MAC5701
Tópicos em Ciência da Computação
Plano de Estudos: Problemas estruturais e numéricos na teoria de Ramsey para grafos

Fabricio S. Benevides

1 Introdução

Os teoremas do tipo Ramsey têm sido extensivamente estudados durante a última década. Eles enquadram-se na classe de problemas que chamamos de extremais. Neste tipo de problema, normalmente procuram-se funções limiares para o tamanho de certas estruturas de modo que sempre seja possível encontrar nesta estrutura um certa subestrutura. O exemplo mais clássico de teoremas tipo Ramsey é o seguite: dados k, l, existe $R(k, l) \in \mathbb{N}$ tal que se as arestas de um grafo completo com pelo menos $R(k, l)$ são coloridas com duas cores então deve existir uma clique monocromática da cor 1 de tamanho k ou uma clique monocromática da cor 2 de tamanho l. Um outro exemplo é o Teorema de Van Der Waerden: se os inteiros positivos são coloridos com duas cores então existem progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes. As generalizações naturais dos resultados acima para mais de duas cores também são verdadeiras.

Nas últimas duas décadas, Teoria de Ramsey deixou de ser um emaranhado de problemas e teoremas e tornou-se uma subdisciplina coesiva da análise combinatória. Contudo, ainda hoje, muitos são os problemas em aberto na área. Não sabemos seguer determinar o comportamento assintótico de $R(k, l)$.

Vamos estudar problemas do tipo Ramsey para a Grafos. Este plano de estudo tem com base o livro: Ramsey Theory [2]. Também prentendemos estudar, como ferramenta, o Lema da Regularidade de Szemerédi. Para tanto temos como base o survey [4].

2 Plano de Estudos

- Pretendemos estudar de [2] os capitulos:

  1 Conjuntos

  2 Progessoões

  5 Particularidades

- Pretendemos fazer um estudo extenso de [4] com foco nas diversas aplicações do lema.

- Pretendos fazer um estudo exaustivo das demais referências aqui citadas. A monografia conterá vários dos resultados estudados mas não todos.

3 Tópicos Especificos de Pesquisa

3.1 Teorema de Ramsey para grafos

Definição 1. *Dados dois grafos G, H, o número de Ramsey generalisado $R(G, H)$ é o menor inteiro tal que se os vértices do grafo completo com $R(G, H)$ vértices são coloridos com duas cores, ou existe um subgrafo monocromático da cor 1 isomorfo a G, ou existe um subgrafo monocromático da cor 2 isomorfo a H.*

A existência de $R(G, H)$ é uma consequência imediata do teorema de Ramsey original. Este, por sua vez, equivale a tomar G e H como grafos completos.

Vários resultados são conhecidos sobre $R(G, H)$, quando G e H são grafos particulares, por exemplo, árvores. O caso em que G e H são ciclos foi completamente solucionado por J.A.Bondy e P.Erdös em [1]. Recentemente Károlyi e Rosta conseguiram refazer este trabalho de forma simples e autocontida em [5]. Este resultado pode ser resumido no seguinte teorema:

Teorema 2. *Sejam $3 \leq m \leq n$ inteiros. E sejam C_n, C_m os ciclos com n e m vértices respectivamente:*

$$R(C_n, C_m) = \begin{cases} 6, & m = n = 3, 4 \\ n + m/2 - 1, & m, n > 4, \textit{ são pares} \\ max 2m - 1, n + m/2 - 1, & m \textit{ é par e } n \textit{ é impar} \\ 2n - 1, & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Além de descobrir o valor de $R(G, H)$ é interressante saber o que acontece com o grafo se ele possui pouco menos de $R(G, H)$ vértices e não possui cópias monocromáticas de G e H. Em um trabalho ainda não publicado, [7], dá-se continuidade a [5] e prova-se o seguinte teorema sobre ciclos ímpares:

Teorema 3. *Seja G um grafo com $N = 2n - L$ vértices e $1 < L < n/8$. Então qualquer 2-coloração das arestas de G ou contém um ciclo monocromático ímpar de tamanho pelo menos n ou podemos particionar $V(G)$ em $V_1 \cup V_2$ de modo que $G[V_i]$ são monocromáticos da mesma cor, e $E(V_1, V_2)$ é colorido com a outro cor, com exceção de arestas adjantes a um único vértice.*

