamento perfeito de  $D - e$ . Portanto, dado que  $D - e$  é Pfaffiano, todos os emparelhamentos perfeitos de  $D - e$  e de  $D$  têm o mesmo sinal.

Para provar o item 2, suponha que  $D - e$  não tem emparelhamento perfeito e  $D - x - y$  é Pfaffiano. Então todos os emparelhamentos perfeitos de  $D$  contêm  $e$ . Dessa forma, todos os emparelhamentos perfeitos de  $D$  são extensões de emparelhamentos perfeitos de  $D - x - y$ . Podemos escolher uma enumeração para os vértices de  $D$  de forma que (i)  $x$  e  $y$  sejam os últimos na enumeração e (ii) o sinal de um emparelhamento perfeito de  $D - x - y$  seja igual ao de sua extensão a um emparelhamento perfeito de  $D$ . Como  $D - x - y$  é Pfaffiano, todos os emparelhamentos perfeitos de  $D - x - y$  e de  $D$  têm o mesmo sinal.  $\square$

## TEOREMA 1.22

Seja  $D$  um grafo orientado,  $e := xy$  uma aresta de  $D$ ,  $M$  um emparelhamento perfeito de  $D$  contendo  $e$  e  $N$  um emparelhamento perfeito de  $D$  que não contém  $e$ . Então,  $D$  é Pfaffiano se e somente se as três seguintes propriedades são verdadeiras:

1. o grafo  $D - e$  é Pfaffiano;
2. o grafo  $D - x - y$  é Pfaffiano;
3.  $M$  e  $N$  têm o mesmo sinal em  $D$ .

Demonstração: (somente se) Suponha que  $D$  seja Pfaffiano. Como  $D - e$  e  $D - x - y$  são subgrafos conformes de  $D$ , eles são ambos Pfaffianos. Além disso, num grafo orientado Pfaffiano todos os emparelhamentos perfeitos, e em particular  $M$  e  $N$ , têm o mesmo sinal.

(se) Suponha que as três propriedades sejam verdadeiras. O conjunto  $\mathcal{M}$  dos emparelhamentos perfeitos de  $G$  pode ser particionado em dois subconjuntos: o conjunto  $\mathcal{M}_{\bar{e}}$  dos emparelhamentos perfeitos de  $G$  que não contém  $e$ , e o conjunto  $\mathcal{M}_e$  dos emparelhamentos perfeitos de  $G$  contendo  $e$ . A Propriedade 1 implica que todos os emparelhamentos de  $\mathcal{M}_{\bar{e}}$  têm o mesmo sinal, digamos  $\bar{s}$ . A Propriedade 2 implica que todos os emparelhamentos de  $\mathcal{M}_e$  têm o mesmo sinal, digamos  $s$ . A Propriedade 3 implica que  $s = \bar{s}$ . Sendo assim, todos os emparelhamentos perfeitos de  $D$  têm o mesmo sinal. Portanto,  $D$  é Pfaffiano.  $\square$

## COROLÁRIO 1.23

Seja  $D$  um grafo orientado,  $e := xy$  uma aresta de  $D$ , e  $Q$  um ciclo conforme de  $D$  que contém  $e$ . Então,  $D$  é Pfaffiano se e somente se as três seguintes propriedades são verdadeiras:

1. o grafo  $D - e$  é Pfaffiano;
2. o grafo  $D - x - y$  é Pfaffiano;
3. o ciclo  $Q$  tem orientação ímpar.

**Grafos  $k$ -Pfaffianos e seus Subgrafos  $k$ -Pfaffianos**

Na verdade, o Teorema 1.22 é um caso particular de um teorema mais geral. A seguir, anunciaremos versões sucessivamente mais gerais do Teorema 1.22. Finalmente, provaremos a versão mais genérica deste teorema, da qual as outras versões são corolários.

## TEOREMA 1.24

Seja  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma  $k$ -dupla de um grafo  $G$  e  $e := xy$  uma aresta de  $G$ . Então,  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana se e somente se as duas seguintes propriedades são verdadeiras:



1. a restrição de  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  a  $G - e$  é Pfaffiana;
2. a restrição de  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  a  $G - \partial(\{x, y\})$  é Pfaffiana.

Suponha que as seguintes condições são válidas para um grafo  $G$ :

- $G$  é coberto por emparelhamentos;
- $G$  tem um corte justo  $C$  (possivelmente trivial);
- existe uma partição  $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  das arestas de  $C$ ;
- $G_i := G - (C - C_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Então dizemos que  $G_1, G_2, \dots, G_r$  é uma  $r$ -decomposição de  $G$ .

TEOREMA 1.25

Seja  $G_1, G_2, \dots, G_r$  uma  $r$ -decomposição de  $G$ . Seja  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma  $k$ -dupla de  $G$ , e  $\mathbf{D}^i$  a restrição de  $\mathbf{D}$  a  $G_i$ . Então  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana se e somente se toda dupla  $(\mathbf{D}^i, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana, para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

TEOREMA 1.26

Seja  $G$  um grafo,  $G_1, G_2, \dots, G_r$  subgrafos geradores de  $G$  tais que  $\{\mathcal{M}(G_i) : i = 1, 2, \dots, r\}$  é uma partição de  $\mathcal{M}(G)$ . Seja  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma  $k$ -dupla de  $G$ , e  $\mathbf{D}^i$  a restrição de  $\mathbf{D}$  a  $G_i$ . Então  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana se e somente se toda dupla  $(\mathbf{D}^i, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana, para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Demonstração: (parte somente se) Suponha que  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  seja uma dupla Pfaffiana de  $G$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G_i$ , para  $i$  em  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Como  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiano, temos que  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1$ . No entanto,  $\mathbf{D}$  restrito a  $G_i$  é igual a  $\mathbf{D}^i$ . Sendo assim,  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}^i) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1$ . Esta afirmação vale para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $G_i$ . Logo,  $(\mathbf{D}^i, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiano. Esta conclusão vale para todo grafo  $G_i$ .

(parte se) Suponha que  $(\mathbf{D}^i, \boldsymbol{\alpha})$  seja Pfaffiana para  $i = 1, 2, \dots, r$ . Mostraremos que isto implica que  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  também é Pfaffiana. Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Por hipótese,  $M$  é emparelhamento perfeito de algum  $G_i$ , digamos  $G_1$ . Como  $(\mathbf{D}^1, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiano temos que  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}^1) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1$ . No entanto,  $\mathbf{D}^1$  é restrição de  $\mathbf{D}$ . Portanto,  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1$ . Esta afirmação vale para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ . Logo,  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é Pfaffiana.  $\square$

### 1.5.2 Contrações e Cortes Justos em Grafos $k$ -Pfaffianos

Na Seção 1.2.1, o Teorema 1.15 mostra a relação da propriedade de um grafo ser Pfaffiano com as suas  $C$ -contrações, quando  $C$  é justo. Gostaríamos de ter uma generalização deste teorema para grafos  $k$ -Pfaffianos. No entanto, um grafo com duas  $C$ -contrações  $k$ -Pfaffianas, para  $C$  justo, pode não ser  $k$ -Pfaffiano. Por exemplo, o grafo  $G_{19}$ , que será visto no Capítulo 3 (Figura 3.1), tem duas  $C$ -contrações 4-Pfaffianas, para  $C$  justo, mas seu número Pfaffiano é maior do que 4. Por outro lado, vale o seguinte resultado:

**TEOREMA 1.27** (SUBMULTIPLICATIVIDADE DA FUNÇÃO pf)

Seja  $C$  um corte justo de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$ , sejam  $G'$  e  $G''$  as duas  $C$ -contrações de  $G$ . Então,  $\text{pf}(G) \leq \text{pf}(G') \cdot \text{pf}(G'')$ .

Demonstração: Seja  $X$  uma praia de  $C$  tal que  $G' = G/\overline{X} \rightarrow \overline{x}$  e  $G'' := G/X \rightarrow x$ . Ajuste a enumeração dos vértices de  $G$  de forma que todo vértice de  $X$  apareça antes de todo vértice de  $\overline{X}$ . Ajuste também a enumeração dos vértices de  $G'$  e de  $G''$  de forma que  $\overline{x}$  seja o último vértice da enumeração de  $V(G')$  e  $x$  seja o primeiro vértice da enumeração de  $V(G'')$ . Seja  $(\mathbf{D}', \boldsymbol{\alpha}')$  uma  $\text{pf}(G')$ -dupla Pfaffiana de  $G'$ . Analogamente, seja  $(\mathbf{D}'', \boldsymbol{\alpha}'')$  uma  $\text{pf}(G'')$ -dupla Pfaffiana de  $G''$ .

