MAT 0222 Álgebra Linear II
Lista 7

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$.
(a)Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $< u, v >= 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
(b)Mostre que (a) é falso se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(c)Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que para $u, v \in V$, $< u, v >= 0 \Leftrightarrow \|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$. Mostre que vale a *lei do paralelogramo*:
$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ para todo $u, v \in V$.

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $\|u\| = \|v\|$ se, e somente se $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. Discuta a afirmação para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com produto interno $< , >$. Mostre que para todo $u, v \in V$, vale a *identidade de polarização*:
$$4 < u, v >= \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$
Mostre que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ então vale, para todo $u, v \in V$ a *identidade de polarização*:
$$4 < u, v >= \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

5. Ache uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços Se determine também, em cada caso, o subespaço $S^{\perp}$.
(a)S é o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, i)$ e $v_2 = (2, 1, 1 + i)$,com o produto interno usual.
(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, com o produto interno usual.
(c)$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid xp'(x) = p(x)$ e $< p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$.
(d)$S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$ e $< A, B >= trAB^t$.

6. Seja $V = M_3(\mathbb{C})$ com o produto interno $< A, B >= trAB^*$. Ache $W^{\perp}$, onde W é o subespaço de V constituído pelas matrizes diagonais.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$ e seja W um subespaço de V. Mostre que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

8. Seja $V = C([-1, 1])$ com o produto interno $< f, g >= \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Seja W o subespaço de V formado pelas funções pares, isto é, $W = \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \forall x \in [-1, 1]\}$. Ache $W^{\perp}$.

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$. Seja $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V e sejam $c_1, c_2, ..., c_n$, n escalares quaisquer. Mostre que existe um único vetor $v \in V$ tal que $< v, v_j >= c_j$ para todo $j = 1, 2, ..., n$.

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$. Prove que se $| < u, v > | = \|u\|\|v\|$, então u e v são linearmente dependentes.

11. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$ e seja W um subespaço de V. Seja $v \in V$. Um vetor $w \in W$ é uma **melhor aproximação para** v **por vetores em** W se $\|v - w\| \leq \|v - u\|$ para todo $u \in W$. Prove que:
(a) O vetor $w \in W$ é uma melhor aproximação para $v \in V$ por vetores em W se, e somente se $v - w \in W^{\perp}$.
(b)Se uma melhor aproximação para $v \in V$por vetores em W existe, então ela é única.
(c)Se dim$W$ $< \infty$ então existe uma melhor aproximação para $v \in V$por vetores em W e ela é dada por
$$w = \sum_{i=1}^{k} < v, e_i > e_i,$$
onde $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ é uma base ortonormal qualquer de W.
Quando tal vetor w existe,(ele é único) é chamado **projeção ortogonal de** de v **em** W.

12. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $< , >$ e seja W um subespaço de V. Seja $v \in V$. Seja $E : V \to V$ a função tal que $Ev = w =$ projeção ortogonal de v em W.(Assuma que para todo $v \in V$ existe tal w.) Prove que:
(a)E é um operador linear em V.
(b)E é idempotente.
(c)Im$E = W$ e Ker$E = W^{\perp}$.
(d)$V = W \oplus W^{\perp}$.

13. Conside $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja W o subespaço gerado pelos vetores $(1, -1, 1)$ e $(1, 1, 1)$. Encontre o operador linear E (do exercício anterior), ache a matriz de E na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

14. Seja $V = C([0, 1])$ com o produto interno $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
(a) Ache uma base ortonormal do subespaço de V gerado pelos polinômios $1, x$ e x^2.
(b)Ache o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x) = cosx$ no intervalo $[0, 1]$.

15. Seja $V = C([0, 2\pi])$ com o produto interno $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Seja
$$S = \{1, cos(nx), sen(mx), m, n \in \mathbb{Z}\}.$$
(a)Prove que S é um conjunto ortogonal de V.
(b)Seja
$$f(x) = \begin{cases} \pi, \text{ se } 0 \leq x \leq \pi \\ x, \text{ se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases} .$$
Ache a função da forma $g(x) = a_0 + a_1cosx + b_1senx + a_2cos(2x) + b_2sen(2x)$ que melhor aproxima f no intervalo $[0, 2\pi]$.