MAT 0222 Álgebra Linear II
Unicidade da Forma de Jordan para Operadores Nilpotentes

Preencha os detalhes da demonstração abaixo:

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja N um operador nilpotente em V. Queremos provar que a forma de Jordan de N é única. Para isso suponha que $(t, m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_t)$ e $(s, k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_s)$ sejam *sistemas invariantes* para N. Temos que provar que $s = t$ e que $k_i = m_i$ para todo $i = 1, 2, ..., t$.

1. Já observamos que se $(t, m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_t)$ é um sistema invariante para N, então $t = \dim KerN =$ *número de blocos* e daí podemos concluir que $t = s$. Também, $m_1 =$ grau $m_N(X)$, e assim $m_1 = k_1 = m$.

2. Prove que se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_r$, com V_i invariante sob N para todo $i = 1, 2, ..., r$, e se $l > 0$ é um inteiro, então $N^l(V) = N^l(V_1) \oplus N^l(V_2) \oplus ... \oplus N^l(V_r)$.

3. Precisamos agora provar que $k_i = m_i$ para todo $i = 2, ..., t$. (Se $t = 1$, não há nada a fazer!) Suponha $t > 1$. Vamos provar que $m_2 = k_2$. Sejam $v_1, ..., v_t, w_1, ..., w_t$ vetores tais que

$$B = \{v_1, Nv_1, ..., N^{m-1}v_1, v_2, Nv_2, ..., N^{m_2-1}v_2, ..., v_t, Nv_t, ..., N^{m_t-1}v_t\}$$

e

$$C = \{w_1, Nw_1, ..., N^{m-1}w_1, w_2, Nw_2, ..., N^{m_2-1}w_2, ..., w_t, Nw_t, ..., N^{k_t-1}w_t\}$$

sejam bases de V e com $N^{m_i}v_i = 0 = N^{k_i}w_i = 0$. Sejam $U_i =< v_i, Nv_i, ..., N^{m_i-1}v_i >$ e $W_i =< w_i, Nw_i, ..., N^{k_i-1}w_i >$, para $i = 1, ..., t$.

Então

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_t = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_t.$$

Use agora o ítem (2), para $l = m_2$. Temos então

$$N^{m_2}(V) = N^{m_2}(U_1) \oplus N^{m_2}(U_2) \oplus ... \oplus N^{m_2}(U_t) = N^{m_2}(W_1) \oplus N^{m_2}(W_2) \oplus ... \oplus N^{m_2}(W_t).$$

Como $N^{m_2}(U_i) = 0$ para todo $i \geq 2$ (*Por que?*) e $dimN^{m_2}(U_1) = dimN^{m_2}(W_1)$ (*Por que?*), temos que $N^{m_2}(W_i) = 0$ para todo $i \geq 2$. Em particular, $N^{m_2}(W_2) = 0$, o que implica que $m_2 \geq k_2$. (*EXERCÍCIO: POR QUE ?)*
Faça agora a mesma coisa com k_2 no lugar de m_2 e conclua que $k_2 \geq m_2$. Daí $m_2 = k_2$.

4. Já é possível entender agora como continua a demonstração? Então tente escrever como você faria para provar que $k_3 = m_3$!

5. Já vimos que para todo operador linear nilpotente N existem inteiros $(t, m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_t)$ e vetores $v_1, ..., v_t$ tais que

$$B = \{v_1, Nv_1, ..., N^{m-1}v_1, v_2, Nv_2, ..., N^{m_2-1}v_2, ..., v_t, Nv_t, ..., N^{m_t-1}v_t\}$$

é uma base de V e $N^{m_i}v_i = 0$. Com a demonstração acima, obtemos que a forma de Jordan de N é única, embora os vetores v_i não sejam únicos. Resumindo: A transformação linear N determina de modo único o *sistema invariante*.