MAT 0222 Álgebra Linear II
Lista 5

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S e T operadores lineares em V com $ST = TS$. Prove que ImT e $KerT$ são invariantes sob S.

2. Seja V um espaço vetorial de dimesão n sobre $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que *todo* subespaço de V é invariante sob T. Prove que existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $T = cI$, onde I é a identidade.

3. Seja V um espaço vetorial de dimesão n sobre $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V. Suponha que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ onde para cada $i = 1, ..., k, W_i$ é invariante sob T. Seja T_i a restrição de T a W_i.
   (a) Prove que $detT = detT_1...detT_k$.
   (b) Prove que $p_T(X) = p_{T_1}(X)...p_{T_k}(X)$.
   (c) Prove que o polinômio minimal de T, $m_T(X)$, é o *mínimo múltiplo comum* dos polinômios minimais de T_i, $m_{T_i}(X)$.

4. Seja V um espaço vetorial de dimesão n sobre $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V. Prove que $V = KerT \oplus ImT$ se, e somente se $KerT$ e ImT são independentes.

5. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}.$$
   Qual é o polinômio minimal de A? Conclua que A é diagonalizável.

6. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = A$.
   (a) Quais são os possíveis polinômios minimais de A?
   (b) Prove que A é sempre diagonalizável e determine, a menos de semelhança, todas as tais matrizes A.

7. Determine, a menos de semelhança, todas as matrizes $A \in M_4(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = I_4$.

8. Determine, a menos de semelhança, todas as matrizes $A \in M_4(\mathbb{C})$ tais que $A^2 = -I_4$.

9. Prove que uma matriz complexa é diagonalizável se, e somente se ela é raiz de um polinômio que se decompõe como um produto de fatores lineares distintos.

10. *Verdadeiro ou Falso?* Se T é um operador linear diagonalizável cujos únicos autovalores são 0 e 1 então T é idempotente, isto é, $T^2 = T$.

11. Seja V um espaço vetorial de dimesão n sobre $\mathbb{R}$ e seja T um operador linear em V *idempotente*, isto é, $T^2 = T$. Prove que o operador $I + T$ é invertível e determine seu inverso.

12. Seja V um espaço vetorial e seja T um operador linear idempotente em V. Prove que $(I - T)$ também é idempotente.

13. Seja V um espaço vetorial de dimesão n sobre $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V. Dizemos que T é um operador *semisimples* se para todo subespaço W de V invariante sob T, existir um subespaço U de V, também invariante sob T tal que $V = W \oplus U$. Prove que se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então T é semisimples se, e somente se T é diagonalizável.

14. Seja T o operador linear em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por $e_1 = (1, 0)$.

(a) Prove que W é invariante sob T.

(b) Prove que não existe nenhum subespaço U de $\mathbb{R}^2$ *invariante* sob T tal que $\mathbb{R}^2 = W \oplus U$.

15. Seja T o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escreva o polinômio minimal de T como $m_T(X) = f_1(X)f_2(X)$ com f_1 e f_2 primos entre si. Para $i = 1, 2$, seja $W_i = Ker f_i(T)$ e B_i uma base de W_i.

(a) Ache $[T]_B$, onde $B = B_1 \cup B_2$.

(b) Escreva o operador T como $T = D + N$, onde D é um operador diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$.