Sejam  $e_1$  e  $e_2$  quaisquer duas arestas múltiplas de  $G'$ . Denote por  $\mathbf{D}' - e_2$  a  $\text{pf}(G')$ -orientação de  $G' - e_2$  obtida pela remoção da aresta  $e_2$  de cada orientação de  $\mathbf{D}'$ . A dupla  $(\mathbf{D}' - e_2, \boldsymbol{\alpha}')$  também é uma  $\text{pf}(G')$ -dupla Pfaffiana. Portanto, uma extensão desta dupla para  $G'$ , obtida orientando-se  $e_2$  na mesma direção de  $e_1$  em  $\mathbf{D}'_i - e_2$ , para  $i = 1, 2, \dots, \text{pf}(G')$ , também é uma  $\text{pf}(G')$ -dupla Pfaffiana. Então, podemos escolher  $(\mathbf{D}', \boldsymbol{\alpha}')$  tal que todo par de arestas múltiplas de  $G'$  tem a mesma direção em cada orientação de  $\mathbf{D}'$ . Nesse caso, temos que, como visto na demonstração do Teorema 1.15, podemos supor que todas as arestas de  $C$  entram no vértice de contração  $\overline{x}$  em cada orientação de  $\mathbf{D}'$ . Analogamente, podemos supor que todas as arestas de  $C$  saem de  $x$  em cada orientação de  $\mathbf{D}''$ . Seja

$$\mathbf{D}_{ij} := \mathbf{D}'_i \cup \mathbf{D}''_j \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha}_{ij} := \boldsymbol{\alpha}'_i \boldsymbol{\alpha}''_j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, \text{pf}(G') \text{ e } j = 1, 2, \dots, \text{pf}(G'').$$

Afirmamos que  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é uma  $\text{pf}(G') \cdot \text{pf}(G'')$ -dupla Pfaffiana de  $G$ . Para tanto, seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Então,  $M' := M \cap E(G')$  é um emparelhamento perfeito de  $G'$  e  $M'' := M \cap E(G'')$  é um emparelhamento perfeito de  $G''$ . O número de inversões de uma permutação associada com  $M$  em  $\mathbf{D}_{ij}$  é igual à soma do número de inversões das permutações associadas com  $M'$  em  $\mathbf{D}'_i$  e  $M''$  em  $\mathbf{D}''_j$ , para  $i = 1, 2, \dots, \text{pf}(G')$  e  $j = 1, 2, \dots, \text{pf}(G'')$ . Portanto,  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}_{ij}) = \text{sgn}(M, \mathbf{D}'_i) \cdot \text{sgn}(M, \mathbf{D}''_j)$ . Sendo assim,

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{\alpha}_{ij} \text{sgn}(M, \mathbf{D}_{ij}) = \sum_i \boldsymbol{\alpha}'_i \text{sgn}(M', \mathbf{D}'_i) \sum_j \boldsymbol{\alpha}''_j \text{sgn}(M'', \mathbf{D}''_j) = 1.$$

Essa conclusão vale para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ . Deduzimos que, como afirmamos,  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é uma  $\text{pf}(G') \cdot \text{pf}(G'')$ -dupla Pfaffiana de  $G$ .  $\square$

A desigualdade  $\text{pf}(G) \leq \text{pf}(G')\text{pf}(G'')$  do teorema anterior nem sempre é justa. Comentamos anteriormente que o grafo  $G_{19}$  (a ser visto no Capítulo 3) tem duas  $C$ -contrações 4-Pfaffianas. No entanto, o número Pfaffiano do  $G_{19}$  é apenas 6, conforme veremos.

# Capítulo 2

## Grafos Quase-Bipartidos

Fischer e Little [5] caracterizaram grafos quase-bipartidos Pfaffianos. O reconhecimento eficiente de grafos quase-bipartidos Pfaffianos estava em aberto. Nossa principal contribuição aqui é um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos [15]. O mesmo princípio utilizado nesse algoritmo pode ser usado em qualquer grafo, mas fornecendo um algoritmo pseudo-polinomial. Além disso, estendemos a caracterização de Fischer e Little para uma classe mais ampla de grafos que abrange os quase-bipartidos, chamados meio-bipartidos.

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo inédito de reconhecimento polinomial de grafos quase-bipartidos Pfaffianos, uma generalização pseudo-polinomial para grafos em geral e também a mencionada caracterização de grafos meio-bipartidos Pfaffianos.

### 2.1 Algoritmo para Quase-Bipartidos

TEOREMA 2.1

*Existe algoritmo polinomial para decidir se um grafo orientado quase-bipartido é Pfaffiano.*

Demonstração: Seja  $D$  um grafo orientado quase-bipartido, sejam  $e := x_1x_2$  e  $f := y_1y_2$  arestas de  $G$  tais que  $G - e - f$  é bipartido e coberto por emparelhamentos. Seja  $(U, W)$  uma bipartição de  $G - e - f$ . Por definição,  $G$  não é bipartido mas é coberto por emparelhamentos. Logo, uma das arestas  $e$  e  $f$  tem ambos os extremos em  $U$ , a outra tem ambos os extremos em  $W$ . Portanto, para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $D$ ,  $e \in M$  se e somente se  $f \in M$ .

Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $D$  contendo  $e$  e  $f$ , e  $N$  um emparelhamento perfeito de  $D$  que não contém nem  $e$  nem  $f$ . Sendo assim, um dos ciclos induzidos por  $M \Delta N$ , digamos  $Q$ , contém tanto  $e$  como  $f$ . Pelo Corolário 1.23,  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $Q$  tem orientação ímpar e  $D - e$  e  $D - x_1 - x_2$  são ambos Pfaffianos. A aresta  $f$  não é admissível em  $D - e$ . Assim,  $D - e$  é Pfaffiano se e somente se  $D - e - f$  é Pfaffiano.

Por outro lado,  $f$  pertence a todos os emparelhamentos perfeitos de  $D - x_1 - x_2$ . Logo,  $D - x_1 - x_2$  é Pfaffiano se e somente se  $D - x_1 - x_2 - y_1 - y_2$  é Pfaffiano. Portanto,  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $Q$  tem orientação ímpar e  $D - e - f$  e  $D - x_1 - x_2 - y_1 - y_2$  são ambos Pfaffianos. Esses dois grafos são bipartidos. Portanto, podemos resolver este problema em tempo polinomial, como visto na Seção 1.3.  $\square$

Pela equivalência entre o Problema do grafo Pfaffiano não-orientado e o Problema do grafo Pfaffiano orientado (Problemas 1.5 e 1.4), descrita na Seção 1.1.5, temos:

### COROLÁRIO 2.2

*Existe algoritmo polinomial para decidir se um grafo não-orientado quase-bipartido é Pfaffiano.*

## 2.2 Grafos Meio-Bipartidos

Nesta seção, mostraremos que a caracterização de Fischer e Little de grafos quase-bipartidos Pfaffianos pode ser estendida para a classe dos grafos meio-bipartidos.

Começamos dando uma caracterização de grafos meio-bipartidos Pfaffianos em função de grafos quase-bipartidos Pfaffianos. Seja  $G$  um grafo meio-bipartido, e  $H$  seu subgrafo gerador com bipartição  $\{U, W\}$  como descrito na definição de meio-bipartidos. Seja  $E_U := E(G[U])$  e  $E_W := E(G[W])$ . Seja  $e$  a única aresta de  $E_U$ . Para cada aresta  $f$  de  $E_W$ , seja:

$$G(f) := G - (E_W - f) = H + e + f.$$

### TEOREMA 2.3

*Para toda aresta  $f$  de  $E_W$ , o grafo  $G(f)$  é quase-bipartido. Além disso,  $G$  é Pfaffiano se e somente se  $G(f)$  é Pfaffiano, para cada aresta  $f$  de  $E_W$ .*

Demonstração: Seja  $f$  uma aresta de  $E_W$ . Vamos mostrar que  $G(f)$  é quase-bipartido. Pela definição, o grafo  $H$  é bipartido e coberto por emparelhamentos. Portanto,  $H$  é conexo,  $\{U, W\}$  sua única bipartição. Portanto,  $G(f)$  é conexo e não é bipartido. Cada aresta de  $G(f) - e - f$  é admissível em  $H$ , e portanto admissível em  $G(f)$ . Por definição,  $G$  é coberto por emparelhamentos. Então,  $G$  tem um emparelhamento perfeito  $M$  contendo  $f$ . Como  $\{U, W\}$  é uma equipartição de  $V(G)$ , temos que  $M$  contém a aresta  $e$  e nenhuma outra aresta de  $E_W - f$ . Portanto,  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G(f)$ . Deduzimos que  $G(f)$  é coberto por emparelhamentos. Logo,  $G(f)$  é quase-bipartido. Esta conclusão vale para cada aresta  $f$  de  $E_W$ .

Vamos agora mostrar que  $G$  é Pfaffiano se e somente se  $G(f)$  é Pfaffiano para cada aresta  $f$  de  $E_W$ . Para cada aresta  $f$  em  $E_W$ , o grafo  $G(f)$  é um subgrafo conforme de  $G$ . Portanto, se  $G$  é Pfaffiano então  $G(f)$  é Pfaffiano.

Para provar a recíproca, suponha que  $G(f)$  é Pfaffiano, para cada aresta  $f$  de  $E_W$ . Mostraremos agora que existe uma orientação Pfaffiana  $D(f)$  de  $G(f)$  tal que para quaisquer duas arestas distintas  $f_1$  e  $f_2$  de  $E_W$ ,  $D(f_1) - f_1 = D(f_2) - f_2$ .

