2^a Lista de exercícios - MAT 222

Extraídos do livro: *Um Curso de Álgebra Linear* de Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço, EDUSP (1a. edição: 2001) (2a. edição: 2005).

(1) Prove que cada uma das transformações abaixo é linear.

(a) $F: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $F(p(t)) = t^2 p''(t)$.

(b) $F: \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX + X$ onde $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $F: \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX - XM$ onde $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $F: \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ dada por $F(y(t)) = y'''(t) - y'(t) + 3y(t)$. Lembramos que $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das funções que admitem derivadas até terceira ordem.

(e) $T: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(p) = (\int_{-1}^{0} p(t)dt,\ \int_0^1 p(t)dt)$.

(f) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + 2y + z$.

(g) $T: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ dada por $(Tp)(x) = x\ p(x+1)$.

(h) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b) = ax^2 + bx + (a + b)$.

(2) Consideremos uma transformação linear $T: U \to V$, onde U e V são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tais que $dim_{\mathbb{K}} V < dim_{\mathbb{K}} U < \infty$.

(a) Prove que existe um elemento não nulo $u \in U$ tal que $T(u) = 0$.

(b) Se $\mathcal{B}$ é uma base arbitrária de U, existe sempre um vetor $u \in \mathcal{B}$ tal que $T(u) = 0$? Prove ou dê um contra-exemplo.

(3) Seja $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a função dada por $T(a, b, c)_{\mathcal{B}} = (2c - 2b,\ a + c,\ a + b + c)_{\mathcal{C}}$ onde $\mathcal{C}$ é a base $\{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{B}$ é a base $\{1, x + x^2, 1 + x^2\}$.

(a) Verifique que T é uma transformação linear.

(b) Existe um vetor $u \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ não nulo tal que $T(u) = u$?

(4) Mostre que a função $T: \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(x + iy) = \begin{pmatrix} x + 7y & 5y \\ -10y & x - 7y \end{pmatrix}$ é linear, onsiderando $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(5) Mostre que a composta de transformações lineares é linear.

(6) Mostre que uma função $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ é uma transformação linear se e somente se existirem $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $T(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

(7) Determine quatro transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ cujos núcleos tenham dimensões 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

(8) Considere os subespaços $V = [(1,0,1,1),(0,-1,-1,-1)]$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0$ e $t+z=0\}$ de $\mathbb{R}^4$. Determine $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linear tal que $Nuc\, T = V$ e $Im\, T = W$.

(9) Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares:

(a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x-y, x+y)$.

(b) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z,t) = (x+y+2z, -x+2t)$.

(10) Ache uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Nuc\, T = [(1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$ e $Im\, T = [(1,-1,0,2),(0,1,-1,0)]$.

(11) Seja $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada por $T(z_1,z_2,z_3) = (z_1 - z_2 + 2z_3, 2z_1 + z_2 - z_3, 2z_2 - 2z_3)$.

(a) Mostre que T é linear.

(b) Qual é o posto de T?

(c) Exiba o $Nuc\, T$. Qual é a $dim_{\mathbb{C}}\ Nuc\, T$?

(12) Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$.

(a) Se n for ímpar, prove que não existe nenhuma transformação linear $T: V \to V$ tal que $Im\, T = Nuc\, T$.

(b) Mostre que afirmação (a) é falsa se n for par.

(13) Sejam U, V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T: U \longrightarrow V$ uma transformação linear.

(a) Prove que T é injetora $\Longleftrightarrow$ T leva subconjuntos l.i. de U em subconjuntos l.i. de V.

(b) Prove que se o conjunto $\{T(u_1), \cdots, T(u_r)\}$ for l.i. em V, então $\{u_1, \cdots, u_r\}$ é l.i. em U.

(14) Mostre que se $T: U \to V$ for uma transformação linear injetora, então $dim_{\mathbb{K}}\ U \leq dim_{\mathbb{K}}\ V$.

(15) Mostre que cada uma das transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ a seguir é invertível e determine a transformação linear inversa:

(a) $F(x,y,z) = (x - 3y - 2z,\ \ y - 4z,\ \ -z)$.

(b) $F(x,y,z) = (x,\ \ x - y,\ \ 2x + y - z)$.

(16) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $T: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ o operador dado por $T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$, $\forall\ (x_1,x_2) \in \mathbb{K}^2$. Prove que T é um isomorfismo e exiba T^{-1}.

(17) Decida se a transformação linear $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $T(1,0,0) = (1,0,i)$, $T(0,1,0) = (0,1,1)$, $T(0,0,1) = (i,1,0)$ é invertível.

(18) Sejam $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares.

(a) Provar que $S \circ T$ não é invertível.

(b) Achar um exemplo em que $T \circ S$ não é invertível.

(19) Sejam $T, S \colon V \longrightarrow W$ duas transformações lineares, onde V e W são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V e de W, respectivamente e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre que

(a) $[T+S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

(b) $[\lambda T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \lambda [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

(20) Ache uma base de $Im\ T$ e uma base de $Nuc\ T$ para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear dada por

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(21) Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $G : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são as bases $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x^2\}$.

(a) Determine bases para $Nuc\ T$ e $Im\ T$.

(b) Determine bases para $Nuc\ (G \circ T)$ e $Im\ (G \circ T)$.

(c) Determine a matriz de $H = 3(T \circ G) + Id_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ com relação à base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(22) Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ z-w & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a matriz de T com relação à base canônica.

(b) Determine a matriz de T com relação à base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Exiba a matriz M tal que $[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[T]_{can}M$.

(23) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine $T(x,y,z)$.

(b) Qual é a matriz de T com relação à base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0), (1,-1,1), (0,1,-1)\}$?

(c) O operador T é invertível? Justifique.

(24) Considere as bases $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0),(i,0),(1,1),(1,i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Determine as coordenadas da transformação linear $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $T(a+bx+cx^2) = (a+bi, b+ci)$ com relação à base de $L(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}^2)$ construída como no Teorema 3.5.2.

(25) Exibir uma base de $L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$.