

Continuação de (c)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}}_{[T]_B} \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -a_n & a_n \end{bmatrix}}_{[T - a_n I]_B} = 0 \quad \therefore m_T(x) = x(x - a_n) \text{ e } T \text{ é diagonalizável.}$$

4. (3,0) Verdadeiro ou Falso? Prove ou dê um contra-exemplo.

- a) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz simétrica ($A^t = A$), então A é normal, isto é, $AA^* = A^*A$.
- b) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ para alguma matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$. Então existe uma matriz $C \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $C^2 = A$.
- c) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz de posto 1. Então, ou A é diagonalizável ou A é nilpotente.

(a) FALSO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad AA^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } A^*A = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Seja $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tq $[T]_{can} = A$ VERDADEIRO

Como a base canônica é ortonormal, vale que

$$[T^*]_{can} = A^* = (B^*B)^* = B^*B^{**} = B^*B = A$$

Logo, T é autoadjunta e então os autovalores de T são números reais. Seja $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $[S]_{can} = B$. Assim $T = S^*S$.

Se λ é um autovalor de T e $v \neq 0$ é tal que $Tv = \lambda v$

$$\langle Tv, v \rangle = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \langle v, v \rangle = \langle S^*Sv, v \rangle = \langle Sv, Sv \rangle \geq 0$$

Assim, $\lambda \geq 0$

Logo existe P matriz unitária tal que $P^*AP = D$, D diagonal e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

$$\text{Seja } C = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^*, \text{ Então } C^2 = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^* P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^* = PD P^* = A$$

(c) VERDADEIRO:

Seja $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ tq $[T]_{can} = A$. Como posto $T = 1$, se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\} = B$ é base de $\text{Ker } T$, $v_n \in \mathbb{K}^n$ com $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ base de V , $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$ e então $p_T(x) = x^{n-1}(x - a_n)$. Se $a_n = 0$, então T é nilpotente. Se $a_n \neq 0$, mostre que $m_T(x) = x(x - a_n)$ e T é diagonalizável. (*) veja acima