MAC 5771 - MAC 0452 - IME - USP

Lista de exercícios nº 1

Março de 2024 - prazo para entrega: 26.3.2024

1. Prove que se M é um emparelhamento maximal de um grafo e M^* é um emparelhamento máximo então $|M| \geq |M^*|/2$.

2. O jogo de *Slither* é jogado da seguinte maneira. Dois jogadores selecionam alternadaamente vértices distintos $v_0, v_1, \ldots$ de um grafo G, onde, para $i \geq 0$, v_{i+1} é adjacente a v_i. O último jogador que conseguir selecionar um vértices ganha o jogo. Mostre que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora se e somente se G não tem emparelhamento perfeito.

3. Seja G um grafo com n vértices, sem vértices isolados. Uma *cobertura por arestas* de G é um conjunto de arestas que cobre todos os vértices de G. Vamos denotar por β' o tamanho de uma cobertura mínima dos vértices de G e vamos denotar por α' o tamanho de um emparelhamento máximo de G. Prove que $\alpha' + \beta' = n$.

4. Em aula foram vistas demonstrações por indução dos Teoremas de Hall e de Tutte, devidas a Halmos e Younger, respectivamente. Mostre que os algoritmos recursivos induzidos por essas demonstrações são exponenciais. Ou seja, forneça famílias infinitas de grafos e escolhas "ruins" de arestas ou de vértices que levam a um número exponencial de recursões.

5. Deduza, a partir do Teorema de Tutte, que toda arestas de um grafo 3-regular sem arestas de corte pertence a algum emparelhamento perfeito.

Problema em aberto

Seja r um inteiro, $r \geq 2$. Um r-*grafo* é um grafo r-regular, $(r-1)$-aresta-conexo e com um número par de vértices.
Conjetura Todo r-grafo admite uma partição das arestas em não mais do que $r+1$ emparelhamentos. (Seymour, 1985)