MAT 0222 Álgebra Linear II
Lista 3

1. Em cada um dos casos seguintes, seja T o operador linear em $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é A e seja S o operador linear em $\mathbb{C}^2$ cuja matriz em relação à base canônica também é A. Ache os polinômios característicos de S e de T, os autovalores e uma base de cada um dos autoespaços.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Seja $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que
$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$
Prove que T é diagonalizável e ache uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

3. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
É A diagonalizável? E se considerarmos $A \in M_3(\mathbb{C})$?

4. $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^4)$ tal que
$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine condições em a, b e c para que T seja diagonalizável.

5. Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetotorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja T o operador linear em V tal que para cada f em V, $T(f)$ é a função
$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
Prove que T não tem autovalores.

6. Seja A em $M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa e seja L_A o operador linear em $M_n(\mathbb{K})$ definido por $L_A(M) = AM$.

   (a) Encontre a matriz de L_A em relação à base
$$B = \{E_{11}, E_{21}, ..., E_{n1}, E_{12}, E_{22}, ..., E_{n2}, ..., E_{1n}, E_{2n}, ..., E_{nn}\}.$$

   (b) Prove que A é diagonalizável se, e somente se L_A é diagonalizável.

7. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
Calcule A^{2005}.

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathfrak{L}(V)$ tal que $T^2 = T$.

   (a) Prove que $V = KerT \oplus ImT$.

   (b) É T diagonalizável? Por que?

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $2 \neq 0$ em $\mathbb{K}$. Seja $T \in \mathfrak{L}(V)$ tal que $T^2 = I$. Sejam
   $W_1 = \{v \in V \text{ tal que } T(v) = v\}$ e $W_2 = \{v \in V \text{ tal que } T(v) = -v\}$. Mostre que
   $V = W_1 \oplus W_2$. É T diagonalizável? Por que?

10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo como no execício anterior e seja $T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ o operador linear definido por $T(M) = M^t$ (aqui M^t denota a matriz *transposta* de M). Mostre que T é diagonalizável.

    Observação: Este é um caso particular do exercício anterior!

11. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathfrak{L}(V)$ de posto 1. Prove que *ou* T é diagonalizável *ou* T é nilpotente.

    Observação:Um operador linear T é *nilpotente* se existir um inteiro $k \geq 1$ tal que $T^k = 0$.

EXERCÍCIOS DO LIVRO TEXTO:

5.1.14: Do 1 até 19. (*IMPORTANTES:* (3) e (7))