Soluções – Lista nº 1

Lucchesi

4 de abril de 2024

Problema 1: Seja $H := G[M \triangle M^*]$. O grafo H consiste de caminhos (M, M^*)-alternados e ciclos (M, M^*)-alternados. Seja $\mathcal{C}_1$ o conjunto dos caminhos de comprimento ímpar de H e seja $\mathcal{C}_2$ o conjunto dos ciclos e caminhos de comprimento par de H. Seja $P \in \mathcal{C}_1$. O emparelhamento M^* é máximo e portanto P é M-aumentante. Além disso, pela maximalidade de M, P tem comprimento três ou mais. Assim,

$$|M \cap E(P)| \geq |M^* \cap E(P)|/2 \quad \forall P \in \mathcal{C}_1,$$

Todo $R \in \mathcal{C}_2$ contribui igualmente para M e para M^*. Portanto,

$$|M \cap E(R)| = |M^* \cap E(R)| \qquad \forall R \in \mathcal{C}_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|M| &= |M \cap M^*| + \sum_{R \in \mathcal{C}_2} |M \cap E(R)| + \sum_{P \in \mathcal{C}_1} |M \cap E(P)| \\
&\geq |M \cap M^*| + \sum_{R \in \mathcal{C}_2} |M^* \cap E(R)| + \sum_{P \in \mathcal{C}_1} |M^* \cap E(P)|/2 \\
&\geq |M^*|/2.
\end{aligned}$$

Problema 2: Vamos denotar por $P_\ell := (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ o caminho de comprimento ℓ que vai sendo construído pelos jogadores, começando pelo vértice v_0. Assim, os vértices v_{2i} são selecionados pelo primeiro jogador e os vértices v_{2i+1} são selecionados pelo segundo jogador. Tenha G um emparelhamento perfeito ou não, o caminho é sempre M^*-alternado, onde M^* é um emparelhamento máximo de G.

Suponhamos que G não tem um emparelhamento perfeito. Então G tem um vértice, digamos, v_0, que não é coberto por M^*. O primeiro jogador começa selecionando o vértice v_0. O segundo jogador então seleciona um vértice v_1 adjacente a v_0. Pela otimalidade de M^*, o vértice v_1 é coberto por uma aresta v_1v_2 de M^* e no entanto v_2 não pertence a P_1. O primeiro jogador seleciona então o vértice v_2. Em geral, P_{2k} é um caminho M^*-alternado em que a última aresta, $v_{2k-1}v_{2k}$, pertence a M^*. Todo vértice de G adjacente a v_{2k} é coberto por $M^* - E(P_{2k})$, caso contrário o grafo teria um caminho M^*-aumentante, em contradição à otimalidade de M^*. Assim, toda vez que for jogar, o primeiro jogador pode selecionar o extremo da aresta de M^* que cobre o vértice recém selecionado pelo segundo jogador. Em algum momento o segundo jogador não terá mais vértices que poderá selecionar.

Agora suponhamos que M^* é um emparelhamento perfeito de G. A estratégia do segundo jogador é sempre garantir que o caminho P_{2k+1}, além de ser M^*-alternado, termina com um aresta em M^*. Isso é sempre possível. Qualquer que seja o vértice inicial v_0 selecionado pelo primeiro jogador, o emparelhamento M^* contém uma aresta, v_0v_1, incidente em v_0. Assim por diante, o segundo jogador sempre joga de forma que o caminho P_{2k} seja M^*-alternado e a aresta $v_{2k-1}v_{2k}$ pertence a M^*. Qualquer que seja o vértice v_{2k+1} selecionado pelo primeiro jogador, o emparelhamento M^* contém a aresta $v_{2k+1}v_{2k+2}$ que incide em v_{2k+1}, e v_{2k+2} não pertence ao caminho P_{2k+1}. Em algum momento o primeiro jogador não terá mais vértices para selecionar.

