MAT-111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Bacharelado em Matemática - 2010

1ª Lista de exercícios

I. Limite de funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{2-\sqrt{x^3-4}}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\sqrt[4]{2x}-1}{\sqrt{2x-1}}$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^4+1}-1}{x^4}$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ 8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(20x)}{\operatorname{sen}(301x)}$ 9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg}(3x)\operatorname{cossec}(6x))$ 11) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ 12) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ 14) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$ 15) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ 17) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$ 18) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

19) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \frac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$ 20) $\displaystyle\lim_{x\to 2-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ 21) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

22) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$ 23) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$ 24) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

25) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ 26) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$ 27) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$

28) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$ 29) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+9}+x+3)$ 30) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-2x)\operatorname{sen}(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$

31) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$ 32) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$

Resp.: 1) $-3/4$; 2) $1/5$; 3) $-1/6$; 4) 0 ; 5) $1/5$; 6) 3 ; 7) $\sqrt{2}$; 8) $\frac{20}{301}$; 9) 2 ; 10) $1/2$; 11) $1/6$; 12) -1 ; 13) -1 ; 14) $1/3$; 15) $-\infty$; 16) 0 ; 17) $\nexists$; 18) $\nexists$; 19) 0 ; 20) $-\infty$; 21) $+\infty$; 22) $-1/2$; 23) 0 ; 24) $1/3$; 25) 1 ; 26) $-\infty$; 27) 0 ; 28) $-\infty$; 29) 3 ; 30) $32\sqrt{2}$; 31) $-\sqrt[4]{7}/2$; 32) $1/2$.

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\le 2|x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x}$. Resp.: 0.

3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $1+x^2+\dfrac{x^6}{3}\le f(x)+1\le \sec x^2+\dfrac{x^6}{3}$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(f(x)\cos\left(\frac{1}{x+x^2}\right)\right)$. Resp.: 0 ; 0 .

4. Sejam $f\,,\,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x| \le f(x) \le 3\,|x|$ e $0 \le g(x) \le 1 + |\operatorname{sen} x\,|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\,f(x)\,g(x) + \cos x\,)$ Resp.: 1.

5. Dê exemplos de funções f, g e h tais que $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e tais que existam os limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ mas não exista o limite $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Compare com o teorema do confronto.

6. Sejam $c\,,L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + cx + c}{x^2 - 1} = L$. Determine c e L. Resp.: $c = -1$; $L = 5/2$.

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

   (a) Assumindo que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x}$. Resp.: 2 .

   (b) Assumindo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Resp.: 0 .

   (c) Assumindo que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Resp.: $+\infty$.

8. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} - 1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} (x\cdot 0) = 0.$$

9. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada, f é positiva e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}(\,f(x)g(x)\,) = +\infty$. Resp.: Falsa.

   (b) Se $f\,,\,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$. Resp.: Verdadeira.

   (c) Se $f\,,\,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$. Resp.: Falsa.

10. Dê exemplos de funções f e g tais que:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) - g(x)\big) = 1$.

    (c) $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

    (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x) - g(x)\big) \neq 0$.

11. Mostre que, se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada, então $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

II. Funções Contínuas

1. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3} & \text{, se } x \neq 3 \\ 1 & \text{, se } x = 3 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} & \text{, se } x \neq 1 \\ 0 & \text{, se } x = 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{[x]}}{2}\operatorname{sen}(\pi x)$.

Obs.: $[x]$ denota o *maior inteiro menor que ou igual a* x, definido por $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

Resp.: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; d) $\mathbb{R}$.

2. Determine L para que a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+2)-\operatorname{sen}(x+2)}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ L & \text{, se } x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2} & \text{, se } x \neq 0 \\ L & \text{, se } x = 0 \end{cases}$

Resp.: (a) $-\cos 2$; (b) 1 .

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1} & \text{, se } x \neq 1 \\ 1 & \text{, se } x = 1 \end{cases} .$$

Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por que? Resp. Não.

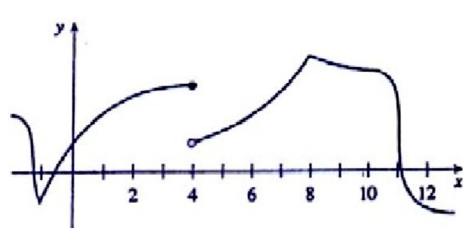
4. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