Seja  $f$  uma aresta de  $E_W$ , e  $D(f)$  uma orientação Pfaffiana de  $G(f)$ . O grafo orientado  $D(f) - e - f$  é um subgrafo conforme de  $D(f)$ , e portanto Pfaffiano. Mas ele também é uma orientação de  $H$ . Por outro lado, o grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $H$  tem uma única orientação Pfaffiana, a menos de similaridade, pelo Teorema 1.13. Portanto, para arestas distintas  $f_1$  e  $f_2$  de  $E_W$ ,  $D(f_1) - e - f_1$  e  $D(f_2) - e - f_2$  são similares. Seja  $C$  o corte de  $H$  no qual  $D(f_1) - e - f_1$  e  $D(f_2) - e - f_2$  diferem. Então,  $C$  tem uma praia  $X$  de vértices de  $H$ . Seja  $C'$  o corte correspondente de  $D(f_2)$ , ou seja,  $C'$  é o corte de  $D(f_2)$  com uma das praias igual a  $X$ . Pela reversão das arestas de  $C'$  em  $D(f_2)$ , obtemos outra orientação de  $G(f_2)$ , similar a  $D(f_2)$ , que também é Pfaffiana. Sendo assim, podemos supor que  $D(f_1) - e - f_1 = D(f_2) - e - f_2$ . Podemos agora reverter a orientação de ambas as arestas  $e$  e  $f_2$  em  $D(f_2)$ , se necessário, de forma que  $D(f_1) - f_1 = D(f_2) - f_2$ . Esta reversão preserva a propriedade Pfaffiana da orientação, pois um emparelhamento perfeito de  $G(f_2)$  contém um dentre  $e$  e  $f_2$  se e somente se contém ambos. Deduzimos que existe uma orientação Pfaffiana  $D(f_2)$  de  $G(f_2)$  tal que  $D(f_1) - f_1 = D(f_2) - f_2$ . Esta conclusão vale para todo par de arestas  $f_1$  e  $f_2$  de  $E_W$ .

Agora seja  $D$  uma orientação de  $G$  que é a extensão comum das orientações  $D(f)$  de  $G(f)$ , para todas as arestas  $f$  de  $E_W$ . Vamos provar que  $D$  é orientação Pfaffiana de  $G$ . Para provar isso, seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ , seja  $N$  um emparelhamento perfeito do grafo bipartido  $H$ . Afirmamos que  $M$  e  $N$  têm o mesmo sinal em  $D$ . Para provar isso, vamos observar que  $M$  e  $N$  são ambos emparelhamentos perfeitos do grafo quase-bipartido  $G(f)$ , para algum  $f$  em  $E_W$ . Se  $M$  é emparelhamento perfeito de  $H$  então a afirmação é trivialmente verdadeira, para qualquer aresta  $f$ . Podemos, portanto, supor que  $M$  contém uma aresta em  $E_U \cup E_W$ . Então,  $M$  contém  $e$  e precisamente uma aresta em  $E_W$ , digamos a aresta  $f$ . De fato,  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G(f)$ . Dado que  $D(f)$  é Pfaffiana, então  $M$  e  $N$  têm o mesmo sinal em  $D(f)$ . Mas  $D(f)$  é um subgrafo gerador de  $D$ . Logo,  $M$  e  $N$  têm o mesmo sinal em  $D$ . Esta conclusão vale para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ . Portanto,  $D$  é orientação Pfaffiana de  $G$ .  $\square$

Do teorema anterior, podemos trivialmente derivar um algoritmo polinomial que decide se um grafo meio-bipartido é Pfaffiano.

#### COROLÁRIO 2.4

*Existe um algoritmo polinomial para decidir se um grafo meio-bipartido é Pfaffiano.*

Seja  $G$  um grafo. Uma *bissubdivisão* de  $G$  é obtida substituindo-se zero ou mais arestas de  $G$  por caminhos, cada um contendo um número par de vértices internos. Um “*splice*” de  $G$  com um  $K_4$  é obtido pela substituição de um vértice  $v$  de grau três de  $G$  por um

triângulo, de forma que cada vértice deste triângulo é incidente em precisamente uma das arestas anteriormente incidentes em  $v$ . Podemos fazer o splice de  $G$  com zero ou mais  $K_4$ 's (em vértices de grau três de  $G$ ): diz-se que o grafo resultante é uma  $K_4$ -decoreção de  $G$ . A Figura 2.1 mostra uma  $K_4$ -decoreção do  $K_{3,3}$ .

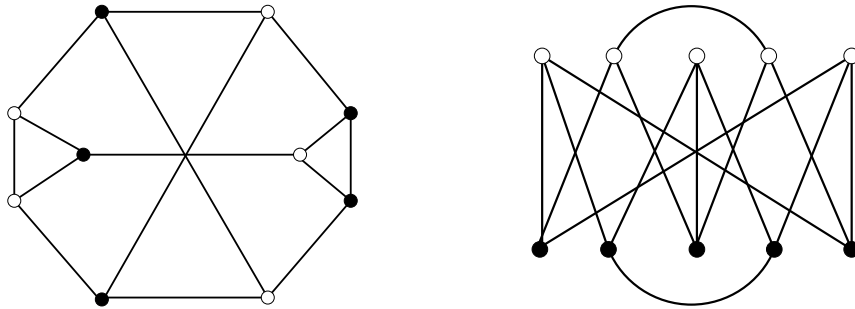


Figura 2.1: Duas representações de uma  $K_4$ -decoreção do  $K_{3,3}$ .

Em 1975, Little apresentou a seguinte caracterização de grafos bipartidos Pfaffianos [9]:

**TEOREMA 2.5**

*Um grafo bipartido  $G$  é não-Pfaffiano se e somente se  $G$  contém uma bissubdivisão conforme de  $K_{3,3}$ .*

O seguinte resultado é a caracterização dos grafos quase-bipartidos Pfaffianos provada por Fischer e Little [5].

**TEOREMA 2.6**

*Um grafo quase-bipartido  $G$  é não-Pfaffiano se e somente se  $G$  contém uma bissubdivisão conforme de uma  $K_4$ -decoreção de  $K_{3,3}$ ,  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$  (veja Figura 2.2).*

Baseando-nos no Teorema 2.3, temos o seguinte resultado.

**TEOREMA 2.7**

*Um grafo meio-bipartido  $G$  é não-Pfaffiano se e somente se  $G$  contém uma bissubdivisão conforme de uma  $K_4$ -decoreção de  $K_{3,3}$ ,  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$ .*

## 2.3 Certificados para o Algoritmo

Seja  $\mathcal{C}$  a classe formada por todos os grafos quase-bipartidos e também por todos os grafos bipartidos cobertos por emparelhamentos. É fácil ver que esta classe é fechada

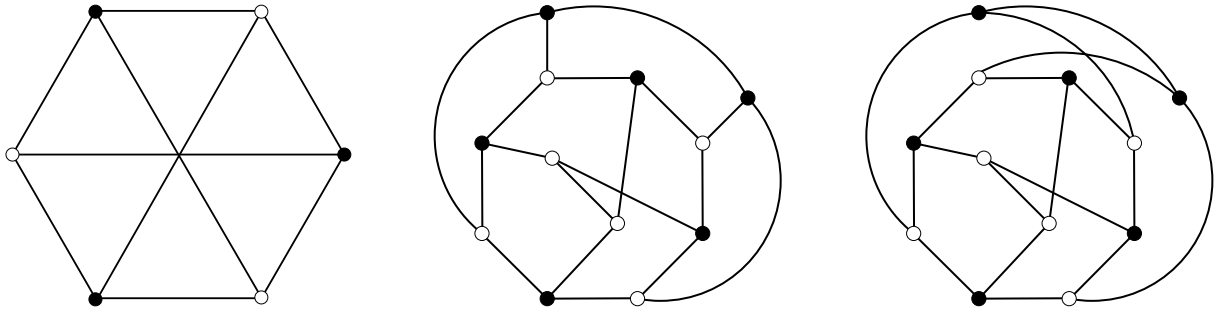


Figura 2.2: Grafos  $K_{3,3}$ ,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  citados no Teorema 2.6.

sob a operação de remoção de orelha removível. (No caso de grafo quase-bipartido e orelha dupla, o grafo resultante é bipartido e coberto por emparelhamentos.) O algoritmo de McCuaig, Robertson, Seymour e Thomas unido com o nosso algoritmo formam um algoritmo para resolver o Problema do Grafo Pfaffiano para a classe  $\mathcal{C}$ . Seja  $G \in \mathcal{C}$ , não-Pfaffiano. Vamos descrever como obter um *certificado* de que  $G$  não é Pfaffiano, ou seja, um subgrafo conforme  $H$  de  $G$  que seja uma bissubdivisão de  $K_4$ -decoreção de  $K_{3,3}$ ,  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$  (Teoremas 2.5 e 2.6).

Pelo Teorema 1.8, ou  $G$  é um certificado ou  $G$  tem uma orelha removível  $R$  tal que  $G - R$  tem um certificado. Consideremos o conjunto  $\mathcal{R}$  de todas as orelhas removíveis de  $G$ . Este conjunto é facilmente determinado em tempo polinomial. Se, para todo  $R \in \mathcal{R}$ , o grafo  $G - R$  é Pfaffiano então, pelo Teorema 1.8, todo subgrafo próprio conforme de  $G$  é Pfaffiano. Portanto,  $G$  é certificado. Portanto, se  $G - R$  é não-Pfaffiano para algum  $R \in \mathcal{R}$  então determinamos um certificado para  $G - R$ . Este certificado será também um certificado para  $G$ , pelo Teorema 1.8.

Finalmente, um certificado para grafos meio-bipartidos são obtidos pela obtenção de certificado de quase-bipartido, conforme o Teorema 2.3.

## 2.4 Generalizações do Algoritmo

Nesta seção mostramos como o método utilizado no desenvolvimento do algoritmo de reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos pode ser generalizado, obtendo-se algoritmos pseudo-polinomiais.

### TEOREMA 2.8

Seja  $D$  um grafo orientado e  $R$  um conjunto de  $r$  arestas de  $D$  tal que  $D - R$  é planar. Então é possível decidir se  $D$  é Pfaffiano em tempo  $2^r P(n)$ , onde  $P(n)$  é um polinômio



no número  $n$  de vértices de  $D$ .

