MAT 0222 Álgebra Linear II
Lista 8

1. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Defina *posto linha (coluna) de* A como sendo a dimensão do subespaço de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}^m$) gerado pelas linhas (colunas) de A.

   (a) Seja $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases canônicas de $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ é A. Prove que $KerT = W^{\perp}$, onde W é o subespaço de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas linhas de A.

   (b) Prove que o posto linha de A é igual ao posto coluna de A.

2. Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) sobre $\mathbb{K}$ e com produtos internos $<,>_V$ e $<,>_W$ respectivamente. Seja $T : V \to W$uma transformação linear. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a)$< Tu, Tv >_W = < u, v >_V$ para todo $u, v \in V$.

   (b)T leva *toda* base ortonormal de V em uma base ortonormal de W.

   (c)T leva *uma* base ortonormal de V em uma base ortonormal de W.

   (d)$\|Tv\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

   Tal T é um *isomorfismo de espaços com produto interno.*

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $<,>$ e seja T um operador linear invertível em V. Prove que se $< Tu, Tv >=< u, v >$ para todo $u, v \in V$, então T admite um adjunto e $T^* = T^{-1}$. Mostre que a recíproca também é verdadeira, isto é , se T é um operador linear em V e se T admite um adjunto tal que $T^*T = TT^* = I$ então T é um isomorfismo de espaços com produto interno (isto é, $< Tu, Tv >=< u, v >$ para todo $u, v \in V$). Tal T é chamado operador *unitário* se $K = \mathbb{C}$ e *ortogonal* se $K = \mathbb{R}$.

4. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual) definido por: $T(1, 0) = (1+i, 2)$ e $T(0, 1) = (i, i)$. Ache a matriz de T^* em relação á base canônica de $\mathbb{C}^2$. Vale que $TT^* = T^*T$?

5. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão finita e com produto interno $<,>$ e seja T um operador linear em V. Mostre que $ImT^* = (KerT)^{\perp}$.

6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão finita e com produto interno $<,>$ e seja T um operador linear em V. Prove que se T é invertível, então T^* é invertível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

7. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ com o produto interno $< p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Seja D o operador derivação. Ache D^*.

8. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual), cuja matriz em relação à base canônica é $a_{kj} = (i)^{k+j}$ para $1 \leq i, j \leq 2$. Ache T^* e uma base para $KerT^*$.

9. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e com produto interno $<, >$ e seja T um operador linear em V. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $T^* = T$.

   (b) $< Tu, v >=< u, Tv >$ para todo $u, v \in V$.

   (c) T pode ser representado por uma matriz autoadjunta em relação a uma base ortonormal de V.

   (Um operador linear em V que tem uma das (e portanto TODAS as) propriedades acima é chamado *autoadjunto* ou *hermitiano*.)

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão finita e com produto interno $<, >$. Seja E um operador linear em V tal que $E^2 = E$. Prove que E é autoadjunto se, e somente se $EE^* = E^*E$.

11. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $<, >$ e seja T um operador linear em V. Prove que T é autoadjunto se, e somente se $< Tv, v >\in \mathbb{R}$ para todo $v \in V$.

12. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $<, >$ e seja T um operador linear em V. Prove que se $< Tv, v >= 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$. Dê um exemplo para mostrar que o mesmo resultado não é necessariamente verdadeiro se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

13. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $<, >$ e seja T um operador linear em V que admite um adjunto. Prove que se $TT^* = T^*T$ então $\|Tv\| = \|T^*v\|$ para todo $v \in V$.

14. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $<, >$ e seja T um operador linear em V tal que T admite um adjunto. Prove que se $T^*T = 0$ então $T = 0$.

15. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que A se escreve de modo único como $A = B + iC$, onde B e C são matrizes autoadjuntas.

16. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz autoadjunta. Mostre que $A + iI_n$ é invertível e que $U = (A + iI_n)^{-1}(A - iI_n)$ é unitária. A matriz U é chamada *transformada de Cayley de A*.

17. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que $A + iB \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se, e somente se a matriz
$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$
é ortogonal.