

MAT 0222 Álgebra Linear II

Lista 4

1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{K}$ e seja $A \in M_3(\mathbb{K})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Prove que o polinômio característico de A é $p_A(X) = X^3 - aX^2 - bX - c$ e que esse é também seu polinômio minimal.

2. Encontre uma matriz 3×3 cujo polinômio minimal é X^2 .

3. Ache o polinômio minimal de cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

4. Seja $a \neq 0$ e seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ a matriz $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = a$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Prove que A é diagonalizável. Qual é o polinômio minimal de A ?

(DICA: veja o exercício 11 da Lista 3)

5. Quais são as possibilidades para os polinômios minimais de matrizes $A \in M_4(\mathbb{R})$ cujos polinômios característicos são:

(a) $p_A(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)$

(b) $p_A(X) = X(X-1)(X-2)^2$

(c) $p_A(X) = X(X-1)^3$

(d) $p_A(X) = X^2(X-1)^2$

Em algum dos casos é possível afirmar que A é diagonalizável?

6. Ache os polinômios característico e minimal de cada um das matrizes abaixo. Verifique se elas são ou não diagonalizáveis como matrizes *reais* e como matrizes *complexas*.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Seja $D \in \mathfrak{L}(P_n(\mathbb{R}))$ o operador *derivação*. Ache o polinômio minimal de D .