Demonstração: Seja  $T(r, n)$  um limite superior para o tempo de execução do algoritmo de reconhecimento aplicado a um grafo  $D$  com no máximo  $n$  vértices e no máximo  $r$  arestas em  $R$ . Se  $D$  não tem emparelhamento perfeito, então ele é Pfaffiano. Então, podemos supor que  $D$  tem emparelhamento perfeito. Se o grafo orientado  $D$  é planar, vimos anteriormente na Seção 1.3 que podemos verificar em tempo polinomial se  $D$  é Pfaffiano. Então,  $T(0, n) \leq P'(n)$ , para um polinômio  $P'$  sobre  $n$ . Sendo assim, podemos supor que  $D$  não é planar. Seja  $e = xy$  uma aresta qualquer de  $R$ . Caso  $D$  não tenha emparelhamento perfeito contendo  $e$  então, pelo Teorema 1.21,  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $D - e$  é Pfaffiano. Se em  $D$  todo emparelhamento perfeito contém  $e$  então, pelo Teorema 1.21,  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $D - x - y$  é Pfaffiano. Suponha agora que  $D$  contenha tanto emparelhamentos perfeitos contendo  $e$  quanto emparelhamentos perfeitos que não contém  $e$ . É possível encontrar, em tempo polinomial, emparelhamentos perfeitos  $M$  e  $N$  de  $G$  tais que  $M$  não contém  $e$  e  $N$  contém  $e$ . Caso  $M$  e  $N$  não tenham o mesmo sinal,  $D$  não é Pfaffiano. Portanto, podemos supor que estes emparelhamentos têm o mesmo sinal. Pelo Teorema 1.22,  $D$  é Pfaffiano se e somente se  $D - e$  e  $D - x - y$  forem ambos Pfaffianos. Em todos os casos, executamos um número polinomial de operações e reduzimos o problema a um subconjunto dos grafos  $D - e$  e  $D - x - y$ . Além disso, as restrições de  $R$  a  $E(D - e)$  e a  $E(D - x - y)$  têm ambas no máximo  $r - 1$  arestas. Portanto, temos

$$T(r, n) \leq 2T(r - 1, n) + P''(n),$$

para  $P''$  polinômio sobre  $n$ . Sendo assim,  $T(r, n) \leq 2^r P(n)$ , para  $P$  polinômio sobre  $n$ .  $\square$

O método do algoritmo descrito acima foi aplicado sobre os grafos planares. No entanto, esse método pode ser aplicado sobre qualquer classe de grafos para a qual exista algoritmo polinomial que decida se o grafo é Pfaffiano. Em particular, o resultado a seguir é demonstrado de forma análoga.

#### TEOREMA 2.9

Seja  $D$  um grafo orientado e  $R$  um conjunto de  $r$  arestas de  $D$  tal que  $D - R$  é bipartido. Então é possível decidir se  $D$  é Pfaffiano em tempo  $2^r P(n)$ , onde  $P(n)$  é um polinômio no número  $n$  de vértices de  $D$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Grafos $k$ -Pfaffianos

Neste capítulo, apresentamos novos resultados estruturais sobre grafos  $k$ -Pfaffianos. Graças a esses resultados obtivemos um contra-exemplo para uma conjectura de Norine sobre o número Pfaffiano de grafos.

Galluccio e Loeb [6] e, independentemente, Tesler [20] provaram o seguinte resultado fundamental:

**TEOREMA 3.1**

*Se  $G$  é imersível em uma superfície orientável de genus  $g$  então  $\text{pf}(G) \leq 4^g$ .*

Em 2006, Norine [18] apresentou a seguinte conjectura:

**CONJECTURA 3.2**

*O número Pfaffiano de um grafo é sempre uma potência de quatro.*

Na verdade, em 1967, Kasteleyn [7, pág. 99] afirmou uma crença similar: “If the genus of the graph is  $g$  the number of Pfaffians required is  $4^g$ ”.

Adicionando resultados favoráveis à conjectura, Norine provou o seguinte resultado:

**TEOREMA 3.3**

*Todo grafo 3-Pfaffiano é Pfaffiano e todo grafo 5-Pfaffiano é 4-Pfaffiano.*

Pelo Teorema 3.3, é imediato que um contra-exemplo para a Conjectura 3.2, se existente, teria número Pfaffiano pelo menos seis. Neste capítulo, mostramos que o grafo  $G_{19}$ , mostrado na Figura 3.1(a), é 6-Pfaffiano, mas não 4-Pfaffiano.

Descreveremos agora como o grafo  $G_{19}$  pode ser obtido. A Figura 3.1(b) mostra o grafo  $G_{21}$ . Este grafo é obtido de duas cópias disjuntas,  $G_1$  e  $G_2$ , do  $K_{3,2}$ , com conjuntos de vértices  $X_1$  e  $X_2$ , adicionando aresta de todo vértice da parte majoritária de  $G_1$  a todo vértice da parte majoritária de  $G_2$ . Estas arestas adicionadas formam um  $K_{3,3}$  e constituem um corte justo de  $G_{21}$ , o qual denotamos por  $C_{21}$ . O grafo  $G_{19}$  é obtido de

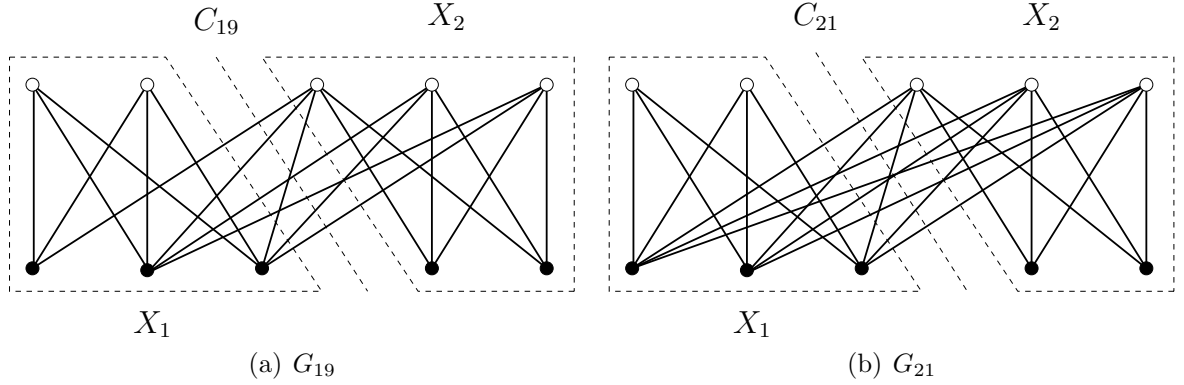


Figura 3.1: Os grafos  $G_{19}$  e  $G_{21}$ .

$G_{21}$  pela remoção de duas arestas adjacentes de  $C_{21}$ : o corte justo resultante é chamado de  $C_{19}$ .

Daremos a seguir uma descrição curta da ideia da demonstração. O conceito de  $r$ -decomposição foi definido na Seção 1.5.1, na página 22.

Na Seção 3.1, provamos que  $G_{21}$  é 6-Pfaffiano e também que  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano, para toda aresta  $e$  de  $G_{19}$ . Fazemos isto demonstrando o seguinte resultado fundamental:

**TEOREMA 3.4 (COMPOSIÇÃO)**

*Se um grafo tem uma  $r$ -decomposição em grafos Pfaffianos então é  $2r$ -Pfaffiano.*

Vamos agora delinear a prova de que  $G_{21}$  é 6-Pfaffiano. Para tanto, usaremos o Teorema 3.4. Vamos adotar a notação utilizada na definição de  $r$ -decomposição, em que  $G$  é  $G_{21}$  e o corte justo  $C$  é o corte  $C_{21}$ . Pode-se mostrar que  $C$  tem uma partição em três blocos  $\{C_1, C_2, C_3\}$ , tal que cada  $C_i$  induz um  $P_4$ . Mostra-se também que o grafo  $G_i$  correspondente é Pfaffiano. Portanto,  $G_{21}$  é 6-Pfaffiano. Assim,  $G_{19}$  também é 6-Pfaffiano.

Em seguida, provamos o seguinte teorema, e mostramos que o grafo  $G_{19}$  não o satisfaz. Isto implica que  $G_{19}$  não é 4-Pfaffiano. Denotamos por  $\mathbf{J}$  a matriz quadrada com todas as entradas iguais a 1. Denotamos por  $\mathbf{I}$  a matriz identidade.

**TEOREMA 3.13 (UNICIDADE DA MATRIZ ASSINATURA)**

*Seja  $G$  um grafo não-Pfaffiano,  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma 4-dupla Pfaffiana normal de  $G$ . Então,  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}/2$ . Ademais, a menos de linhas múltiplas,  $\text{sgn}(\mathcal{M}, \mathbf{D}) = \mathbf{J} - 2\mathbf{I}$ .*

Também mostramos que o grafo  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano para toda aresta  $e$ . Portanto,  $G_{19}$  é 6-Pfaffiano e minimal não 4-Pfaffiano. Na verdade, acreditamos que  $G_{19}$  é o menor contra-exemplo à Conjectura 3.2.

## 3.1 Composição de Grafos Pfaffianos

Nesta seção provamos o Teorema da Composição. Em seguida, utilizamos este teorema para provar que  $G_{21}$  é 6-Pfaffiano e que  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano, para toda aresta  $e$ .

