TEORIA EM PROGRAMAÇÃO INTEIRA

MARCELO HASHIMOTO

Orientador: José Coelho de Pina

Resumo. Este documento contém o plano de estudos feito para a disciplina MAC5701 Tópicos em Ciência da Computação. Pretendemos estudar conceitos fundamentais de programação inteira — em particular, reticulados e equações lineares diofantinas — e relações entre programação inteira e certos resultados em otimização combinatória e teoria dos grafos. Apresentamos aqui um breve resumo acerca da motivação do trabalho e dos tópicos que serão vistos.

1. Introdução

Um problema de *programação linear*, denotado pela sigla PL, consiste em

> **Problema** PL(A, b, c): Dados uma matriz A e vetores b e c, encontrar um vetor x tal que $Ax = b$ e cx é mínimo.

Problemas de programação linear *inteira* apresentam a restrição adicional de que as coordenadas de x podem assumir somente valores inteiros. Embora a diferença na descrição de programas lineares e programas inteiros seja pequena, essas duas classes de problemas apresentam distinções significativas tanto em aspectos teóricos como práticos.

Um problema de programação linear ou programação inteira pode ser *inviável* ou *viável*. Problemas viáveis podem ser *ilimitados* ou *limitados*. No último caso, existe uma *solução ótima* para o problema. Nesse contexto, *resolver* um problema de programação linear ou programação inteira significa encontrar uma solução ótima, determinar que o problema é inviável ou determinar que o problema é ilimitado.

Em programação linear e programação inteira, resolver um problema equivale a decidir se existe ou não solução ótima para um outro problema. Mais do que isso, existem resultados que demonstram que decidir se existe ou não solução ótima para um programa linear ou programa inteiro é um problema em NP. Ou seja, existe um certificado que pode ser utilizado para verificar, em tempo polinomialmente limitado pelo tamanho da entrada, que um dado programa linear ou programa inteiro tem solução ótima.

Em 1979, Khachiyan [1] demonstrou, através do *método dos elipsóides*, que um problema de programação linear pode ser resolvido em tempo polinomial. Programas inteiros, no entanto, são NP-difíceis, ou seja, estão na lista de problemas para os quais não se conhecem algoritmos eficientes.

Mesmo não conhecendo métodos polinomais para resolver problemas de programação inteira, existem diversos resultados teóricos que permitem abordar esses problemas através de técnicas alternativas, como a busca por soluções aproximadas ou algoritmos de tempo exponencial em teoria mas eficientes na prática. São exemplos o *método dos planos de corte* e o *método da relaxação lagrangeana*.

Um aspecto teórico fundamental em programação inteira é o fato de que, sob condições específicas, certas propriedades de programação linear também são válidas para um programa inteiro. Esse aspecto é particularmente interessante em certos resultados de *otimização combinatória* e *teoria dos grafos* que estão diretamente relacionados ao *teorema da dualidade* de programação linear. A sub-área conhecida como *combinatória poliédrica* trata justamente da aplicação de técnicas de programação linear, como o *método primal-dual*, em problemas combinatórios.

2. Plano de estudos

Neste semestre, pretendemos estudar alguns conceitos teóricos fundamentais presentes em programação inteira. Em particular, o foco deste estudo estará principalmente em *reticulados* e *equações diofantinas*. Os capítulos 4, 5 e 6 do livro de Schrijver [4] serão a principal referência para o estudo dos tópicos citados.

Outro aspecto de programação inteira que será estudado será a *dualidade* em programas inteiros e a relação destes com resultados em otimização combinatória e teoria dos grafos. A base dessa parte do estudo serão os artigos de Lovász [2, 3].

Ao longo do semestre será escrita, para a disciplina, uma monografia contendo toda a teoria estudada, de forma detalhada e auto-contida. A seguir estão descritos, de maneira sucinta, alguns exemplos de tópicos que estarão sendo abordados.

2.1. **Forma normal de Hermite.** Uma matriz com posto linha completo está na *forma normal de Hermite* se ela é da forma $[B\ 0]$, onde B é uma matriz não-singular triangular inferior não-negativa, na qual cada linha tem um único elemento máximo e este está localizado exatamente na diagonal. Pode-se demonstrar que qualquer matriz com posto linha completo pode ser trazida à forma normal de Hermite através de uma seqüência de *operações elementares sobre colunas*:

(i) permutar duas colunas;
(ii) multiplicar uma coluna por -1;
(iii) adicionar um múltiplo inteiro de uma coluna à outra.