   (b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

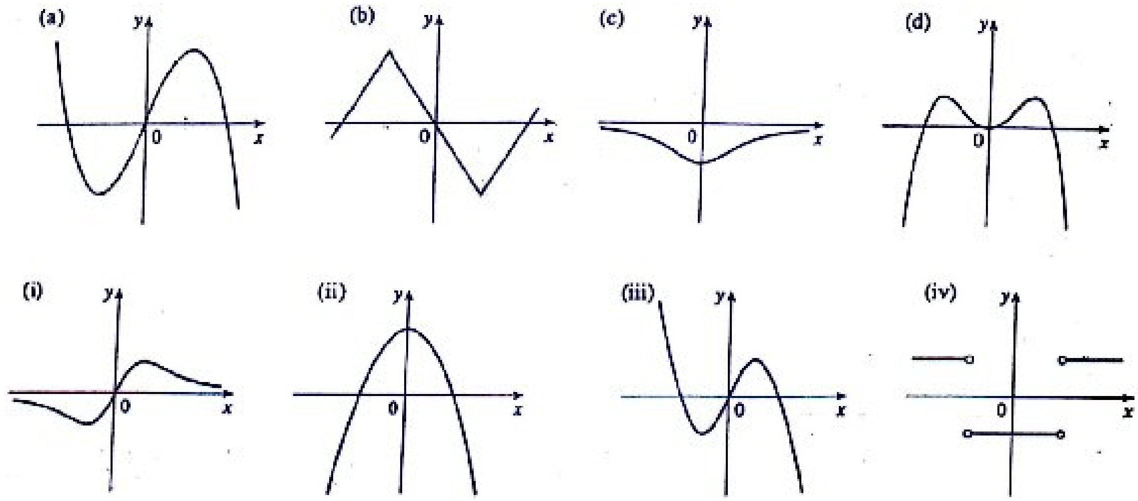
III. Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável.



Resp.: -1 ; 4 ; 8 ; 11 .

2. Associe os gráficos de cada função de (a) a (d) com os gráficos de suas respectivas derivadas de (i) a (iv).



Resp.: (a) e (ii) ; (b) e (iv) ; (c) e (i) ; (d) e (iii) .

3. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{, se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{, se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) = 0$. Resp.: $a = -3/2$, $b = 0$; $c = 7/2$.

4. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}} & \text{, se } x > 1 \\ 1 & \text{, se } x \leq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x & \text{, se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3 & \text{, se } x < 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{, se } x > 1 \\ x^4 & \text{, se } x \leq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

(e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$ (obs: $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, para todo $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\backslash \{0\}$)

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(i) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x_0 = 0$ j) $f(x) = |\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0 = 0$ k) $f(x) = \cos(\sqrt{|x|})$, $x_0 = 0$

Resp.: *são contínuas em x_0:* (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) ; *são deriváveis em x_0:* (f), (g), (j).

5. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$ 3) $f(x) = \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5} - x^2\right)$ 5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$ 6) $f(x) = \sqrt[6]{x \operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{cossec} x}{x^3 + 3x^2}$ 8) $f(x) = \sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 9) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}(x^3 - x^2)}{\sec x}$

10) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ 11) $f(x) = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$ 12) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

13) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x + \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 14) $f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$ 15) $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^{33} x \cos^{17} x}$

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x}{x^2 \cos(x^2)}$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é derivável em 0? Resp.: Sim .

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $a \in \,]0, +\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.
Resp.: $2\sqrt{a}\, f'(a)$.

8. Analise as seguintes "soluções" para a questão abaixo.

Questão. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações.

"solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$.

"solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

"solução" 4. Temos $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{, se } x < 0 \\ x^2 & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$. Logo $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$. Portanto $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja $f'(0) = 0$.

Resp.: somente a solução 4 está correta.

9. Em que pontos f é derivável?

a) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$. Resp.: a) em todos os pontos, b) em $x_0 \neq 0$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x = 0$. Calcule a derivada de $h(x) = f(x)\, g(x)$ no ponto $x = 0$. Resp.: 0 .

11. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência. Resp: $(3, -3)$.

12. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$. Resp: $(-1, -13)$, $y = 16x + 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.

13. Seja $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0,0)$.
Resp.: $y = -9x$; $y = -x$

14. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xf(x+1+\operatorname{sen} 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$. Resp.: -12.

15. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique. Resp.: Não .

16. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9+4x}\,))^2$. Determine $g'(0)$.
Resp.: -1 .

17. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

18. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2-y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$. $y = x$.

IV. Diversos

1. Mostre que a função *caracteristica dos racionais* definida por

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos da reta. *Use que todo intervalo (não-degenerado) contém números racionais e irracionais*

2. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua em todos os pontos da reta mas que a função $|f|$ seja contínua em todos os pontos da reta.

3. Mostre que a função $x \in \mathbb{R} \mapsto x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ é contínua apenas em $x = 0$.

4. Mostre que a função $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ é derivável apenas em $x = 0$.