### 3.1.1 Composição de Orientações Pfaffianas

TEOREMA 3.4 (COMPOSIÇÃO)

Se um grafo tem uma  $r$ -decomposição em grafos Pfaffianos então é  $2r$ -Pfaffiano.

Demonstração: Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos. Suponha que  $G$  tenha uma  $r$ -decomposição em grafos Pfaffianos. Seja  $C$  corte justo de  $G$ , e  $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  partição de  $C$  tal que  $G_i := G - (C - C_i)$  é Pfaffiano, para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Utilizaremos a mesma enumeração de vértices para determinar os sinais dos emparelhamentos perfeitos de cada grafo  $G_i$  e do grafo  $G$ . Para  $i = 1, 2, \dots, r$ , seja  $D_i$  uma orientação Pfaffiana de  $G_i$ . Ajuste a notação, revertendo, se necessário, as arestas incidentes em algum vértice  $v$ , de forma que todo emparelhamento perfeito de  $G_i$  tenha sinal igual a um em  $D_i$ . Seja  $D'_i$  uma extensão arbitrária de  $D_i$  para uma orientação de  $G$ . Seja  $D''_i := D'_i \otimes C_i$ . Seja

$$\mathbf{D} := (D'_1, D'_2, \dots, D'_r, D''_1, D''_2, \dots, D''_r),$$

$$\alpha_1 := \alpha_2 := \dots := \alpha_r = 1/2 \quad \text{e} \quad \alpha_{r+1} := \alpha_{r+2} := \dots := \alpha_{2r} = -1/2.$$

Afirmamos que  $(\mathbf{D}, \alpha)$  é uma  $2r$ -dupla Pfaffiana de  $G$ . Para tanto, seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Como  $C$  é um corte justo,  $M$  tem precisamente uma aresta em  $C$ . Como  $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  é uma partição de  $C$ ,  $M$  tem aresta em precisamente um  $C_i$ , digamos  $C_k$ . Então,  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G_k$ . Para  $i \neq k$ , o emparelhamento  $M$  não tem aresta em  $C_i$ , e portanto  $M$  tem sinais iguais em  $D'_i$  e em  $D''_i$ . Consequentemente,  $\mathbf{D} \cdot \alpha = 1/2[\text{sgn}(M, D'_k) - \text{sgn}(M, D''_k)]$ . Como  $M$  tem precisamente uma aresta em  $C_i$ , temos que

$$\text{sgn}(M, D'_k) = \text{sgn}(M, D_k) = 1 \quad \text{e} \quad \text{sgn}(M, D''_k) = -\text{sgn}(M, D_k) = -1.$$

Sendo assim,  $\mathbf{D} \cdot \alpha = 1$ . Esta conclusão vale para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ . Como afirmamos anteriormente,  $G$  é  $2r$ -Pfaffiano.  $\square$

Deste teorema podemos obter os seguintes dois corolários interessantes:

COROLÁRIO 3.5

Seja  $G$  um grafo não-Pfaffiano,  $e = uv$  uma aresta de  $G$ , tal que  $G - e$  e  $G - u - v$  sejam ambos Pfaffianos. Então,  $G$  é 4-Pfaffiano.

Demonstração: Considere o corte justo trivial  $C := \partial_G(u)$ , e sua partição  $\{C_1, C_2\}$ , onde  $C_1 = C - e$  e  $C_2 = \{e\}$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $G_i := G - (C - C_i)$ . Note que  $G_1 = G - e$ . No grafo  $G_2$ , a aresta  $e$  é obrigatória. Portanto,  $G_2$  é Pfaffiano se e somente se  $G_2 - u - v$  for Pfaffiano. No entanto,  $G_2 - u - v = G - u - v$ , um grafo Pfaffiano. Sendo assim,  $G_1$  e  $G_2$  são uma 2-decomposição em grafos Pfaffianos de  $G$ . Portanto, pelo teorema,  $G$  é 4-Pfaffiano.  $\square$

### COROLÁRIO 3.6

*Todo grafo minimal (sob remoção de arestas) não-Pfaffiano coberto por emparelhamentos é 4-Pfaffiano.*

Demonstração: Seja  $G$  um grafo minimal não-Pfaffiano coberto por emparelhamentos, e  $e = uv$  uma aresta de  $G$ . Como  $G$  é minimal não-Pfaffiano,  $G - e$  é Pfaffiano. Como  $G$  é coberto por emparelhamentos, existe uma aresta  $f$  adjacente a  $e$ . Como  $G$  é minimal não-Pfaffiano,  $G - f$  é Pfaffiano. Além disso,  $G - f - u - v$  é um subgrafo conforme de  $G - f$  (pois  $e = uv$ ). Portanto,  $G - f - u - v$  é Pfaffiano. No entanto,  $G - f - u - v = G - u - v$ , pois  $f$  compartilha um extremo com  $e$ . Sendo assim,  $G - u - v$  é Pfaffiano. Portanto, pelo corolário anterior,  $G$  é 4-Pfaffiano.  $\square$

### Generalização do Teorema da Composição

Na verdade, o Teorema da Composição (Teorema 3.4) é um caso particular do seguinte teorema mais geral.

#### TEOREMA 3.7

*Seja  $G_1, G_2, \dots, G_r$  uma  $r$ -decomposição de  $G$ . Seja  $p_i := \text{pf}(G_i)$  e seja  $p := \sum_{i=1}^r p_i$ . Então,  $G$  é  $2p$ -Pfaffiano.*

Demonstração: Seja  $C$  o corte justo de  $G$  e  $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  a partição de  $C$  tais que  $G_i = G - (C - C_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$ . Cada par  $(D, \alpha)$  da  $p_i$ -dupla Pfaffiana de  $G_i$  gera duas orientações de  $G$ , ditas *gêmeas*, obtidas da seguinte forma: uma delas é uma extensão arbitrária de  $D$  a  $G$ ; a outra é obtida desta mediante a reversão das arestas de  $C_i$ . Os respectivos coeficientes serão  $\alpha/2$  e  $-\alpha/2$ . Também dizemos que os pares  $(D'\alpha/2)$  e  $(D'', -\alpha/2)$  são *gêmeos*. Efetuando esta operação para cada  $G_i$ , obtemos uma  $2p$ -dupla  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$ . Vamos agora mostrar que esta  $2p$ -dupla é Pfaffiana.

Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Por hipótese,  $M$  é emparelhamento perfeito de precisamente um grafo  $G_i$ , digamos  $G_1$ . Para  $i = 2, 3, \dots, r$ , temos que  $M \cap C_i = \emptyset$ . Portanto, o sinal de  $M$  em cada orientação oriunda de orientação de  $G_i$  e em sua gêmea

coincidem. Além disso, estas duas orientações têm coeficientes com sinais contrários e mesmo valor absoluto. Assim,

$$\text{sgn}(M, \mathbf{D}) \cdot \alpha = \text{sgn}(M, \mathbf{F}) \cdot \beta,$$

onde  $(\mathbf{F}, \beta)$  é a  $2p_1$ -dupla considerando apenas as orientações oriundas de orientações de  $G_1$ .

Sabemos que  $|M \cap C_1| = 1$ . Sejam  $(D', \alpha')$  e  $(D'', \alpha'')$  pares gêmeos de  $\mathbf{F}$  oriundos do par  $(D, \alpha)$  da dupla Pfaffiana de  $G_1$ . Portanto, o sinal de  $M$  em  $D'$  e em  $D''$  têm sinais contrários. Mas os correspondentes coeficientes  $\alpha'$  e  $\alpha''$  também. Além disso,  $\alpha' - \alpha'' = \alpha$ . Então,  $\text{sgn}(M, D') \cdot \alpha' + \text{sgn}(M, D'') \cdot \alpha'' = \text{sgn}(M, D) \cdot \alpha$ . Esta conclusão vale para todo par  $(D, \alpha)$  da dupla Pfaffiana de  $G_1$ . Podemos portanto concluir que

$$\text{sgn}(M, \mathbf{D}) \cdot \alpha = \text{sgn}(M, \mathbf{F}) \cdot \beta = 1.$$

□

### COROLÁRIO 3.8

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos, e  $e = uv$  uma aresta de  $G$ . Então,  $G$  é  $2(\text{pf}(G - e) + \text{pf}(G - u - v))$ -Pfaffiano.

Demonstração: Considere o corte justo trivial  $C := \partial_G(u)$ , e sua partição  $\{C_1, C_2\}$ , onde  $C_1 = C - e$  e  $C_2 = \{e\}$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $G_i := G - (C - C_i)$ . Então,  $G_1$  e  $G_2$  são uma 2-decomposição de  $G$ . Note que  $G_1 = G - e$ . No grafo  $G_2$ , a aresta  $e$  é obrigatória. Portanto,  $\text{pf}(G_2) = \text{pf}(G_2 - u - v)$ . No entanto,  $G_2 - u - v = G - u - v$ . Então,  $\text{pf}(G_2) = \text{pf}(G - u - v)$ . Portanto, pelo teorema,  $G$  é  $2(\text{pf}(G - e) + \text{pf}(G - u - v))$ -Pfaffiano. □

### COROLÁRIO 3.9

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos minimal (sob remoção de arestas) não  $k$ -Pfaffiano. Então,  $G$  é  $4k$ -Pfaffiano.

