Lista de Exercícios 1

Versão: 1.5

Prof. Leônidas de Oliveira Brandão
Departamento de Ciência da Computação - IME - USP
http://www.ime.usp.br/~leo

1. Huffman

Exercício 1. *Fazer um programa* `Java` *que conta as frequências das letras em um texto.*

Exercício 2. *Sendo* $\{l_i\}_{i=1,\ldots,n}$ *as letras em um texto e* $\{f_i\}_{i=1,\ldots,n}$ *suas frequências, encontrar as árvores de Huffman das mesma. No primeiro exemplo, mostre que a árvore encontrada é ótima (enumerando as demais).*

(1) $l_{i\,i=1,\ldots,5} = (A, E, N, I, S)$ *e* $f_{i\,i=1,\ldots,5} = (29, 10, 9, 5, 4)$
(2) *Use o programa obtido no exercício 1 para calcular as* $l_{i\,i=1,\ldots,}$ *e* $f_{i\,i=1,\ldots,}$ *sobre o enunciado do próprio exercício 1.*

2. Árvores binárias

Exercício 3. *Dado um vetor* $V[1,\ldots,N]$ *ordenado* ($V[i] \leqq V[i+j]$)*, construir uma árvore binária* T *tal que* $info(noE) \leqq info(no) \leqq info(noD)$, $\forall no \in VT, noE \in sub\_arv(no.esq)$ *e* $noD \in sub\_arv(no.dir)$

Exercício 4. *Usando o exercício acima, construa um método para fazer busca na árvore, com complexidade* $log(n)$*, se* n *é o número de nós da árvore.*

Exercício 5. *Defina uma estrutura de nó (classe* `Java`*) para representações de árvores (não necessariamente binária). Defina o método para inserir um novo nó, filho de um determinado nó (os filhos precisam ter uma ordem bem definida, os primeiros estão mais à esquerda).*

Exercício 6. *Para a estrutura definida acima, construa métodos (algoritmos) para:*

(1) *Passeio em "largura" na árvore ("Breadth First Search");*
(2) *Passeio em "profundidade" ("Depth First Search");*
(3) *Determinar o número de folhas da árvore a partir do nó* $no \in VT$*;*
(4) *Determinar o número de folhas da árvore a partir do nó* $no \in VT$*;*
(5) *Determinar o número de nós da árvore a partir do nó* $no \in VT$*;*
(6) *Determinar a altura do nó* $no \in VT$*;*
(7) *Determinar o nível do nó* $no \in VT$*.*

Exercício 7. *Refazer os exercícios 5 e 6 para árvores binárias, trocando o item* (2) *por passeis "pré-ordem", "in-ordem" e "pós-ordem".*

Exercício 8. *Refazer o passeo "in-ordem" do exercícios 7 para uma árvore binária com costura "in-ordem" (costura em filhos direitos, para o próximo "in-ordem").*

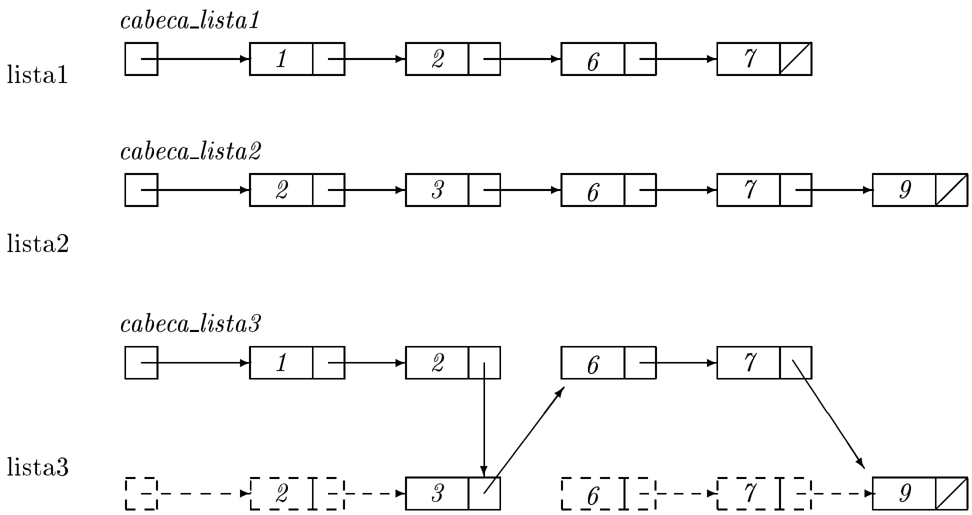
Exercício 9. *Uma árvore* T *é do tipo **"heap"** se, e somente se,* $info(no) \geqq \max\{info(no.esq), info(no.dir)\}$, $\forall no \in VT$.

