1 Segunda Lista de Exercícios de MAC 315 - Segundo semestre de 2002

Leônidas de Oliveira Brandão

Convenções: $X := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\}$
(PLC) $\equiv \langle$ encontrar o $\boldsymbol{x}$ em X que maximiza $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$ $\rangle$;
Fixado $B \in \{1, 2, \dots, n\}$, então $N = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$;
$\boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{c}'_N - \boldsymbol{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$

1.1 Exercícios "teóricos"

Exercício 1.1 *Coloque na forma canônica os seguintes poliedros (mostre cada passo da transforção):*

1. $$\begin{cases} max & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leqq 8 \\ & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geqq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geqq 4 \\ & \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} max & 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ s.a. & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqq 2 \\ & (x_1;\ x_2) \geqq \mathbb{0} \\ & x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercício 1.2 *Sejam* $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. *A partir do item* 2, *é recomendado o uso (não só) do algoritmo* http://www/mac315/00/exemplos/enumeracao-explicita.sci*:*

1. *prove (pela definição!) que* $\bar{\boldsymbol{x}} := (0; 2; 0; 0)$ *é vértice de* X *(base pode ser* $(2, 3)$ *ou* $(2, 4)$*);*
2. *construa* $\boldsymbol{c}$*, de modo que:* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *é vértice ótimo com* $\boldsymbol{\gamma} \leq \mathbb{0}$*;*
3. *construa* $\boldsymbol{c}$*, de modo que:* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *é vértice ótimo com* $\boldsymbol{\gamma} \nleq \mathbb{0}$*;*
4. *(PLC) ilimitado, com* $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbb{0}$*.*

Atenção: você deverá justificar os itens 2 *a* 4 *(quem é* $\boldsymbol{\gamma}$ *e por que a solução é ótima ou o problema é ilimitado); note que* $\boldsymbol{\gamma} \leq \mathbb{0}$ *ou* $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbb{0}$ *implica que* $\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbb{0}$*.*

Exercício 1.3 *Sejam* X *e* I *tais que:* $\boldsymbol{b} \in C([\{\boldsymbol{a}^i\}_{i \in I}])$*. Prove que: para todo* $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$*, tal que* $\{\boldsymbol{a}^i\}_{i \in B}$ *é l.i.,* $\#B = m$ *e* $I \subseteq B$*, então* $\langle x_i = 0, \forall i \notin I,\ \boldsymbol{x}$ *gerado por* $B \rangle$*.*

Exercício 1.4 *Usando* (B, N) *sublistas complementares da lista* $(1, 2, \dots, n)$*, e* $\bar{\boldsymbol{x}}_B := \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ *e* $\bar{\boldsymbol{x}}_N := \mathbb{0}$*, prove que:*

1. *se* B *é uma base viável e* $\boldsymbol{x} \in X$*, então* $\boldsymbol{x}_B = \bar{\boldsymbol{x}}_B + \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\boldsymbol{x}_N$
2. *se* B *é uma base viável e* $\boldsymbol{x} \in X$*, então* $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\gamma}'\bar{\boldsymbol{x}}_N$*.*
3. *se* B *é uma base viável e* $\boldsymbol{gamma}_N \leqq \mathbb{0}$*, então* B *é base ótima.*

Exercício 1.5 *A partir do problema linear* $P1 : \max x_1 + x_2, \boldsymbol{x} \in Y$*,* $Y := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leqq 3, x_1 - x_2 \leqq 2, \boldsymbol{x} \geqq \mathbb{0}\}$*:*

1. *montar o problema canônico equivalente*
2. *montar "manualmente" uma base viável inicial*
3. *escrever as variáveis do Simplex (vértice* $\overline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \ldots$*)*
4. *resolver o problema com esta base inicial via Simplex*
5. *recuperar todos os vértices intermediários (*$\boldsymbol{x}^i$*), as direções (*$\boldsymbol{h}^i$*) e os tamanhos de passos (*λ_i*) - tais que* $\boldsymbol{x}^{i+1} = \boldsymbol{x}^i + \lambda_{i+1}\boldsymbol{h}^{i+1}$*)*

Exercício 1.6 *A partir do problema linear* $P1 : \max -x_1 - x_2, \boldsymbol{x} \in Y$, $Y := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leqq 3, x_1 - x_2 \leqq 2, 2x_1 + 3x_2 \geqq 6, \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\}$*: resolver os mesmos* 5 *itens do exercício acima.*

Exercício 1.7 *Resolva os dois (PLC) do exercício 1.1 usando o referido programa* Scilab *(*enumeracao-explicita.sci*). Justifique as respostas do programa através da teoria vista em aula.*