3.2 Lema da Regularidade de Szemerédi

As provas dos teoremas acima usam apenas fatos elementares. Contudo para muitos problemas semelhantes ao anterior, se faz necessário o uso de técnicas mais profundas como o Lema da Regularidade e alguns lemas de estabilidade. Este é o caso dos arigos: [3, 6]. O Lema da Regularidade de Szemerédi tem se mostrado uma das mais poderesas ferramentas para lidar com problemas extremais. Daí a motivação em estudá-lo.

Este lema foi concebido originalmente como um lema auxiliar na prova de uma antiga conjectura de Erdős e Turán de que seqüências de inteiros com densidade positiva sempre contém progressões aritméticas arbitrariamente grandes. Basicamente, o lema nos diz que qualquer grafo pode ser, de certo modo, aproximado por uma união de grafos bipartites pseudoaleatórios. Como grafos aleatórios são mais fáceis de se lidar, o Lema da Regularidade nos ajuda a carregar resultados, que são trivias para grafos randomicos, para a classe de grafos em geral. As seguintes definições tornam preciso o que acabamos de falar.

Definição 4. *Dados um grafo $G = (V, E)$ e $X, Y \subset V$ disjuntos, definimos $e(X, Y) = |\{xy \in E; x \in X, y \in Y\}|$. Também definimos a densidade do par (X, Y) como:*

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X| \cdot |Y|}.$$

Definição 5. *Seja $\epsilon > 0$. Dado um grafo G e dois conjuntos de vértices disjuntos $A, B \subset V(G)$, dizenmos que o par (A, B) é ϵ-regular se para todos $X \subset A$ e $Y \subset B$ satisfazendo*

$$|X| > \epsilon|A| \quad e \quad |Y| > \epsilon|B|$$

temos

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \epsilon.$$

Isto nos diz essencialmente que o par (A, B) se comporta como um grafo bipartite aleatório.

Teorema 6 (Lema da Regularidade, Szemerédi 1978). *Para todo $\epsilon > 0$ e m existem inteiros $M(\epsilon, m)$ e $N(\epsilon, m)$ com a seguinte propriedade: para todo grafo G com $n \geq N(\epsilon, m)$ vértices existe uma partição do conjunto dos vértices em $k + 1$ classes $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$ tal que:*

- $m \leq k \leq M(\epsilon, m)$
- $|V_0| < \epsilon n$
- $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k|$
- *todos excetos no máximo ϵk^2 dos pares (V_i, V_j) são ϵ-regulares.*

Isto quer dizer que todo grafo com densidade positiva de arestas pode ser particionado em um número limitado grafos, tal que quase todo par desses grafos é bipartite e aparentemente randômico. A exitência da classe V_0 é puramente tecnica: para que seja possivel que as demais classes tenham o mesmo número de elementos. Poderiamos assumir que $V_0 = \emptyset$ se relaxarmos a condição $|V_i| = |V_j|$ para $||V_i| - |V_j|| \leq 1$

A monografia trará um exemplo de aplicação deste Lema.

Referências

[1] Bondy J. A. and P. Erdos, *Ramsey numbers for cycles in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **14** (1973), 46–54.

[2] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer, *Ramsey theory*, second ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, A Wiley-Interscience Publication. MR 90m:05003

[3] Y. Kohayakawa, Miklós Simonovits, and Jozef Skokan, *The 3-colored ramsey number of odd cycles*, 2005.

[4] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352. MR 97d:05172

[5] G. Károlyi and V. Rosta, *Generalized and geometric ramsey numbers for cycles*, Theoretical Computer Science **263** (2001), 87–98.

[6] Tomasz Luczac, $R(C_n, C_n, C_n) \leq (4+o(1))n$, Journal of Combinatorial Theory, Series B **75** (1999), 174–187.

[7] Jozef Skokan, *Stability of the ramsey number for cycles*, 2004.