

MAT 0222 Álgebra Linear II

Lista 9

1. Descreva as matrizes 2×2 ortogonais e unitárias.
2. Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz normal. Prove que ou A é simétrica ou A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V que admite um adjunto. Prove que T é normal se, e somente se $\|Tv\| = \|T^*v\|$ para todo $v \in V$.

(Dica: Use as identidades de polarização, Ex.4 da Lista 7.)

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear normal em V . Prove que:
 - (a) T é autoadjunto se, e somente se os autovalores de T são números reais.
 - (b) T é unitário se, e somente se os autovalores de T são números complexos de módulo igual a 1.
 - (c) T é nulo se, e somente se os autovalores de T são nulos.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V . Prove que T é normal se, e somente se $T = T_1 + iT_2$ onde T_1 e T_2 são operadores autoadjuntos que comutam.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja T um operador linear em V . Defina o operador linear S por $S = T^*T$. Prove que:
 - (a) S é autoadjunto.
 - (b) Os autovalores de S são números reais positivos.

Mostre que a recíproca desse resultado também vale, isto é, se S é um operador linear normal em V tal que seus autovalores são números reais positivos, então existe um operador linear T tal que $S = T^*T$.

7. Para cada uma das matrizes reais *simétricas* A abaixo, ache uma matriz *ortogonal* P tal que P^tAP seja diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} (\theta \in \mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear normal em V com a seguinte propriedade: $T \neq 0$ e T leva vetores ortogonais em vetores ortogonais, isto é, se $\langle u, v \rangle = 0$ então $\langle Tu, Tv \rangle = 0$. Prove que:

(a) Se $u, v \in V$ são tais que $\|u\| = \|v\|$ então $\|Tu\| = \|Tv\|$.

(b) Existem $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e um operador ortogonal S tais que $T = aS$.

9. Prove que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

é ortogonal para todo $\theta, \phi \in \mathbb{R}$.

10. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear normal em V . Prove que se W é um subespaço de V invariante sob T , então $W^\perp$ também é invariante sob T . Conclua que se T é normal, então T é semisimples. Agora, dê um exemplo para mostrar que a recíproca não é necessariamente verdadeira, isto é, existem operadores lineares semisimples que não são normais.
11. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear normal em V . Prove que se $T^3 = T^2$ então T é idempotente. Continua o mesmo resultado verdadeiro sem a hipótese de T ser normal?
12. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear autoadjunto em V . Prove que se $T \neq I$ e se $T^k = I$ para algum $k > 1$, então $T^2 = I$.