4^a Lista de exercícios - MAT 222

Extraídos do livro: *Um Curso de Álgebra Linear* de Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço, EDUSP (1a. edição: 2001) (2a. edição: 2005).

(1) Em cada um dos casos abaixo, decida se o operador linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dado por sua matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e a sua forma diagonal.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{C} \\ n = 2\end{matrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{C} \\ n = 2\end{matrix} \qquad (c)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{C} \\ n = 2\end{matrix}$$

$$(d)\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 3\end{matrix} \qquad (e)\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ n = 3\end{matrix} \qquad (f)\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 2\end{matrix}$$

$$(g)\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 3\end{matrix} \qquad (h)\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix}\mathbb{K} = \mathbb{R} \\ n = 3\end{matrix}$$

(2) Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T, então existe um $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v,\ \forall\ v \in V$.

(3) Seja $T : V \to V$ operador e V espaço sobre $\mathbb{K}$. Mostre que se p_T tiver todas as suas raízes em $\mathbb{K}$ e se elas forem simples, isto é, com multiplicidade algébrica 1, então T é diagonalizável.

(4) Seja $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ tal que $T \circ T = 0$. Mostre que

(a) $Im\ T \subseteq\ Nuc\ T$.

(b) Se $T \neq 0$, então existe base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) Determine, se existir, uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal para cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, com $a \in \mathbb{K}$.

(6) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que tem como autovetores $(3, 1)$ e $(-2, 1)$ associados aos autovalores -2 e 3, respectivamente. Calcule $T(x, y)$.

(7) Sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ transformações lineares. Suponha que v é autovetor de T e de S associado aos autovalores λ_1 e λ_2 de T e S, respectivamente. Ache um autovetor e um autovalor dos operadores: (a) $\alpha S + \beta T$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; e (b) $S \circ T$.

(8) (a) Mostre que se $B,\ M \in \mathbb{M}_{\ n}(\mathbb{K})$, com M invertível, então $(M^{-1}BM)^n = (M^{-1}B^nM)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$.

(9) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C}).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ determine $B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$.

(10) Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. onde $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}x^2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}x\}$ e $\mathcal{C} = \{x^2, x, 1\}$. Mostre que T é diagonalizável.

(11) Decida se as seguintes matrizes são ou não diagonalizáveis. Em caso afirmativo, encontre uma base de autovetores.

$(a) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (c) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (d) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

(12) Determine todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13) Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considere o subespaço $S = [e^{2x}\ sen\ x,\ e^{2x}\ cos\ x, e^{2x}]$ e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Considere ainda as funções $f_1(x) = e^{2x}$ sen x, $f_2(x) = e^{2x}$ cos x e $f_3(x) = e^{2x}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Determine:

(a) a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de S.

(b) os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

(14) Encontre transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfazendo cada uma das seguintes propriedades:

(a) T possui 3 autovalores distintos.

(b) T possui 1 autovalor com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 3.

(c) T possui 1 autovalor com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 2.

(d) T possui 1 autovalor com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1.

(e) T possui apenas 1 autovalor real e ele tem multiplicidade algébrica 1.

(f) T possui exatamente 2 autovalores distintos.

Em quais destes casos, T é seguramente diagonalizável ? Justifique