Teorema 1. *Qualquer matriz com posto linha completo pode ser trazida à forma normal de Hermite através de operações elementares sobre colunas.*

Um corolário do teorema acima permite obter uma caracterização fundamental para a existência de soluções inteiras para um sistema de equações racionais:

Corolário 2. *Seja A uma matriz racional e seja b um vetor racional. Então o sistema $Ax = b$ tem solução inteira se e somente se yb é um número inteiro para todo vetor y tal que o vetor yA é inteiro.*

Teorema 3. *Seja A uma matriz com posto linha completo. Então A possui uma única forma normal de Hermite e esta pode ser obtida em tempo polinomial.*

2.2. **Reticulados.** Um subconjunto Λ de $\mathbb{R}^n$ é dito um *grupo aditivo* se

(i) $0 \in \Lambda$;
(ii) se $x, y \in \Lambda$, então $x + y \in \Lambda$ e $-x, -y \in \Lambda$.

O grupo Λ é *gerado* por $a_1, \ldots, a_m$ se $\Lambda = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m : \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{Z}\}$. Se um grupo pode ser gerado por um conjunto de vetores linearmente independentes, então esse grupo é dito um *reticulado* e o conjunto de vetores citado é sua *base*.

O resultado abaixo pode ser demonstrado através da forma normal de Hermite:

Corolário 4. *Se $a_1, \ldots, a_m$ são vetores racionais, então o grupo gerado por esse conjunto de vetores é um reticulado.*

2.3. **Matrizes unimodulares.** Uma matriz inteira U é dita *unimodular* se seu determinante é $+1$ ou -1. Uma relação entre unimodularidade, reticulados e forma normal de Hermite pode ser vista no resultado abaixo:

Teorema 5. *Seja U uma matriz racional não-singular de ordem n. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *U é uma matriz unimodular;*
(ii) *U^{-1} é uma matriz unimodular;*
(iii) *o reticulado gerado pelas colunas de U é $\mathbb{Z}^n$;*
(iv) *a forma normal de Hermite de U é a matriz identidade;*
(v) *U é obtida com operações elementares sobre colunas na matriz identidade.*

Segue do resultado anterior que a obtenção da forma normal de Hermite de uma matriz com posto linha completo pode ser descrita por uma matriz unimodular.

Corolário 6. *Seja A uma matriz racional com posto linha completo. Então existe uma matriz unimodular U tal que AU é a forma normal de Hermite da matriz A. Ademais, se A é uma matriz não-singular, então a matriz U é única.*

2.4. **Equações lineares diofantinas.** Uma *equação linear diofantina* é uma equação linear cujas variáveis podem assumir somente valores inteiros. O célebre *algoritmo de Euclides*, que determina em tempo polinomial o máximo divisor comum de dois racionais, permite resolver em tempo polinomial uma equação diofantina com coeficientes racionais. A forma normal de Hermite permite a resolução de *sistemas* dessas equações:

Teorema 7. *Uma matriz pode ser trazida à sua forma normal de Hermite em tempo polinomial.*

Corolário 8. *Dado um sistema de equações com coeficientes racionais, pode-se encontrar uma solução inteira ou determinar que ela não existe em tempo polinomial.*

2.5. **Dualidade em programação inteira.** Um *hipergrafo* H é uma coleção finita de conjuntos finitos não-vazios, chamados de *arestas*. Os elementos das arestas são chamados de *vértices*. O conjunto dos vértices de H é denotado por $V(H)$.

Remover um vértice v de um hipergrafo H significa remover de H todas as arestas que contém v. *Multiplicar um vértice* v por um inteiro não-negativo k significa substituir toda aresta E que contém v pelas arestas $E_i = E - v + v_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Um *emparelhamento* de um hipergrafo é um conjunto de arestas disjuntas e uma *cobertura* é um conjunto de vértices que intersecta com todas as arestas. Dado um hipergrafo H, a cardinalidade do emparelhamento máximo de H é denotada por $\nu(H)$ e a cardinalidade da cobertura mínima por vértices é denotada por $\tau(H)$. Dado um número inteiro não-negativo k, temos também as seguintes definições.

