1 Segunda Lista de Exercícios de MAC 315 - Segundo semestre de 2003

1.1 Exercícios "teóricos"

Convenções: Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então $\boldsymbol{a}^i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}$;
$X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\ \}$;
$V(X)$ é o conjunto dos vértice de X;
$I(\boldsymbol{x}) := \{i : x_i \neq 0\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in X$;
$H_x := \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{h} = \mathbb{0} \text{ e } I(\boldsymbol{h}) \subseteq I(\boldsymbol{x})\}$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in X$.

Exercício 1.1 *Sejam $\boldsymbol{x} \in X$ (convexo), $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ e $S_{\boldsymbol{c},\alpha} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leqq \alpha\}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Prove que $X \bigcap S_{\boldsymbol{c},\alpha}$ é convexo, ou apresente um contra-exemplo (no caso de não ser).*

Exercício 1.2 *Usando apenas a definição de vértices, encontre os vértices dos poliedros X_1 e X_2, deixando anotado os argumentos utilizados: $X_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3 = 1 \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$ e $X_2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1+x_2 = 1 \text{ e } \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$.*

Exercício 1.3 *Prove pela definição que os pontos encontrados no exercício 1.2 são de fato vértices (não deve ser usado qualquer resultado de caracterização de vértices).*

Exercício 1.4 *Mostre que $X_2 = [V(X_2)] + C$, onde X_2 definido no exercício 1.2 e $C := \{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^3 : h_1 + h_2 = 0 \text{ e } \boldsymbol{h} \geqq \mathbf{0}\}$ (não deve ser usado qualquer resultado de caracterização de vértices).*

Exercício 1.5 *Complete a tabela abaixo dizendo se o conjunto gerado mantém a propriedade inicial, demonstrando o resultado ou apresentando contra-exemplo (se não couber na tabela, coloque demonstração noutra folha).*

	prop. inicial A e B	$C := A \bigcup B$	$C := A \bigcap B$	$C := A + B$	$C := \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}_+$
1.	*subespaço*				
2.	*convexo*				
3.	*cone*				
4.	*cone conv.*				

Exercício 1.6 *Mostre que no lema 2.2, se $\boldsymbol{x} \in V(X)$, então $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ (use apenas as convenções acima e o lema 2.1).*

Exercício 1.7 *Faça o exercício* 2.9*: prove que*

$$\left.\begin{array}{r} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} \in X, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{h} = 0 \\ \boldsymbol{h} \neq \mathbf{0} \ e \ I(\boldsymbol{h}) \subseteq I(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\overline{\lambda} > 0 \ tal\ que: \\ i)\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\overline{\lambda}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{x}-\overline{\lambda}\boldsymbol{h}) \in X \times X \\ ii)\ I(\boldsymbol{y}) \subseteq I(\boldsymbol{x}),\ I(\boldsymbol{z}) \subseteq I(\boldsymbol{x}) \ \ e \\ \quad \#I(\boldsymbol{x}) > \min\{\#I(\boldsymbol{y}), \#I(\boldsymbol{z})\}. \end{array}\right.$$

Exercício 1.8 *Faça o exercício* 2.11*: prove que* H_x *é um subespaço linear e portanto um cone convexo.*

Exercício 1.9 *Usando os resultados das seções* 2.4 *e* 2.5*, faça o exercício* 2.15*: prove que*

$$\begin{array}{rl} (i) & C \equiv \{\mathbf{0}\} \quad \Longrightarrow \quad X \ limitado \\ (ii) & X \ limitado\ não\ vazio \quad \Longrightarrow \quad C \equiv \{\mathbf{0}\} \\ (iii) & X \ limitado \ \not\Longrightarrow \quad C \equiv \{\mathbf{0}\} \end{array}$$

Exercício 1.10 *Coloque na forma canônica os seguintes poliedros (mostre cada passo da transforção):*

$$1. \left\{\begin{array}{lrcrcrcr} max & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leqq & 8 \\ & 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geqq & 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geqq & 4 \\ & & & & & \boldsymbol{x} & \geqq & \mathbf{0}. \end{array}\right.$$

$$2. \left\{\begin{array}{lrcrcrcr} max & 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leqq & 6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geqq & 2 \\ & & & & (x_1; & x_2) & \geqq & \mathbf{0} \\ & & & & & x_3 & \in & \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

1.2 Exercícios "práticos"

A partir do exemplo `Scilab` de `enumeração explícita`, disponível no endereço
`http://www.ime.usp.br/~leo/scilab/enumeracao-explicita.sci`:

Exercício 1.11 *Resolva os problemas* 1 *e* 2 *do exercício 1.10, encontre o vértice ótimo e seu valor ótimo, se existir.*
Escreva num arquivo os dados que definem o poliedro.

Exercício 1.12 *Para os dois poliedros considerados no exercicio anterior, se a resposta foi vértice ótimo (portanto limitado), mostre que de fato* $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}$ *e* $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ *é o valor ótimo obtido pelo* `Scilab`.