

MAT 0222 Álgebra Linear II

Lista 2

1. Seja $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ com $v_1 = (1, i)$ e $v_2 = (-i, 2)$. Ache as matrizes: $[T]_{can, B}$, $[T]_{B, can}$, $[T]_{can}$ e $[T]_B$. (Aqui can designa a base canônica de $\mathbb{C}^2$.)

2. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz fixa e seja $T_A : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ definida por

$$T_A(M) = AM - MA.$$

Mostre que T_A é uma transformação linear.

3. Exiba uma função $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que seja $\mathbb{R}$ -linear mas que não seja $\mathbb{C}$ -linear.

4. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Sejam $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow V$ transformações lineares. Mostre que se $\dim V > \dim W$ então a composta $S \circ T$ não é invertível.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ linear tal que $\text{posto}(T^2) = \text{posto}(T)$. Prove que $\text{Ker} T \cap \text{Im} T = \{0\}$.

6. Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Prove que as matrizes

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

são matrizes semelhantes em $M_n(\mathbb{C})$.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^2 = T$. Prove que ou T é o operador nulo, ou T é a identidade ou existe B base de V tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja T um operador linear em V tal que $T^n = 0$ e $T^{n-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $T^{n-1}v \neq 0$. Prove que o conjunto

$$B = \{v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v\}$$

é uma base de V . Qual é a matriz $[T]_B$?

EXERCÍCIOS DO LIVRO TEXTO:

3.1.6: (2), (4)

3.2.6: de (2) a (11).

Esses exercícios correspondem aos exercícios (2) e (4) e de (7) a (14) da Lista 2 extraída do livro *Um curso de Álgebra Linear*.