Um *k-emparelhamento* é uma função $m : H \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tal que

$$\sum_{E \ni v} m(E) \leq k \text{ para todo } v \in V(H).$$

Um *emparelhamento fracionário* é uma função $m : H \to \mathbb{R}_{\geq}$ tal que

$$\sum_{E \ni v} m(E) \leq 1 \text{ para todo } v \in V(H).$$

Uma *k-cobertura* é uma função $t : V(H) \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tal que

$$\sum_{v \in E} t(v) \geq k \text{ para todo } E \in H.$$

Uma *cobertura fracionária* é uma função $t : V(H) \to \mathbb{R}_{\geq}$ tal que

$$\sum_{v \in E} t(v) \geq 1 \text{ para todo } E \in H.$$

O valor máximo do somatório $\sum_{E \in H} m(E)$ dentre todos os k-emparelhamentos possíveis de H é denotado por $\nu_k(H)$ e, de maneira análoga, o valor mínimo de $\sum_{v \in V(H)} t(v)$ dentre todas as k-coberturas possíveis é denotado por $\tau_k(H)$.

Encontrar o máximo de $\sum_{E \in H} m(E)$ dentre todos os emparelhamentos fracionários possíveis de H equivale a resolver o programa linear

$$\begin{array}{rrlcll} \text{(1)} & \text{maximizar} & \sum_{E \in H} m(E) & & & \\ & \text{sujeito a} & \sum_{E \ni v} m(E) & \leq & 1 & \text{para todo } v \in V(H); \\ & & m(E) & \geq & 0 & \text{para todo } E \in H. \end{array}$$

Analogamente, encontrar o mínimo de $\sum_{v \in V(H)} t(v)$ dentre todas as coberturas fracionárias de H equivale a resolver o seguinte programa linear, dual ao anterior:

$$\begin{array}{rrlcll} \text{(2)} & \text{minimizar} & \sum_{v \in V(H)} t(v) & & & \\ & \text{sujeito a} & \sum_{v \in E} t(v) & \geq & 1 & \text{para todo } E \in H; \\ & & t(v) & \geq & 0 & \text{para todo } v \in V(H). \end{array}$$

O valor da solução ótima de (1) é denotado por ν^* e o valor da solução ótima de (2) por τ^*. Pelo teorema da dualidade, temos $\nu^* = \tau^*$. Também vale que

$$\nu \leq \frac{\nu_k}{k} \leq \nu^* = \tau^* \leq \frac{\tau_k}{k} \leq \tau.$$

Os resultados abaixo apresentam alguns exemplos de condições sob as quais o teorema da dualidade vale mesmo para a versão inteira de um programa linear:

Teorema 9. *Se para todo hipergrafo H' obtido a partir da remoção de vértices do hipergrafo H vale que $\nu(H') = \nu^*(H')$, então vale que $\nu(H) = \tau(H)$.*

Teorema 10. *Se $\tau(H') = \tau^*(H')$ para todo $H' \subseteq H$, então $\nu(H) = \tau(H)$.*

Teorema 11. *Se $\tau_2(H') = 2\tau(H')$ para todo $H' \subseteq H$, então $\nu(H) = \tau(H)$.*

Teorema 12. *Se para todo hipergrafo H' obtido a partir da multiplicação de vértices do hipergrafo H vale que $\nu_2(H') = 2\nu^*(H')$, então temos que $\nu(H) = \tau(H)$.*

Referências

1. L.G. Khachiyan, *A polynomial algorithm in linear programming*, Soviet Mathematics Doklady **20** (1979), 191–194.
2. L. Lovász, *Certain duality principles in integer programming*, Studies in Integer Programming (P.L. Hammer, E.L. Johnson, B.H. Korte, and G.L. Nemhauser, eds.), Annals of Discrete Mathematics, vol. 1, North-Holland, 1977, pp. 363–374.
3. ———, *Graph theory and integer programming*, Discrete Optimization I (P.L. Hammer, E.L. Johnson, and B.H. Korte, eds.), Annals of Discrete Mathematics, vol. 4, North-Holland, 1979, pp. 141–158.
4. A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, John Wiley & Sons, 1986.