1 Terceira Lista de Exercícios de MAC 5790 - Segundo semestre de 2001

1.1 Exercícios "teóricos"

Convenções: Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então $\boldsymbol{a}^i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}$;
$X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\ \}$;
$V(X)$ é o conjunto dos vértice de X;
$I(\boldsymbol{x}) := \{i : x_i \neq 0\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in X$;
$H_x := \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{h} = \mathbb{0} \text{ e } I(\boldsymbol{h}) \subseteq I(\boldsymbol{x})\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in X$.

Exercício 1.1 *Mostre que no fato* 2.2*, se* $\boldsymbol{x} \in V(X)$*, então* $\boldsymbol{h} = \mathbb{0}$ *(obrigatório usar apenas as convenções acima e o fato* 2.1*).*

Exercício 1.2 *Faça o exercício* 2.9*: prove que*

$$\left.\begin{array}{r} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} \in X, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{h} = 0 \\ \boldsymbol{h} \neq \mathbf{0} \ e\ I(\boldsymbol{h}) \subseteq I(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \overline{\lambda} > 0 \ tal\ que: \\ i)\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \overline{\lambda}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{x} - \overline{\lambda}\boldsymbol{h}) \in X \times X \\ ii)\ I(\boldsymbol{y}) \subseteq I(\boldsymbol{x}),\ I(\boldsymbol{z}) \subseteq I(\boldsymbol{x}) \ \ e \\ \quad \#I(\boldsymbol{x}) > \min\{\#I(\boldsymbol{y}), \#I(\boldsymbol{z})\}. \end{array}\right.$$

Exercício 1.3 *Faça o exercício* 2.11*: prove que* H_x *é um subespaço linear e portanto um cone convexo.*

Exercício 1.4 *Usando os resultados das seções* 2.4 *e* 2.5*, faça o exercício* 2.15*: prove que*

(i) $C \equiv \{\mathbb{0}\} \Longrightarrow X$ *limitado*
(ii) X *limitado não vazio* $\Longrightarrow C \equiv \{\mathbf{0}\}$
(iii) X *limitado* $\not\Longrightarrow C \equiv \{\mathbf{0}\}$

Exercício 1.5 *Considere os poliedros*

$$X_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geqq 0 \ e\ x_1 + 2x_2 \leqq 4\}$$
$$X_2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x_1 \leqq 1\}.$$

(1) *Transcreva ambos os poliedros para a forma canônica* $\overline{X}_1$ *e* $\overline{X}_2$ *(deixe claro porque vale a equivalência);*

(2) *Usando o resultado de caracterização de vértices, teorema* 2.2*, determine os vértices de* $\overline{X}_1$ *e* $\overline{X}_2$ *(use o exercício da parte prática* `Scilab`*);*

(3) *Encontre os pontos correspondentes, em* X_1 *e* X_2*, a cada vértice de* $V(\overline{X}_1)$ *e* $V(\overline{X}_2)$*, provando que estão nos poliedros originais, e indicando se são ou não vértices.*

1.2 Exercício "prático"

Exercício 1.6 *A partir do exemplo* `Scilab` *de* enumeração explícita*, disponível no endereço*

`http://www.ime.usp.br/ leo/mac5790/01/exemplos.html#enumeracao`

faça um programa `Scilab` *que gera todos os vértices de um dado poliedro canônico.*