

3. (3,0) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, com produto interno $\langle, \rangle$. Prove que:

- Para $u, v \in V$, tem-se $\|u\| = \|v\|$ se, e somente se, $\langle u+v, u-v \rangle = 0$. É o mesmo resultado verdadeiro se o espaço vetorial é complexo?
- Seja $T: V \rightarrow V$ com a propriedade de que se $\langle u, v \rangle = 0$ então $\langle Tu, Tv \rangle = 0$. Prove que $\|Tu\| = \|Tv\|$ para todo $u, v \in V$ com $\|u\| = \|v\|$.
- Se $T \neq 0$ (do item (b)), prove que existe $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e um operador ortogonal $S: V \rightarrow V$ tal que $T = aS$.

$$(a) \langle u+v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \text{Se } \langle u+v, u-v \rangle = 0 \text{ então } \|u\|^2 = \|v\|^2$$

$$\Leftarrow \text{Se } \|u\|^2 = \|v\|^2 \text{ então } \langle u+v, u-v \rangle = 0.$$

Se o espaço vetorial é complexo então o resultado não é necessariamente verdadeiro!

$$\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 - \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} = \|u\|^2 - \|v\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle$$

Em $\mathbb{C}^2$, tome por exemplo

$$u = (1, i) \text{ e } v = (-i, 1)$$

$$\|u\| = \|v\| = \sqrt{2} \text{ mas } \langle u+v, u-v \rangle = \langle (1-i, 1+i), (1+i, i-1) \rangle$$

$$= (1-i)(1+i) + (1+i)(-i-1) = 1-2i-1-(1+2i-1) = -4i \neq 0$$

No caso complexo, podemos concluir apenas que

$$\langle u+v, u-v \rangle = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

(b) Sejam $u, v \in V$ tais que $\|u\| = \|v\|$. Provar que $\|Tu\| = \|Tv\|$

Como $\|u\| = \|v\|$, por (a) segue que $\langle u+v, u-v \rangle = 0$. Logo

$$\langle T(u+v), T(u-v) \rangle = 0 = \langle Tu+Tv, Tu-Tv \rangle \text{ e por (a), novamente}$$

temos que $\|Tu\| = \|Tv\|$.

(c) Suponha $\dim V = n$ e seja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V , i.e. $\|e_i\| = 1$ para todo i e $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$.

Por (b), $\|Te_i\| = a \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Pela propriedade que T tem, $\langle Te_i, Te_j \rangle = 0$ se $i \neq j$.

Se $a = 0 \Rightarrow \|Te_i\| = 0 \Rightarrow Te_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$, e então $T = 0$.

Como $T \neq 0$, por hipótese, $a \neq 0$. Seja então

$S: V \rightarrow V$ definido por $Se_i = \frac{1}{a}Te_i$. Então

$$\|Se_i\| = \frac{1}{a^2} \langle Te_i, Te_i \rangle = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ e é claro que } \langle Se_i, Se_j \rangle = 0$$

se $i \neq j$. Logo S leva base ortonormal em base ortonormal de V , e então S é ortogonal e $T = aS$.