Problema 3: Seja C_* uma cobertura mínima dos vértices de G e seja $H := G[C_*]$. Cada componente de H é uma estrela, pela minimalidade de C_*. Formamos um emparelhamento M, selecionando uma aresta de cada componente de H. Assim, para cada componente L de H, $|C_* \cap E(L)| + |M \cap E(L)| = |V(L)|$. Portanto,

$$|C_*| + |M| = n. \tag{1}$$

Seja M^* um emparelhamento máximo do grafo G e seja U o conjunto dos vértices não cobertos por M^*. Por hipótese, G não tem vértices isolados. Ademais, o conjunto U de vértices é estável, pela maximalidade de M^*. Assim, podemos estender M^* a uma cobertura C dos vértices de G adicionando U arestas, uma aresta para vértice de U. Portanto,

$$|C| + |M^*| = (|M^*| + |U|) + |M^*| = 2|M^*| + |U| = n.$$

Logo, $|C| + |M^*| = n$. Desta igualdade e de (1), deduzimos que

$$n = |C| + |M^*| \geq |C_*| + |M^*| \geq |C_*| + |M| = n$$

Então, a igualdade vale ao longo dessas desigualdades. Assim, $C = C_*$ e $|C_*| + |M^*| = n$. Em outras palavras, $\alpha' + \beta' = n$.

Problema 4 – Algoritmo de Halmos: O "algoritmo de Halmos", apoiado na demonstração do Teorema de Hall vista em classe, e aplicado a um grafo G, escolhe uma aresta uv do grafo G e recursivamente aplica o algoritmo ao grafo $G - u - v$.

Seja G_n o grafo que é o caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n-1})$, $n \geq 1$, e seja $H_n := G_n - v_{2n-1}$ ($n \geq 1$). Vamos aplicar o algoritmo de Halmos a G_n e a H_n, utilizando o seguinte critério de escolha da aresta: sempre escolhemos a aresta $v_{2i-1}v_{2i}$ com o maior i possível.

Vamos provar que o algoritmo, quando submetido a G_n ou a H_n, utiliza $2^{n-1} - 1$ escolhas de arestas. Vamos inicialmente supor que o grafo é G_n, $n \geq 2$. O algoritmo então escolhe a aresta $v_{2n-3}v_{2n-2}$. O algoritmo, recursivamente, analisa o grafo H_{n-1} e, retorna o conjunto $X := \{v_0, v_2, \ldots, v_{2n-4}\}$, que tem $|X| - 1$ vizinhos em H_{n-1}. Então, o algoritmo analisa recursivamente o grafo G_{n-1} e obtém um emparelhamento perfeito para esse grafo. Em seguida, o grafo determina imediatamente o emparelhamento perfeito do grafo $G_n - V(G_{n-1})$, que é isomorfo ao grafo G_1.

Vamos denotar for $f(n)$ e $g(n)$ o número de vezes em que é feita uma escolha de aresta pelo algoritmo, ao analisar G_n e H_n, respectivamente. Então:

$$f(n) = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 1 \\ 1 + g(n-1) + f(n-1), \text{ se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$g(n) = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 1 \\ 1 + g(n-1) + f(n-1), \text{ se } n \geq 2. \end{cases}$$

É imediato demonstrar, por indução em n, que $f(n) = g(n) = 2^{n-1} - 1$.

Problema 4 – Algoritmo de Younger: Vamos inicialmente definir a família $\mathcal{G}$ que consiste dos grafos G_n, $3 \leq n$, n ímpar. A Figura 1 ilustra o grafo G_7.

$$\begin{aligned} V(G_n) :=\ & \{v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_n, w_n\} \\ E(G_n) :=\ & \{v_iw_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \\ & \{v_iv_{i+1}, v_iw_{i+1}, v_{i+1}w_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ & \{v_iw_{i+2}, v_{i+2}w_i : 1 \leq i \leq n-2\}. \end{aligned}$$