Demonstração: Seja  $G$  um grafo minimal não  $k$ -Pfaffiano coberto por emparelhamentos, e  $e = uv$  uma aresta de  $G$ . Como  $G$  é minimal não  $k$ -Pfaffiano,  $G - e$  é  $k$ -Pfaffiano. Como  $G$  é coberto por emparelhamentos, existe uma aresta  $f$  adjacente a  $e$ . Como  $G$  é minimal não  $k$ -Pfaffiano,  $G - f$  é  $k$ -Pfaffiano. Além disso,  $G - f - u - v$  é um subgrafo conforme de  $G - f$  (pois  $e = uv$ ). Portanto,  $G - f - u - v$  é  $k$ -Pfaffiano. No entanto,  $G - f - u - v = G - u - v$ , pois  $f$  compartilha um extremo com  $e$ . Sendo assim,  $G - u - v$  é Pfaffiano. Portanto, pelo corolário anterior,  $G$  é  $4k$ -Pfaffiano. □

### 3.1.2 O Grafo $G_{21}$ é 6-Pfaffiano e o grafo $G_{19} - e$ é 4-Pfaffiano

Agora chegamos ao resultado a seguir como uma consequência direta do Teorema 3.4.

#### TEOREMA 3.10

Seja  $R$  um subconjunto (possivelmente vazio) do corte justo  $C_{21}$  de  $G_{21}$ . Se  $C_{21} - R$  pode ser coberto por  $r$  caminhos  $P_4$ 's aresta-disjuntos então  $G_{21} - R$  é  $2r$ -Pfaffiano.

Demonstração: Suponha que  $C_{21} - R$  é coberto por  $r$  caminhos  $P_4$ . Sejam  $C_1, \dots, C_r$  os conjuntos de arestas dos  $r$  caminhos  $P_4$ . Pelo Teorema 3.4, basta mostrar que  $G_i := G - (C - C_i)$  é Pfaffiano, para  $i = 1, \dots, r$ . Para tanto, note que as  $C_i$ -contrações de  $G_i$  são iguais a  $K_{3,3} - e$ , a menos de arestas múltiplas. Como o  $K_{3,3} - e$  é planar, ele é Pfaffiano. Portanto, ambas as  $C_i$ -contrações de  $G_i$  são Pfaffianas. Além disso,  $C_i$  é um corte justo de  $G_i$ . Deduzimos que  $G_i$  é Pfaffiano. Logo, a afirmação é verdadeira.  $\square$

#### TEOREMA 3.11

O grafo  $G_{21}$  é 6-Pfaffiano e, para toda aresta  $e$ , o grafo  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano.

Demonstração: Note que  $G_{21}[C_{21}]$  é um  $K_{3,3}$  (veja Figura 3.1(b)). Seja  $S$  qualquer con-

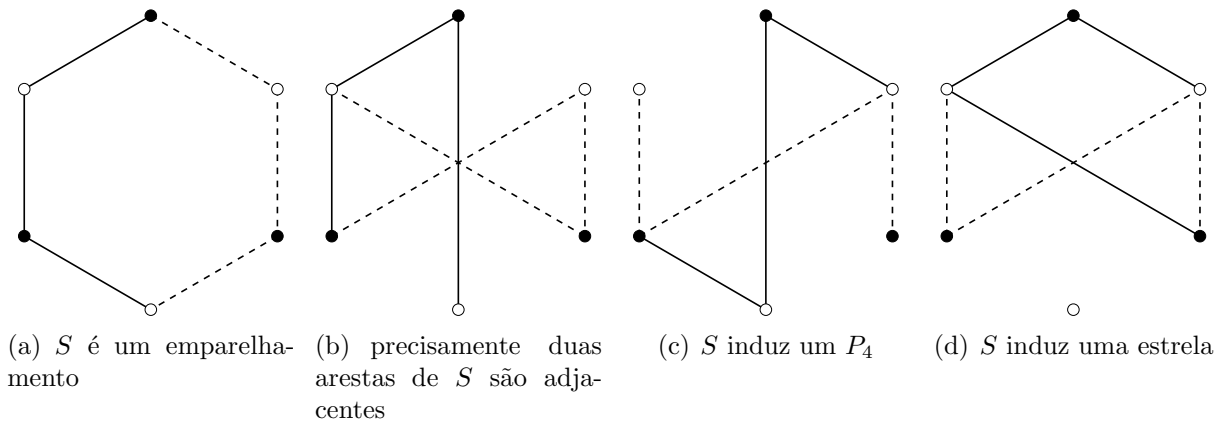


Figura 3.2: Decomposição de  $K_{3,3} - S$  em dois  $P_4$ 's, onde  $S$  é um conjunto de três arestas.

junto de três arestas do  $K_{3,3}$ . Como indicado na Figura 3.2,  $K_{3,3} - S$  é a união de dois  $P_4$ 's. Em particular, se  $S$  é um conjunto de arestas de um  $P_4$  do  $K_{3,3}$ , deduzimos que o  $K_{3,3}$  é a união de três  $P_4$ 's. Pelo Teorema 3.10, o grafo  $G_{21}$  é 6-Pfaffiano.

Vamos mostrar que, para toda aresta  $e$ ,  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano. Vamos considerar inicialmente o caso em que  $e \in C_{19}$ . Para qualquer aresta  $e$  de  $C_{19}$ , o corte  $C_{19} - e$  induz um  $K_{3,3}$  menos três arestas. Como visto na Figura 3.2, este subgrafo induzido pode ser coberto por dois  $P_4$ 's. Neste caso,  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano, pelo Teorema 3.10.

Vamos considerar agora o caso em que  $e$  não está em  $C_{19}$ . Então, a menos de arestas múltiplas, uma das  $C_{19}$ -contrações de  $G_{19} - e$  é um  $K_{3,3} - e$ , a outra  $C_{19}$ -contração é um  $K_{3,3}$ . Como o  $K_{3,3}$  é 4-Pfaffiano e o  $K_{3,3} - e$  é Pfaffiano, temos que  $G_{19} - e$  é 4-Pfaffiano, pela submultiplicatividade da função  $\text{pf}$  (ver Teorema 1.27). Esta conclusão vale para toda aresta  $e$  de  $G_{19}$ .  $\square$

## 3.2 Grafos 4-Pfaffianos

Nesta seção provamos que o grafo  $G_{19}$  não é 4-Pfaffiano. Fazemos isto provando o Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura, e então aplicando-o para o grafo  $G_{19}$  para mostrar, por contradição, que ele não é 4-Pfaffiano.

### 3.2.1 Unicidade da Matriz Assinatura

Para provarmos o Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura, precisamos do seguinte resultado, provado por Norine [18]. A seguir apresentamos uma demonstração, baseada na demonstração feita por Norine.

LEMA 3.12

Seja  $G$  um grafo,  $(D_1, D_2, \dots, D_r)$  uma família de orientações de  $G$ , com  $r$  ímpar. Então, existe uma orientação  $D$  de  $G$  tal que a igualdade abaixo é verdadeira para todo emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ :

$$\text{sgn}(M, D) = \text{sgn}(M, D_1) \text{sgn}(M, D_2) \dots \text{sgn}(M, D_r).$$

Demonstração: Seja  $e$  uma aresta de  $G$ . Esta aresta pode ser orientada de duas formas em uma orientação  $D_i$ . Como  $r$  é ímpar, uma orientação de  $e$  acontece em precisamente um número ímpar de orientações de  $D_1, D_2, \dots, D_r$ . Seja  $D$  a orientação de  $G$  que atribui esta orientação a cada aresta  $e$  de  $G$ . Seja  $S_i$  o conjunto das arestas que discordam em  $D_i$  e  $D$ . Então, para cada emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ ,  $\text{sgn}(M, D_i) = (-1)^{|M \cap S_i|} \text{sgn}(M, D)$ . Então,

$$\text{sgn}(M, D_1) \text{sgn}(M, D_2) \dots \text{sgn}(M, D_r) = (-1)^{|M \cap S_1| + |M \cap S_2| + \dots + |M \cap S_r|} \text{sgn}(M, D)^r.$$

Como  $D$  discorda de um número par de orientações em cada aresta, temos que  $|M \cap S_1| + |M \cap S_2| + \dots + |M \cap S_r|$  é par. Além disso, como  $r$  é ímpar  $\text{sgn}(M, D)^r = \text{sgn}(M, D)$ . Portanto,

$$\text{sgn}(M, D_1) \text{sgn}(M, D_2) \dots \text{sgn}(M, D_r) = \text{sgn}(M, D).$$

$\square$



## TEOREMA 3.13 (UNICIDADE DA MATRIZ ASSINATURA)

Seja  $G$  um grafo não-Pfaffiano,  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma 4-dupla Pfaffiana normal de  $G$ . Então,  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}/2$ . Ademais, a menos de linhas múltiplas,  $\text{sgn}(\mathcal{M}, \mathbf{D}) = \mathbf{J} - 2\mathbf{I}$ .

Demonstração: Considere a matriz assinatura  $\mathbf{S} := \text{sgn}(\mathcal{M}, \mathbf{D})$  de  $\mathbf{D}$ . Por hipótese,  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  é 4-Pfaffiano. Assim,  $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$ .

## LEMA 3.14

Para quaisquer duas linhas distintas  $\mathbf{S}_i$  e  $\mathbf{S}_j$  de  $\mathbf{S}$ , existem índices de colunas  $r, s$  e  $t$  tais que  $\mathbf{S}_{ir} = \mathbf{S}_{jr} = 1$ ,  $-\mathbf{S}_{is} = \mathbf{S}_{js} = 1$  e  $\mathbf{S}_{it} = -\mathbf{S}_{jt} = 1$ .