(1) *Construir uma algoritmo para inserir um novo nó numa árvore "heap", mantendo a propriedade "heap";*
(2) *Simular inserções usando a seguinte sequência,* $(4, 5, 7, 2, 1, 3, 6)$ *(desenhe a árvore após cada inserção).*

Exercício 10. *Converta a expressão aritmética* $A - (B * C - 2/(X + Y))^F * G$ *para a correspondente em notação pós-fixa. Mantenha todas as configurações de saída e correspondente pilha.*

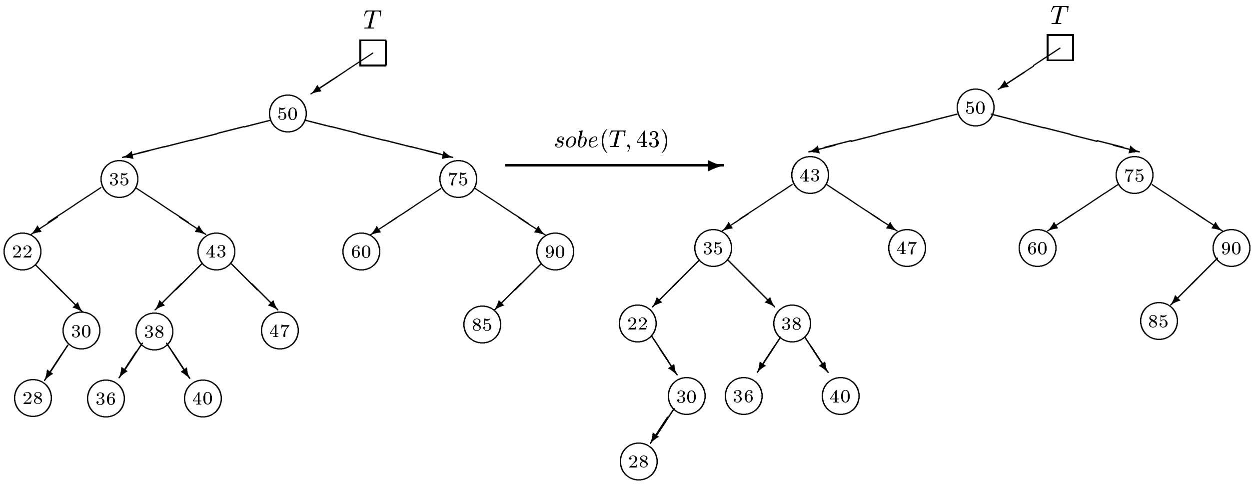
3. Listas

Exercício 11. *Dadas duas listas ligadas, referenciadas por* **`lista1`** *e* **`lista2`**, *cujos elementos estejam em ordem crescente, escreva um algoritmo que intercale estas listas, formando uma única lista com os elementos em ordem estritamente crescente e sem repetições.*
A lista resultante deve ser referenciada por **`lista3`** *(a* **`lista3`** *deve ser formada pelas células que faziam parte de* **`lista1`** *ou de* **`lista2`** *— ao final* **`lista1`** *e* **`lista2`** *devem estar vazias).*
Exemplo:



4. Árvores de busca binárias

Exercício 12. *Considere os elementos de um conjunto armazenado numa* ***árvore de busca binária****. Escreva um algoritmo* **`Sobe(T, x)`** *que recebe uma árvore de busca binária referenciada por* **`T`** *e um elemento* **`x`** *e, se ele estiver na árvore e não for a raiz, sobe o nó contendo* **`x`** *de um nível, mantendo a estrutura de árvore de busca binária como mostra o exemplo a seguir:*



5. B-Árvores

Os exercícios 13, 14 e 15 referem-se à **B-árvores**. Uma **B-árvore** de grau n é:

(1) uma árvore de busca n-ária (cada nó pode ter até n filhos);
(2) cada nó pode armazenar até $n-1$ chaves;

(3) inserções são feitas sempre nas folhas;
(4) todas as folhas estão no mesmo nível.

Deste modo, se K é um nó da B-árvore, então

(1) $info_i(K)$ é o i-ésima chave do nó, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, com
$$info_1(K) < info_2(K) < \ldots < info_{n-1}(K);$$
(2) denotando por T_{i-1} a sub-árvore esquerda da i-ésima chave do nó K e por T_{i+1} a sua sub-árvore direita, segue que
$$info_j(K_{i-1}) < info_i(K) < info_k(K_{i+1}), \forall (K_{i-1}, K_{i+1}, j, k) \in T_{i-1} \times T_{i+1} \times \{1, \ldots, n-1\} \times \{1, \ldots, n-1\}.$$

Exercício 13. *Construa a* ***B-árvore*** *de grau 3, árvore $2-3$, para a seguinte sequência de entrada:* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Exercício 14. *Construa a* ***B-árvore*** *de grau 4, árvore $3-4$, para a seguinte sequência de entrada:* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Exercício 15. *Mostre que em uma* ***B-árvore*** *de grau 2, T, não é possível ocorrer algum nó K que tenha uma chave i com $T_{i-1} \neq \emptyset$ e $T_{i+1} = \emptyset$. De modo mais formal:*
$$\forall K \in T \Rightarrow \nexists i \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ tal que } T_{i-1} \neq \emptyset \text{ e } T_{i+1} = \emptyset.$$

6. Mais Huffman

Exercício 16. *Se os caracteres (a, b, c, d, e) aparecem em um texto com frequências $(3, 2, 1, 1, 4)$, desenhe e calcule o custo das sequintes árvores binárias de código (como a de Huffman):*

(a) $(0, 10, 110, 1110, 1111)$
(b) $(00, 010, 0110, 0111, 1)$
(c) $(00, 10, 110, 111, 01)$

Exercício 17. *Aplique, passo a passo, o algoritmo guloso de Huffman para encontrar a árvore ótima para a "carta" do exercício anterior.*

Exercício 18. *Seja T uma árvore de Huffman, obtida a partir de uma "carta" com as letras $\{l_i\}_{i=1,n}$, cujas frequências são respectivamente $\{f_i\}_{i=1,n}$. Seja c_l o caminho desde a raíz até a folha com a letra l e $\#c_l$ seu comprimento (o número de dígitos da letra l).*
Mostre que: $f_i < f_j \Rightarrow \#c_{l_i} \geq \#c_{l_j}$.