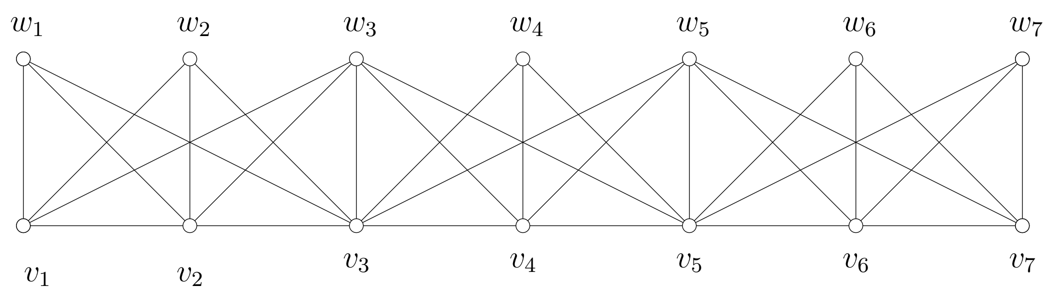

Figura 1: O grafo G_7.

Vamos definir um comportamente "ruim" do algoritmo. O algoritmo inicia com a barreira vazia e imediatamente acrescenta a ela o vértice v_1. Agora, o grafo bipartido consiste do vértice v_1 e uma componente ímpar, $K_1 = G_n - v_1$. O algoritmo contrai a componente ímpar a um vértice, que é ligado a v_1 por quatro arestas paralelas, uma das quais é a aresta $v_1 v_2$. O algoritmo, muito azarado, escolhe a aresta $v_1 v_2$ para o emparelhamento do grafo bipartido.

Recursivamente, o algoritmo analisa o grafo $H_n := G_n - \{v_1, v_2\}$ e descobre que $H_n - v_3$ tem três componentes ímpares, das quais duas são triviais (as que contêm apenas um dos vértices w_1 e w_2). Portanto algoritmo obtém a barreira $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Tudo se passa agora como se o algoritmo estivesse processando o grafo G_{n-2}, que é isomorfo ao grafo $G_n - \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ e escolhesse como primeira barreira o conjunto $\{v_3\}$.

Vamos denotar por $f(n)$ a complexidade da execução do algoritmo na análise de um grafo com $2n$ vértices. Evidentemente, no caso de G_n, $f(n)$ consiste de uma constante mais o custo do processamento de H_n e de G_{n-2}. Portanto, a menos de constantes,

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 4, \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n \geq 5. \end{cases}$$

Logo, $f(n)$ é o número de Fibonacci $F(n-2)$. Dado que

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right],$$

onde $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ e o colchete indica arredondamento para o inteiro mais próximo, concluímos que o algoritmo de Younger é exponencial.

Problema 5: Seja G um grafo 3-regular, sem arestas de corte e seja uv uma aresta de G.

Seja S um conjunto de vértices de G que contém os vértices u e v. Para toda componente ímpar K de $G-S$, todos os vértices de K têm grau ímpar em G. Logo, o corte $\partial(K)$ é ímpar. Por hipótese, G não tem arestas de corte. Concluímos que $|\partial(K)| \geq 3$. Esta conclusão vale para toda componente ímpar de $G - S$. Assim, $3 \cdot o(G - S) \leq |\partial(S)|$. Mas uv tem ambos os extremos em S. Portanto $3 \cdot o(G-S) \leq |\partial(S)| \leq 3|S|-2$. Podemos concluir que $o(G - S) < |S|$.

Em outras palavras, $o(G - S) \leq |S| - 1$. Todo vértice de G tem grau ímpar. Logo G tem um número par de vértices. Consequentemente, $o(G-S)$ e $|S|$ têm a mesma paridade. Logo, $o(G - S) \leq |S| - 2$.

Portanto, $o(H - S_H) = o(G - S) \leq |S| - 2 = |S_H|$. Podemos então deduzir que $o(H - S_H) \leq |S_H|$. Esta conclusão vale para todo conjunto S_H de vértices de H. Pelo Teorema de Tutte, H tem um emparelhamento perfeito, digamos, M_H. Nesse caso, $M_H + uv$ é um emparelhamento perfeito de G que contém a aresta uv. Esta conclusão vale para toda aresta uv de G.