Demonstração: Claramente,  $(\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_j) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 2$ . Por hipótese,  $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ . Portanto, existe um índice de coluna  $r$  tal que  $\mathbf{S}_{ir} + \mathbf{S}_{jr} > 0$ . Porém,  $\{\mathbf{S}_{ir}, \mathbf{S}_{jr}\} \subseteq \{1, -1\}$ . Logo,  $\mathbf{S}_{ir} = 1 = \mathbf{S}_{jr}$ .

Analogamente,  $(\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_j) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$ . Por hipótese,  $\mathbf{S}_i$  e  $\mathbf{S}_j$  são distintos. Portanto, existe um índice de coluna  $s$  tal que  $\mathbf{S}_{is} - \mathbf{S}_{js} < 0$ . Logo,  $\mathbf{S}_{is} = -1$  e  $\mathbf{S}_{js} = 1$ . Analogamente, existe um índice de coluna  $t$  tal que  $\mathbf{S}_{it} = 1$  e  $\mathbf{S}_{jt} = -1$ .  $\square$

## LEMA 3.15

A matriz  $\mathbf{S}$  tem pelo menos quatro linhas linearmente independentes.

Demonstração: Por hipótese,  $G$  não é Pfaffiano. Portanto, pelo Teorema 3.3,  $G$  não é 3-Pfaffiano. Sendo assim, para cada solução  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{1}$ , nenhum elemento de  $\mathbf{x}$  é igual a zero. Portanto, pelo Corolário 1.17, o posto de  $\mathbf{S}$  é igual a quatro. Sendo assim,  $\mathbf{S}$  tem pelo menos quatro linhas linearmente independentes.  $\square$

Pelo Lema 3.14, toda linha de  $\mathbf{S}$  tem dois elementos iguais a 1 e pelo menos um elemento igual a  $-1$ . Podemos portanto chamar uma linha de *simples* se ela tem precisamente um elemento igual a  $-1$ , e *dupla* se tiver dois elementos iguais a  $-1$ .

Afirmamos que  $\mathbf{S}$  tem pelo menos uma linha simples. Para tanto, note primeiro que existem no máximo  $\binom{4}{2} = 6$  linhas duplas distintas. Mas estas seis linhas aparecem em três pares complementares. Pares complementares não são linearmente independentes. Então, pelo Lema 3.15,  $\mathbf{S}$  tem pelo menos uma linha simples, como afirmado. Ajuste a notação de forma que (i) a linha  $\mathbf{S}_1$  seja simples e (ii)  $\mathbf{S}_{11}$  seja seu único elemento igual a  $-1$ . Pelo Lema 3.14, para cada linha  $\mathbf{S}_i$  distinta de  $\mathbf{S}_1$ , seu elemento  $\mathbf{S}_{i1}$  é igual a 1.

Provaremos agora que  $\mathbf{S}$  tem duas linhas simples distintas. Para tanto, suponha, por absurdo, que qualquer linha simples de  $\mathbf{S}$  seja igual a  $\mathbf{S}_1$ . Nesse caso, toda linha dupla tem seus elementos iguais a  $-1$  nas três últimas colunas. Então, para qualquer linha  $\mathbf{S}_i$  temos que  $\mathbf{S}_{i2}\mathbf{S}_{i3}\mathbf{S}_{i4} = 1$ . Pelo Lema 3.12,  $G$  tem uma orientação  $D$  que é Pfaffiana, uma contradição. Como afirmamos,  $\mathbf{S}$  tem duas linhas simples distintas. Ajuste a notação de

forma que (i) a linha  $\mathbf{S}_2$  seja simples e (ii)  $\mathbf{S}_{22}$  seja seu único elemento igual a  $-1$ . Pelo Lema 3.14, para cada linha  $\mathbf{S}_i$  distinta de  $\mathbf{S}_2$ , seu elemento  $\mathbf{S}_{i2}$  é igual a 1.

Provaremos agora que  $\mathbf{S}$  tem três linhas simples distintas. Para tanto, note que qualquer linha dupla de  $\mathbf{S}$  tem seus dois elementos negativos nas colunas 3 e 4 e é portanto única. Pelo Lema 3.15,  $\mathbf{S}$  tem uma linha simples distinta de  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$ . Ajuste a notação de forma que (i) a linha  $\mathbf{S}_3$  seja simples e (ii)  $\mathbf{S}_{33}$  seja seu único elemento igual a  $-1$ . Pelo Lema 3.14, para cada linha  $\mathbf{S}_i$  distinta de  $\mathbf{S}_3$ , seu elemento  $\mathbf{S}_{i3}$  é igual a 1.

A matriz  $\mathbf{S}$  tem pelo menos quatro linhas distintas. Portanto,  $\mathbf{S}$  tem linhas distintas de  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{S}_2$  e  $\mathbf{S}_3$ . Seja  $\mathbf{S}_4$  uma tal linha de  $\mathbf{S}$ . Pelo Lema 3.14,  $\mathbf{S}_{41} = \mathbf{S}_{42} = \mathbf{S}_{43} = 1$  e  $\mathbf{S}_{44} = -1$ . Concluimos que  $\mathbf{S}$  tem quatro linhas distintas, cada uma delas simples.

A submatriz de  $\mathbf{S}$  que consiste dessas quatro linhas é  $\mathbf{J} - 2\mathbf{I}$ . O determinante da matriz  $\mathbf{J} - 2\mathbf{I}$  não é nulo [2, Exercício 1.1.22]. Assim,  $(\mathbf{J} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{1}$  tem solução única. Mas  $\mathbf{1}/2$  é solução deste sistema. Logo,  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}/2$ , como afirmamos. Consequentemente, toda linha de  $\mathbf{S}$  é simples, e  $\mathbf{S}$  é igual a  $\mathbf{J} - 2\mathbf{I}$ , a menos de linhas múltiplas.  $\square$

### 3.2.2 O Grafo $G_{19}$ não é 4-Pfaffiano

TEOREMA 3.16

*O grafo  $G_{19}$  não é 4-Pfaffiano.*

Demonstração: Primeiro provaremos que  $G_{19}$  não é Pfaffiano. Podemos ver na Figura 3.1, na página 32, que  $C_{19}$  é justo e que cada  $C_{19}$ -contração de  $G_{19}$  é, a menos de arestas múltiplas, igual a  $K_{3,3}$ , por sua vez não-Pfaffiano. Portanto, pelo Teorema 1.15,  $G_{19}$  não é Pfaffiano.

Suponha, por absurdo, que  $G_{19}$  é 4-Pfaffiano. Seja  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})$  uma 4-dupla Pfaffiana normal de  $G$ . Agora derivaremos algumas propriedades de  $\mathbf{D}$ . Lembremos primeiro que  $G_{19} - C_{19}$  é a união de dois  $K_{3,2}$ 's disjuntos,  $G_i := G_{19}[X_i]$ ,  $i = 1, 2$  (veja a Figura 3.1).

LEMA 3.17

*Em toda orientação do  $K_{3,2}$ , o número de ciclos com orientação par é ímpar.*

Demonstração: Toda aresta do  $K_{3,2}$  pertence a precisamente dois ciclos deste grafo. Portanto, a reversão de qualquer aresta de  $D$  muda a paridade da orientação de precisamente dois ciclos do grafo. Sendo assim, a paridade do número de ciclos com orientação par é a mesma para toda orientação do  $K_{3,2}$ . Então, basta apresentarmos uma orientação do  $K_{3,2}$  com um número ímpar de ciclos de orientação par.

O  $K_{3,2}$  tem precisamente três ciclos, e todos eles são quadriláteros. Seja  $\{A, B\}$  uma bipartição do  $K_{3,2}$ . Seja  $D$  uma orientação do  $K_{3,2}$  na qual todas as arestas têm origem em  $A$  e término em  $B$ . Todos os três ciclos (quadriláteros) de  $D$  têm orientação par.  $\square$

## LEMA 3.18

Seja  $Q$  um quadrilátero de  $G_{19} - C_{19}$  que tem orientação par em  $\mathbf{D}_i$ . Então,  $Q$  tem orientação par em precisamente mais uma orientação  $\mathbf{D}_j$  em  $\mathbf{D}$ ,  $j \neq i$ .

Demonstração: Suponhamos que  $Q$  seja um quadrilátero de  $G_{19}[X_1]$ . Então, a parte majoritária de  $X_1$  contém um vértice,  $v$ , que não pertence a  $V(Q)$ . Esse vértice é incidente a alguma aresta, digamos  $e$ , de  $C_{19}$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G_{19}$  que contém a aresta  $e$ . O corte  $C_{19}$  é justo em  $G_{19}$ . Portanto,  $M$  contém duas arestas em  $Q$ . Analogamente, pode-se provar que a mesma afirmação é válida caso  $Q$  seja um quadrilátero de  $G_{19}[X_2]$ .

Seja  $N := M \triangle E(Q)$ . Os sinais de  $M$  e de  $N$  em  $\mathbf{D}_i$  são distintos. Ajuste a notação de forma que  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}_i) = 1$  e  $\text{sgn}(N, \mathbf{D}_i) = -1$ . Pelo Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura, existe um inteiro  $j$  distinto de  $i$  tal que  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}_j) = -1$  e  $\text{sgn}(N, \mathbf{D}_j) = 1$ . Deduzimos que  $Q$  tem orientação par em  $\mathbf{D}_j$  também. Pelo Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura, para qualquer  $k \notin \{i, j\}$ , os sinais de  $M$  e de  $N$  em  $\mathbf{D}_k$  são ambos iguais a 1. Portanto,  $Q$  tem orientação ímpar em  $\mathbf{D}_k$ . Deduzimos que  $Q$  tem orientação par em  $\mathbf{D}_i$  e em  $\mathbf{D}_j$  e orientação ímpar nas outras duas orientações.  $\square$

## COROLÁRIO 3.19

Para cada praia  $X_i$  de  $C_{19}$ , no máximo um dos três ciclos de  $G_{19}[X_i]$  tem orientação ímpar em toda orientação em  $\mathbf{D}$ .

