MAT 0222 Álgebra Linear II
Lista 1

1. Seja
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo. Prove também que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial. Exiba uma base desse espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

2. Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{K}$ corpos tais que $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$. Mostre que $\mathbb{L}$ pode ser visto como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Isso é uma generalizaçâo de exercício anterior.

3. Ache uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Ache também uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ e uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

4. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão n e seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Mostre que o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \cup \{iv_1, iv_2, ..., iv_n\}$ é uma base de V quando considerado como $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

5. Mostre que o conjunto $\{sen(x), cos(x)\} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é L I . Mostre também que se $c_1, c_2, ..., c_n$ são n números reais distintos, então o conjunto $\{e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, ..., e^{c_n x}\} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é L I .

6. Mostre que os conjuntos $\{sen^2(x), cos^2(x)\}$ e $\{1, cos(2x)\}$ geram o mesmo subespaço de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7. Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Mostre que se $\{u, v, w\}$ é um subconjunto LI do espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ então o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é L I. Mostre que a hipótese de que $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ é essencial.

8. Encontre 3 vetore LD em $\mathbb{R}^3$, mas de modo que cada par deles seja LI.

9. Mostre que o conjunto $\{(2i, 1, 0), (2, -1, 1), (0, 1 + i, 1 - i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^3$ e ache as coordenadas do vetor $(1, 0, 1)$ em relação a essa base.

10. Seja W o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $w_1 = (1, 0, i)$ e $w_2 = (1 + i, 1, -1)$.
(a) Mostre que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W.
(b) Mostre que os vetores $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, i, 1 + i)$ estão em W e formam outra base de W.
(c) Quais são as coordenadas de w_1 e w_2 em relação à base $\{v_1, v_2\}$?

11. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços de V. Mostre que $U \cup W$ é um subespaço de V se, e somente se $U \subset W$ ou $W \subset U$.

12. Seja W um subespaço do espaço vetorial V de dimensão n. Mostre que existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$. É tal U único?

13. Sejam U e W subespaços de V. Prove que se U e W têm dimensão finita, então $U + W$ tem dimensão finita e vale a fórmula:

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

14. Sejam U e W subespaços de V tais que $V = U + W$. Mostre que $V = U \oplus W$ se, e somente se $dimV = dimU + dimW$.

15. Sejam $V = M_n(\mathbb{K})$, $W = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$ e $U = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$.
    (a) Descreva $U \cap W$.
    (b) Ache $dimU$, $dimW$ e $dim(U \cap W)$.

EXERCÍCIOS DO LIVRO TEXTO:

2.1.5: (8)

2.2.10: de (3) **a** (9) **e** (12)

2.3.14: (1) **e** (4)

2.4.7: (3), (4), (5), (8) **e** (9)

2.6.8: de (1) **a** (5)