

# 1 Segunda Lista de Exercícios de MAC 315 - Segundo semestre de 2002

Leônidas de Oliveira Brandão

**Convenções:**  $X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$   
(PLC)  $\equiv \langle \text{encontrar o } \mathbf{x} \text{ em } X \text{ que maximiza } \mathbf{c}'\mathbf{x} \rangle$ ;  
Fixado  $B \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então  $N = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$ ;  
 $\boldsymbol{\gamma} := \mathbf{c}'_N - \mathbf{c}'_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$

## 1.1 Exercícios “teóricos”

---

**Exercício 1.1** Coloque na forma canônica os seguintes poliedros (mostre cada passo da transformação):

$$1. \quad \begin{cases} \max & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$
$$2. \quad \begin{cases} \max & 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & (x_1; x_2) \geq \mathbf{0} \\ & x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exercício 1.2** Sejam  $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . A partir do item 2, é recomendado o uso (não só) do algoritmo <http://www/mac315/00/exemplos/enumeracao-explicita.sci>:

1. prove (pela definição!) que  $\bar{\mathbf{x}} := (0; 2; 0; 0)$  é vértice de  $X$  (base pode ser  $(2, 3)$  ou  $(2, 4)$ );
2. construa  $\boldsymbol{\gamma}$ , de modo que:  $\bar{\mathbf{x}}$  é vértice ótimo com  $\boldsymbol{\gamma} \leq \mathbf{0}$ ;
3. construa  $\boldsymbol{\gamma}$ , de modo que:  $\bar{\mathbf{x}}$  é vértice ótimo com  $\boldsymbol{\gamma} \not\leq \mathbf{0}$ ;
4. (PLC) ilimitado, com  $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}$ .

Atenção: você deverá justificar os itens 2 a 4 (quem é  $\boldsymbol{\gamma}$  e por que a solução é ótima ou o problema é ilimitado); note que  $\boldsymbol{\gamma} \leq \mathbf{0}$  ou  $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}$  implica que  $\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ .

**Exercício 1.3** Sejam  $X$  e  $I$  tais que:  $\mathbf{b} \in C([\{\mathbf{a}^i\}_{i \in I}])$ . Prove que: para todo  $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , tal que  $\{\mathbf{a}^i\}_{i \in B}$  é l.i.,  $\#B = m$  e  $I \subseteq B$ , então  $\langle x_i = 0, \forall i \notin I, \mathbf{x} \text{ gerado por } B \rangle$ .

**Exercício 1.4** Usando  $(B, N)$  sublistas complementares da lista  $(1, 2, \dots, n)$ , e  $\bar{\mathbf{x}}_B := \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$  e  $\bar{\mathbf{x}}_N := \mathbf{0}$ , prove que:

1. se  $B$  é uma base viável e  $\mathbf{x} \in X$ , então  $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{x}}_B + \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N$
2. se  $B$  é uma base viável e  $\mathbf{x} \in X$ , então  $\mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{c}'\bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\gamma}'\bar{\mathbf{x}}_N$ .
3. se  $B$  é uma base viável e  $\boldsymbol{\gamma}_N \leq \mathbf{0}$ , então  $B$  é base ótima.

**Exercício 1.5** A partir do problema linear  $P1 : \max x_1 + x_2, \mathbf{x} \in Y, Y := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 2, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ :

1. montar o problema canônico equivalente
2. montar “manualmente” uma base viável inicial
3. escrever as variáveis do Simplex (vértice  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \dots$ )
4. resolver o problema com esta base inicial via Simplex
5. recuperar todos os vértices intermediários ( $\mathbf{x}^i$ ), as direções ( $\mathbf{h}^i$ ) e os tamanhos de passos ( $\lambda_i$ ) - tais que  $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda_{i+1}\mathbf{h}^{i+1}$ )

**Exercício 1.6** A partir do problema linear  $P1 : \max -x_1 - x_2, \mathbf{x} \in Y, Y := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 3, x_1 - x_2 \leq 2, 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ : resolver os mesmos 5 itens do exercício acima.

**Exercício 1.7** Resolva os dois (PLC) do exercício 1.1 usando o referido programa Scilab (enumeracao-explicita.sci). Justifique as respostas do programa através da teoria vista em aula.