Demonstração: Sejam  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  os três ciclos de  $G_{19}[X_i]$ . Suponha, por absurdo, que  $Q_1$  e  $Q_2$  tenham orientação ímpar em cada  $\mathbf{D}_i$  de  $\mathbf{D}$ . Pelo Lema 3.17,  $Q_3$  tem orientação par em cada  $\mathbf{D}_i$  em  $\mathbf{D}$ , uma contradição ao Lema 3.18.  $\square$

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  os dois vértices *universais* de  $X_1$ , ou seja, os dois vértices de grau cinco de  $G_{19}$  que estão em  $X_1$ . Para  $i = 1, 2$ , o subgrafo  $G_{19}[X_1]$  de  $G_{19}$  tem dois ciclos,  $Q_1$  e  $Q_2$ , tais que  $Q_i$  contém  $x_i$  mas não contém ambos  $x_1$  e  $x_2$ . Pelo Corolário 3.19, pelo menos um dentre  $Q_1$  e  $Q_2$  tem orientação par em algum  $\mathbf{D}_i$  em  $\mathbf{D}$ . Podemos concluir que  $X_1$  contém um vértice universal,  $x$ , e  $\mathbf{D}$  uma orientação  $\mathbf{D}_i$ , tais que o quadrilátero  $Q := G_{19}[X_1] - x$  tem orientação par em  $\mathbf{D}_i$ . Pelo Lema 3.18,  $Q$  tem orientação par em alguma orientação  $\mathbf{D}_j$  em  $\mathbf{D}$ ,  $j \neq i$ . Ajuste a notação de forma que  $Q$  tenha orientação par em  $\mathbf{D}_1$  e em  $\mathbf{D}_2$ . Então,  $Q$  tem orientação ímpar em  $\mathbf{D}_3$  e em  $\mathbf{D}_4$ , pelo Lema 3.18.

Pelo Lema 3.17, existe um ciclo  $Q'$  de  $G_{19}[X_2]$  com orientação par em  $\mathbf{D}_3$ . Então, pelo Lema 3.18,  $Q'$  também tem orientação par em  $\mathbf{D}_k$ , para algum  $k$  em  $\{1, 2, 4\}$ , mas tem orientação ímpar nas duas orientações de  $\mathbf{D} - \mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_k$ .

Seja  $e$  a aresta de  $G_{19} - V(Q) - V(Q')$ . Tal aresta existe, pois o vértice  $x$  de  $X_1 - V(Q)$  é universal. Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G_{19}$  que contém a aresta  $e$ . Então,  $M$  contém duas arestas em  $Q$  e duas arestas em  $Q'$ . Seja  $N := M \triangle E(Q)$ .

Como  $Q$  tem orientação par em  $\mathbf{D}_1$ ,  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}_1) = -\text{sgn}(N, \mathbf{D}_1)$ . Ajuste a notação de forma que  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}_1) = -1$ . Então, pelo Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura,  $\text{sgn}(M, \mathbf{D}) = (-1, 1, 1, 1)$ . Dado que  $Q$  tem orientação par em  $\mathbf{D}_2$ , então

$$\text{sgn}(N, \mathbf{D}_2) = -\text{sgn}(M, \mathbf{D}_2) = -1.$$

Pelo Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura,  $\text{sgn}(N, \mathbf{D}) = (1, -1, 1, 1)$ . Seja  $M' := M \triangle E(Q')$  e  $N' := N \triangle E(Q')$ . Dado que  $Q'$  tem orientação par em  $\mathbf{D}_3$ , temos que

$$\text{sgn}(M', \mathbf{D}_3) = -\text{sgn}(M, \mathbf{D}_3) = -1$$

$$\text{sgn}(N', \mathbf{D}_3) = -\text{sgn}(N, \mathbf{D}_3) = -1.$$

Pelo Teorema da Unicidade da Matriz Assinatura,

$$\text{sgn}(M', \mathbf{D}) = (1, 1, -1, 1) = \text{sgn}(N', \mathbf{D}).$$

No entanto,

$$N' = N \triangle E(Q') = M \triangle E(Q) \triangle E(Q') = M' \triangle E(Q).$$

Portanto, os sinais de  $M'$  e  $N'$  em  $\mathbf{D}_1$  (e em  $\mathbf{D}_2$ ) não podem coincidir, uma contradição.  $\square$

Este teorema completa a prova de que os grafos  $G_{19}$  e  $G_{21}$  são contra-exemplos para a Conjectura 3.2.

# Capítulo 4

## Conclusão

Nesta tese, apresentamos um algoritmo polinomial que decide se um grafo quase-bipartido é Pfaffiano. Também apresentamos um contra-exemplo para a conjectura de que o número Pfaffiano de um grafo é sempre potência de quatro.

O algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos quase-bipartidos Pfaffianos generaliza-se para os grafos meio-bipartidos. No entanto, acreditamos que outras generalizações ainda não conhecidas são possíveis. Em particular, acreditamos que este algoritmo pode ser útil na obtenção de um algoritmo para reconhecimento de grafos sólidos Pfaffianos.

Na demonstração do contra-exemplo para a conjectura sobre número Pfaffiano de grafos, apresentamos o Teorema da Composição. Este teorema permite obter uma  $k$ -orientação Pfaffiana de um grafo  $G$  a partir de uma decomposição em subgrafos Pfaffianos de  $G$ .

Uma questão ainda em aberto é a existência de grafos com um dado número Pfaffiano. Anteriormente, acreditava-se que o número Pfaffiano de um grafo era sempre uma potência de quatro. Na tese, mostramos um grafo com número Pfaffiano igual a seis. O Teorema da Composição (e suas generalizações) com sua aplicação para geração de  $2r$ -orientações Pfaffianas para qualquer  $r$  nos inspirou a conjecturar as seguintes afirmações:

CONJECTURA 4.1

*O número Pfaffiano de um grafo ou é igual a um ou é um número par.*

CONJECTURA 4.2

*Para todo inteiro par  $k \geq 4$ , existe um grafo com número Pfaffiano igual a  $k$ .*

CONJECTURA 4.3

*Se  $G$  é um grafo com  $\text{pf}(G) = 2r$ , então  $G$  tem uma  $r$ -decomposição em grafos Pfaffianos.*

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Ben-Dor and S. Halevi. Zero-one permanent is  $\#P$ -complete, a simpler proof. In *Proc. 2nd Israel Symposium on Theory of Computing and Systems (ISTCS93)*, IEEE. press, 1995.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [3] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. On the number of dissimilar Pfaffian orientations of graphs. *RAIRO - Inf. Theor. Appl.*, 39:93–113, 2005.
- [4] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. On minimal non-Pfaffian graphs. comunicação privada, 2009.
- [5] I. Fischer and C. H. C. Little. A characterisation of Pfaffian near bipartite graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 82:175–222, 2001.
- [6] A. Galluccio and M. Loeb. On the theory of Pfaffian orientations. I. Perfect matchings and permanents. *Eletron. J. Combin.*, 6, 1999.
- [7] F. Harary, editor. *Graph Theory and Theoretical Physics*. Academic Press Inc., 1967.
- [8] P. W. Kasteleyn. Dimer statistics and phase transitions. *J. Math. Phys.*, 4:287–293, 1963.
- [9] C. H. C. Little. A characterization of convertible  $(0, 1)$ -matrices. *J. Combin. Theory Ser. B*, 18:187–208, 1975.
- [10] C. H. C. Little and F. Rendl. Operations preserving the Pfaffian property of a graph. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, 50:248–275, 1991.
- [11] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. Number 29 in Annals of Discrete Mathematics. Elsevier Science, 1986.
- [12] W. McCuaig. Pólya’s permanent problem. *The Electronic J. of Combin.*, 11, 2004.

- [13] A. A. A. Miranda. Orientações Pfaffianas e o furtivo grafo de Heawood. Master's thesis, Instituto de Computação - UNICAMP, 2006.
- [14] A. A. A. Miranda and C. L. Lucchesi. Pfaffian graphs. Technical report, Institute of Computing - University of Campinas - UNICAMP, 2004.
- [15] A. A. A. Miranda and C. L. Lucchesi. Recognizing near-bipartite Pfaffian graphs in polynomial time. *Discrete Applied Mathematics*, 2009.
- [16] T. Muir. *A Treatise on the Theory of Determinants*. MacMillan and Co., London, 1882.
- [17] B. Noble and J. W. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice-Hall, 3 edition, 1988.
- [18] S. Norine. Drawing 4-Pfaffian graphs on the torus. *Combinatorica*, 29(1):109 – 119, January 2009.
- [19] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits. *Ann. of Math. (2)*, 150:929–975, 1999.
- [20] G. Tesler. Matchings in graphs on non-orientable surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 78:198–231, 2000.
- [21] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.
- [22] W. T. Tutte. *Graph Theory as I Have Known It*. Number 11 in Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [23] L. G. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Science*, 1979.
- [24] V. V. Vazirani and M. Yannakakis. Pfaffian orientation of graphs, 0,1 permanents, and even cycles in digraphs. *Discrete Applied Math.*, 25:179–180, 1989.