

B

Nome : _____
NºUSP : _____ RG : _____
Turma : _____ Professor : _____
Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

1. (2,0) Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ache uma matriz ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^t A P$ é diagonal.

Novamente, posto $A = 1$. Seja então

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\text{can}} = A$$

Então $p_A(x) = p_T(x) = x^2(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim $p_A(x) = x^2(x+3)$ e uma base de $V(-3)$ é $\{e_3\}$, com $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Vamos agora achar uma base ortonormal de $\text{Ker } T$

$$\text{Ker } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

Uma base para $\text{Ker } T$ é $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1)\}$

Vamos então ortonormalizar essa base pelo processo de Gram-Schmidt. (Note que $\langle v_1, e_3 \rangle = 0$ e $\langle v_2, e_3 \rangle = 0$)
já que são autovetores associados a autovalores distintos.

Tomo $e_1 = v_1 / \|v_1\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (0, 1, 1) - 1 \cdot \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

(veja a conclusão *)

Conclusão:

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Sendo assim, uma matriz ortogonal que satisfaz $P^t A P$ é diagonal

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{6} & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$